Rappresentazione geometrica di parole.

Carlo Felice Manara

§.**1** - Indichiamo con **b** un vettore ad n componenti b(i) ($1 \leq i \leq n$) ciascuna delle quali vale 0 oppure 1. Si ha quindi per ogni i:

(1) $$(b(i) = 0) \vee (b(i) = 1) .$$

Nel seguito un vettore cosiffatto sara' anche chiamato "vettore binario". Indichiamo con B l'insieme di tutti i vettori b. Si ha:

$$B = \text{Cardinalita' di } B = 2^n$$

§.**2** - Indichiamo con **c** un vettore ad n componenti c(i) ($1 \leq i \leq n$), ciscuna delle quali sia un numero reale positivo; si avra' quindi, per ogni indice i:

(2) $$c(i) > 0.$$

Indichiamo con C l'insieme di tutti i vettori **c**.

§.**3** - Considerato un vettore **b** di B, poniamo:

(3) $$s(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \Sigma\, b(i)c(i) \quad (1 \leq i \leq n),$$

prodotto scalare dei due vettori **b** e **c**.

Per un dato intero naturale n, indichiamo con S(n) l'insieme di tutti i numeri s(n) definiti dalla (3). Si ha ovviamente:

$$S(n) = \text{Cardinalita' di } S(n) \leq 2^n.$$

OSSERVAZIONE 1 - L'insieme S(n) e' ovviamente costituito da tutte le somme di un numero qualunque di componenti del vettore **c**, compresa la somma nulla.

§.**4** - Indichiamo con J l'insieme degli indici interi da 1 a 2^n, ed indichiamo con R(n) l'insieme degli elementi di S(n), ordinato secondo l'ordinamento stabilito nei reali dalla relazione " $\leq$ ".

Pertanto, indicato con $r(j)$ un elemento di $R(n)$ $(1 \leq j \leq 2^n)$, si avra':

a) esiste un vettore **b** di B tale che sia:

(4) $$r(j) = s(\mathbf{b});$$

b) per ogni indice j si ha:

(5) $$r(j) \leq r(j+1).$$

§.5 - <u>OSSERVAZIONE 2</u> - Per ogni intero n, e' possibile scegliere il vettore **c** in modo che l'insieme $S(n)$ (e quindi anche $R(n)$) sia costituito da numeri tutti diversi tra loro, e quindi siano valide, invece delle (5), le:

(6) $$r(j) < r(j+1).$$

<u>OSSERVAZIONE 3</u> - Qualora le (6) fossero verificate, si avrebbe una bijezione (corrispondenza biunivoca) tra i vettori di B e gli elementi di $R(n)$; quindi ognuno di questi ultimi potrebbe essere assunto come coordinata unica, o come "cifra" del corrispondente elemento di B.

<u>OSSERVAZIONE 4</u> - Le condizioni (6) possono essere soddisfatte in molti modi; e' noto per es. che esse sono verificate quando gli elementi del vettore **c** sono scelti in modo tale che, per ogni indice i, l'elemento $c(i)$ sia maggiore della somma di tutti quelli che hanno indice inferiore.

Tuttavia con queste scelte si giunge ad avere degli elementi rappresentati da numeri molto grandi, al crescere di n; per esempio, supponendo che tutti gli elementi di **c** siano numeri naturali, e scegliendo $c(1) = 1$, gli elementi del vettore **c** crescono piu' rapidamente degli elementi della successione di Fibonacci. E' possibile invece scegliere gli elementi del vettore **c** in modo che esssi costituiscano una successione decrescente, ed anche che siano maggiorati dagli elementi di una serie convergente a termini positivi.

La dimostrazione di questo fatto puo' essere data induttivamente.

I) La cosa e' vera per n = 2, infatti basta prendere:

$$c(1) > c(2) > 0.$$

In questo caso gli elementi di R(2) sono 4, e precisamente:

$$0 \quad , \quad c(2) \quad , \quad c(1) \quad , \quad c(1)+c(2);$$

essi sono ovviamente tutti distinti tra loro, e corrispondono rispettivamente ai vettori b di componenti:

$$(0,0) \quad (0,1) \quad (1,0) \quad (1,1).$$

II) Supponiamo ora vere tutte le (6) per un dato valore di n, e dimostriamo che si puo' scegliere un vettore **c** di (n+1) componenti in modo che le (6) continuino ad essere rispettate.

Indichiamo con **c'** un vettore ad (n+1) componenti, tra le quali le prime n coincidono con quelle di **c**; indichiamo con R' l'insieme di tutte le $2^{(n+1)}$ somme di elementi di **c'**. La cardinalita' di R' e' quindi il doppio di quella di R(n); essi sono gli elementi di R' in cui non entra la nuova componente c(n+1) di **c'**, e che quindi corrispondono a vettori di B per cui si ha b(n+1) = 0.
Gli altri 2^n elementi di R' si ottengono da quelli di R sommando ad ognuno di essi la nuova componente c(n+1) di **c'**.
Poniamo ora:

$$(7) \qquad d(j) = r(j+1) - r(j) \qquad (1 \leq j \leq 2^{(n-1)}),$$

e sia u il minimo dei numeri d(j).
Si osserva ora che tutti gli elementi di R' che appartengono al primo gruppo di 2^n elementi sono distinti tra loro, per ipotesi.
Se poi si sceglie c(n+1) in modo che sia

$$(8) \qquad c(n+1) < u$$

anche tutti gli elementi del secondo gruppo sono tutti distinti (tra loro, ovviamente, ma anche) da tutti gli elementi del primo gruppo.

<u>OSSERVAZIONE</u> <u>5</u> - Quando si supponga che n possa non esser superiormente limitato, la condizione (8) e' compatibile con con ogni condizione di convergenza della serie:

$$(9) \qquad \Sigma\, c(j).$$

§.6 - Indichiamo con m un numero naturale, e sia A un alfabeto, costituito da m simboli tutti distinti tra loro:

$$(10) \qquad a(i) \quad (1 \leq i \leq m).$$

Sia N un numero naturale e sia P una successione di N elementi di A; diremo, secondo l'uso, che P e' una "parola", e che gli elementi dell'alfabeto A che compaiono nei vari posti di P sono le "lettere" della P stessa.

Ovviamente la P e' determinata quando si assegni la lettera dell'alfabeto A che compare ad ogni posto della successione P; indicando con j l'indice di una lettera in A e con i il posto di un elemento nella successione P, la parola P e' quindi determinata da una funzione numerica p che assegna j in funzione di i:

(11) $$j = p(i)$$

§.7 - Per rappresentare una parola P ad n lettere si puo' far ricorso ad una matrice rettangolare Q (N x m) ad N righe ed m colonne; indicato con q(i,j) l'elemento di Q che appartiene alla riga di indice i ($1 \leq i \leq N$) ed alla colonna di indice j ($1 \leq j \leq m$), porremo

(12) $$q(i,j) = 1$$

se e solo se la lettera di posto i di P e' l'elemento di posto j dell'alfabeto, e porremo

(13) $$q(i,j) = 0$$

in ogni altro caso.

Di conseguenza si ha che:

1) in ogni riga della matrice Q vi e' un solo elemento uguale ad 1 e gli altri sono tutti zero;

2) ogni colonna di Q e' un vettore di tipo **b**, le cui N componenti valgono soltanto 1 oppure 0: quindi ogni colonna di Q puo' corrispondere ad un elemento dell'insieme S(n); tale numero puo' essere considerato come la "cifra" del vettore **b**, se gli N elementi del vettore **c** sono stati scelti come e' chiarito nella Oss.4. Per quanto e' stato detto nella osservazione citata, tali "cifre" sono tutte diverse tra loro.

§.8 - Cio' che e' stato detto finora puo' essere esposto sotto forma geometrica con la seguente procedura.

Sia E uno spazio euclideo ad m dimensioni, avente cioe' un numero di dimensioni uguale a quello delle lettere dell'alfabeto considerato; indichiamo con X un punto di E e siano:

$$x(1),\ x(2),\ \ldots\ldots,\ x(m)$$

le sue coordinate cartesiane. Scegliendo come coordinate i numer' di S(n) corrispondenti alla prima, alla seconda, alla m-esima colonna della matrice Q, il punto X rappresentera' in modo biunivoco la parola P.

OSSERVAZIONE 6 - Da cio' che e' stato esposto nei NN 1...5 si deduce che, scelta una successione **c** che soddisfi alla condizione (8), ogni vettore binario **b** puo' essere rappresentato con un unico numero reale che, come abbiamo detto puo' essere considerato come la sua "cifra"; se poi le componenti del vettore **c** sono razionali tale "cifra" e' ovviamente un numero razionale. Se quest'ultimo e' rappresentato sotto forma di frazione irriducibile, allora si ha che ogni vettore binario **b** puo' essere "cifrato" con una coppia ordinata di numeri naturali.

Gli sviluppi dei NN 6...8 permettono una rappresentazione geometrica dell'insieme delle parole su uno spazio euclideo E ad m dimensioni; si potrebbe cosi definire una metrica sull'insieme delle parole, e quindi anche una topologia; in particolare si potrebbero interpretare le abituali operazioni sulle parole con operazioni geometriche sullo spazio, e le relazioni tra parole come relazioni tra i punti che le rappresentano; per esempio si ha facilmente che tutte le parole scritte nell'alfabeto A che hanno la medesima lunghezza N sono rappresentate da punti di E che appartengono all'iperpiano avente equazione:

$$\Sigma\ x(j) = \Sigma\ c(i) \qquad (1 \leq j \leq m,\ 1 \leq i \leq N)$$

Carlo Felice MANARA
Via G.B.Piranesi, 22
20137 MILANO