LE (n)-VARIETA' DI UNO SPAZIO PROIETTIVO $P_{r,k}$

Giuseppe TALLINI

1. - LE (n)-VARIETA' REGOLARI.

Sia $\mathbb{P}_{r,k}$ uno spazio proiettivo di dimensione r su un corpo k. In $\mathbb{P}_{r,k}$ una (n)-varietà è un sottoinsieme H di $\mathbb{P}_{r,k}$ tale che ogni retta o è esterna o è 1-secante H (tangente ad H) o appartiene ad H ovvero incontra H in esattamente n punti, ove n è un intero con $n<|k|+1$, ed esistono n-secanti.

Ogni quadrica di $\mathbb{P}_{r,k}$ è una (2)-varietà. Così l'intersezione di una famiglia di quadriche è una (2)-varietà. Sono quindi (2)-varietà le grassmanniane, le varietà prodotto di C. Segre, le varietà di bandiere. In PG(r, q), q quadrato, ogni varietà hermitiana è una (n)-varietà, con $n=\sqrt{q}+1$.

Si prova subito che:

I. Ogni S_d incontra una (n)-varietà H o in un sottospazio ovvero in una (n)-varietà.

Diremo che H è propriamente immersa in $\mathbb{P}_{r,k}$ se è congiunta da $\mathbb{P}_{r,k}$, cioè se esistono r+1 punti indipendenti di H.

Un punto P di H dicesi singolare se per P non passano rette n-secanti. H dicesi singolare se ammette punti singolari. Si prova che:

II. L'insieme dei punti singolari di H è un sottospazio S_h ed H risulta un cono proiettante dall'S_h una (n)-varietà H' non singolare di un S_{r-h-1} sghembo con l'S_h. In particolare, se $h=r-2$, H è costituita da n iperpiani formanti fascio.

Dimostrazione. Sia S l'insieme dei punti singolari di H, con $S \neq \emptyset$. Vogliamo innanzitutto dimostrare che S è un sottospazio S_h di $\mathbb{P}_{r,k}$. Fissiamo due punti A e B dell'insieme S. La retta $AB = \ell$ appartiene interamente ad S. Infatti ℓ non è nè una retta n-secante H (per ipotesi), nè una retta tangente H (ha due punti di H) e quindi non può che essere contenuta completamente in H. Inoltre, ogni punto X di ℓ è singolare. Difatti se consideriamo una qualsiasi retta $t \neq \ell$ per il punto X e supponiamo che t abbia un punto C di H ($C \neq X$), si ottiene che la retta AC appartiene per intero ad H (si ragiona come sopra). Analogamente accade per la retta BC. Poi scegliamo un qualsiasi punto Y della retta AC. Anche la retta BY è contenuta interamente in H. Di conseguenza, il piano congiungente B con la retta AC, cioè il piano ABC, appartiene tutto ad H. Poichè t è una retta del piano ABC, si ha che t è tutta contenuta in H. Quindi, ogni retta per il punto X e con un punto in comune con H, diverso da X, appartiene ad H, ossia per il punto X non passano n-secanti, cioè X è un punto singolare. Così $\ell \subseteq S$. Dunque l'insieme S soddisfa la proprietà che se una retta contiene due punti di S, allora la retta appartiene per intero ad S. Ne segue che S è un sottospazio di $\mathbb{P}_{r,k}$, cioè $S = S_h$ se h è la dimensione di S.

Rimane da dimostrare che l'(n)-varietà H risulta un cono che proietta dall'S_h una (n)-varietà H' non singolare di un S_{r-h-1} sghembo con l'S_h. Fissiamo dunque un S_{r-h-1} sghembo con l'S_h e lo intersechiamo con H.

Abbiamo così:

$$H' = H \cap S_{r-h-1}. \tag{1.1}$$

Sia P un qualsiasi punto di H' e consideriamo lo spazio S_{h+1} congiungente P con l'S_h. Ogni retta passante per il punto P e appartenente all'S_{h+1} interseca l'S_h in un punto singolare Z. Inoltre, ognuna di queste rette ha due punti in comune con H. Allora tutte le rette di questo tipo appartengono interamente ad H. Per cui S_{h+1} è tutto contenuto in H. Consideriamo ora il cono C che dall'S_h proietta H', cioè C è l'unione degli spazi S_{h+1} ottenuti congiungendo i punti di H' con i punti dell'S_h. Per quanto detto sopra, il cono C è tutto contenuto in H. Si vuole affermare che C=H. Infatti se Q è un punto dell'insieme $H-S_h$, si può determinare lo spazio S'_{h+1} che congiunge il punto Q con l'S_h. Segue subito che l'S'_{h+1} è tutto contenuto in H. Inoltre, per la formula di Grassmann, si ha che l'intersezione $S'_{h+1} \cap S_{r-h-1}$ è un punto P' di H'. Ne segue che l'S'_{h+1} è uno degli spazi del cono C. Pertanto, $Q \in S'_{h+1} \subset C$. Quindi ogni punto di H è un punto di C cioè $C \supseteq H$. Dunque C=H.

Infine, sia T un punto di H'. Ovviamente il punto T non appartiene allo spazio singolare S_h e quindi per T passa una retta n-secante H. Quando proiettiamo dall'S_h questa retta n-secante, necessariamente si ha una retta dell'S_{r-h-1} che passa per il punto T ed è n-secante H'. Quindi dalla proposizione I segue che $H' = H \cap S_{r-h-1}$ è una (n)-varietà non singolare.

Una (n)-varietà H dicesi regolare se per ogni suo punto P non singolare l'unione delle rette per P tangenti in P o appartenenti ad H è un iperpiano $\tau(P)$, da dirsi tangente in P ad H. In tal caso, ogni retta per P non appartenente a $\tau(P)$ è n-secante H. Evidentemente se H è regolare essa è propriamente immersa in $\mathbb{P}_{r,k}$.

Proviamo che:

III. Ogni S_d incontra una (n)-varietà H regolare o in un sottospazio ovvero in una (n)-varietà regolare.

Dimostrazione. Si tratta di provare che se $H' = H \cap S_d$ è una (n)-varietà essa è regolare e cioè che per ogni $P \in H'$, non singolare per H', l'unione delle rette per P appartenenti all'S_d che siano tangenti in P ad H' ovvero contenute in H' costituisce un S_{d-1} di S_d. Sia ℓ una retta per P dell'S_d che sia n-secante H' (esistente perchè P non è singolare per H'). Il punto P è allora non singolare per H; inoltre, l'iperpiano tangente $\tau(P)$ in P ad H non contiene l'S_d. L'$S_{d-1} = \tau(P) \cap S_d$ è tale che ogni retta t per P contenuta in esso è tangente ovvero appartiene ad H', mentre ogni retta s per P dell'S_d non appartenente all'S_{d-1} è n-secante H' (perchè s non appartiene a $\tau(P)$). Ne segue l'asserto.

Dalle proposizioni II, III si ha:

IV. Ogni (n)-varietà regolare H singolare è un cono proiettante da un S_h una (n)-varietà non singolare regolare H' di un S_{r-h-1} sghembo con l'S_h.

Per la proposizione IV si ha che lo studio delle (n)-varietà regolari si riduce a quello delle (n)-varietà regolari non singolari. Nel seguito supporremo perciò (salvo esplicito avviso in contrario) che la (n)-varietà H sia regolare e non singolare. Proviamo che:

V. Se H contiene una retta, essa è rigata. Inoltre, per ogni $P_1, P_2 \in H$ o la retta P_1P_2 appartiene ad H ovvero esiste una poligonale (ℓ_1, ℓ_2) $(\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset)$ con $P_1 \in \ell_1$, $P_2 \in \ell_2$, cioè H è connessa per poligonali.

Dimostrazione. Sia ℓ una retta di H, per ogni $P \in H-\ell$ l'iperpiano tangente $\tau(P)$ in P ad H incontra ℓ in (almeno) un punto P_1 $(\neq P)$. La retta PP_1 appartiene a $\tau(P)$ e non è tangente ad H (perchè $P, P_1 \in H$), quindi appartiene ad H. Dunque per ogni punto di H passa almeno una retta di H, cioè H è rigata. Ne segue l'asserto.

Se H non contiene rette, cioè se ogni retta di $\mathbb{P}_{r,k}$ o è esterna o è tangente ovvero è n-secante H, diremo che H è una (n)-ovale se $r=2$, è un (n)-ovoide se $r \geq 3$. Dalla proposizione V si ha:

VI. In $\mathbb{P}_{2,k}$ ogni (n)-varietà regolare non singolare è una (n)-ovale.

Dimostrazione. Per assurdo supponiamo che l'(n)-varietà H regolare non singolare contenga una retta e quindi (cfr. proposizione V) sia rigata. Fissati due punti P, P' di H, restano determinate le rette r, r' di H con $P \in r$, $P' \in r'$, che si intersecano in un punto Q. Per $r = 2$, $\tau(Q)$ è una retta mentre nel punto Q passano due rette di H. Da qui l'assurdo.

Proviamo che:

VII. Se H è rigata, per ogni $P \in H$ l'iperpiano tangente $\tau(P)$ in P ad H incontra H in un cono proiettante da P una (n)-varietà $\widetilde{H}$ regolare non singolare di un $S_{r-2} \subset \tau(P)$ con $P \notin S_{r-2}$.

Dimostrazione. Sia $H' = \tau(P) \cap H$ ed ℓ una retta per P contenuta in H (e quindi in H'), esistente perchè H è rigata. Cominciamo a provare che H' è una (n)-varietà di $\tau(P)$, cioè che H' ammette una n-secante. Sia Q un punto appartenente ad $H - \tau(P)$, l'iperpiano $\tau(Q)$ tangente in Q ad H incontra ℓ in un punto P' ($\neq Q$). La retta QP' è contenuta in H (perchè passa per Q, appartiene a $\tau(Q)$ e ha due punti distinti in comune con H). L'iperpiano $\tau(P')$ non può allora coincidere con $\tau(P)$ (in quanto $QP' \subset \tau(P')$ e $Q \notin \tau(P)$). Esiste dunque una retta s per P' appartenente a $\tau(P)$ ma non a $\tau(P')$. La retta s (poichè passa per P' e non appartiene a $\tau(P')$) è n-secante H'. Dunque H' è una (n)-varietà di $\tau(P)$, regolare per la proposizione III. La H' ammette evidentemente P come punto singolare. Se ammettesse qualche altro punto P_1 singolare, la retta $t = PP_1$ sarebbe singolare per H' e quindi per ogni $T \in t$ risulterebbe $\tau(T) = \tau(P)$. Ma ciò è assurdo in quanto se $Q \in H - \tau(P)$, l'iperpiano $\tau(Q)$ incontrerebbe t in un punto P' ($\neq Q$), onde la retta QP' apparterrebbe ad H e quindi $\tau(P') = \tau(P)$ dovrebbe contenere la QP', onde $Q \in \tau(P)$. L'assurdo prova che H' ammette come spazio singolare il solo punto P. Dalla proposizione IV segue allora l'asserto.

Nel seguito supporremo, salvo esplicito avviso, che H sia rigata. Da VII segue:

VIII. Ogni iperpiano di $\mathbb{P}_{r,k}$ incontra H o in una (n)-varietà non singolare regolare ovvero è tangente ad H in un punto P e quindi incontra H in una (n)-varietà regolare che ha il solo punto P come punto singolare.

Sia $\mathscr{T}$ la famiglia degli iperpiani tangenti ad H. L'applicazione:

$$\tau\colon P \in H \longrightarrow \tau(P) \in \mathscr{T}, \tag{1.2}$$

per la proposizione VIII è biettiva. Inoltre evidentemente si ha:

$$Q \in \tau(P) \Leftrightarrow P \in \tau(Q), \qquad P, Q \in H. \tag{1.3}$$

Mostriamo che:

IX. Sia ℓ una retta di H, gli iperpiani $\tau(P)$, $P \in \ell$, costituiscono un fascio con asse un S_{r-2} contenente ℓ.

Dimostrazione. Siano P_1, P_2 due punti distinti di ℓ. L'S_{r-2} intersezione dei due iperpiani $\tau(P_1)$, $\tau(P_2)$ incontra H o in una (n)-varietà per la quale ℓ è costituita da punti singolari, ovvero in un sottospazio contenente ℓ. Ne segue che in ogni caso: $\forall P \in \ell$, $\tau(P) \supset S_{r-2}$. Se ne deduce l'asserto.

Se H non è rigata, cioè se è un (n)-ovoide ((n)-ovale per $r=2$), per ogni $P \in H$ si ha che $H \cap \mathcal{T}(P) = \{P\}$. Se H è rigata chiameremo cono tangente in P ad H il cono di vertice P dato da $\Gamma(P) = H \cap \mathcal{T}(P)$. Proviamo che:

X. Se H è rigata due suoi coni tangenti sono proiettivamente equivalenti.

Dimostrazione. Siano $P, P' \in H$ con $P' \notin \mathcal{T}(P)$, onde $P \notin \mathcal{T}(P')$. Si consideri l'$S_{r-2} = \mathcal{T}(P) \cap \mathcal{T}(P')$. Esso non passa nè per P nè per P'. Dunque $\Gamma(P) = H \cap \mathcal{T}(P)$ e $\Gamma(P') = H \cap \mathcal{T}(P')$ sono coni proiettanti rispettivamente da P e P' la stessa (n)-varietà regolare non singolare $\widetilde{H} = H \cap S_{r-2}$ e quindi $\Gamma(P)$ è proiettivamente equivalente a $\Gamma(P')$. Da ciò segue l'asserto.

2. - SPAZI MASSIMALI IN UNA (n)-VARIETA' REGOLARE NON SINGOLARE.

Osserviamo che in $\mathbb{P}_{1,k}$ una (n)-varietà è una (n)-pla di punti, gli spazi di dimensione massima sono allora i punti. In $\mathbb{P}_{2,k}$ una (n)-varietà regolare non singolare è una (n)-ovale (cfr. VI n. 1), gli spazi di dimensione massima sono allora i punti. Proveremo ora per induzione che:

I. Sia H una (n)-varietà regolare non singolare di $\mathbb{P}_{r,k}$. Denotato con m la massima dimensione degli spazi contenuti in H, si ha che ogni $S_d \subseteq H$ è contenuto in qualche S_m di H. Ne segue che la famiglia degli S_m contenuti in H è un ricoprimento di H ed inoltre essa coincide con la famiglia degli spazi massimali di H.

Dimostrazione. Per l'osservazione precedente l'asserto è vero per $r=1, 2$. Possiamo allora procedere per induzione rispetto ad r, supporre cioè $r \geq 3$, vero l'asserto per $r' \leq r-1$ e dimostrarlo per r. Supporremo inoltre $m \geq 1$, perchè per $m=0$ l'asserto è ovvio, essendo H un (n)-ovoide. Dato un $S_d \subset H$, si consideri un $S_m \subset H$. Se $S_d \subseteq S_m$ l'asserto è provato. Supponiamo dunque che S_d non sia contenuto in S_m. Esiste allora $P \in S_d - S_m$. L'iperpiano tangente $\tau(P)$ contiene l'S_d, ma non contiene l'S_m: altrimenti il cono $\Gamma(P) = H \cap \tau(P)$ dovrebbe contenere l'S_{m+1} congiungente P con l'S_m, onde $S_{m+1} \subset H$ e ciò è escluso essendo m la massima dimensione degli spazi contenuti in H. Consideriamo un S_{r-2} contenente l'$S_{m-1} = \tau(P) \cap S_m$, contenuto in $\tau(P)$ e non passante per P. Sia $\widetilde{H} = H \cap S_{r-2}$. Risulta $S_{m-1} \subset \widetilde{H}$; inoltre $\widetilde{H}$ è una (n)-varietà regolare non singolare dell'S_{r-2} e $\Gamma(P)$ è il cono proiettante $\widetilde{H}$ da P. $\widetilde{H}$ non contiene sottospazi di dimensione m (altrimenti $\Gamma(P)$ e quindi H conterrebbero degli S_{m+1}), quindi la dimensione massima degli spazi contenuti in $\widetilde{H}$ è $m-1$. Per l'induzione ammessa allora ogni sottospazio di $\widetilde{H}$ è contenuto in un S_{m-1} di $\widetilde{H}$. In particolare l'$S_{d-1} = S_{r-2} \cap S_d$ $(\subset \widetilde{H})$ è contenuto in un $\overline{S}_{m-1}$ di $\widetilde{H}$.

Ne segue che l'S_d è contenuto nell'$\overline{S}_m$ ($\subset H$) che congiunge P con l'$\overline{S}_{m-1}$. Si ha così l'asserto.

<u>II. Per una (n)-varietà regolare non singolare H in $\mathbb{P}_{r,k}$, denotato con m la massima dimensione dei sottospazi contenuti in H, risulta:</u>

$$\begin{cases} r = 2t+1 \Rightarrow m \leq t, \\ r = 2t \quad\quad \Rightarrow m \leq t-1. \end{cases} \tag{2.1}$$

<u>Dimostrazione.</u> Per l'osservazione precedente l'asserto è vero per $r=1$ $(t=0)$ ed $r=2$ $(t=1)$. Possiamo allora procedere per induzione rispetto ad r, supponendo $r \geq 3$ ed inoltre $m \geq 1$ (perchè per $m=0$ l'asserto è ovvio). Sia S_m un sottospazio contenuto in H e $P \in H - S_m$. L'iperpiano tangente $\tau(P)$ in P ad H incontra l'S_m in un S_{m-1} (non potendo l'S_m esser contenuto in $\tau(P)$ altrimenti H conterrebbe l'S_{m+1} congiungente P con l'S_m). Scelto in $\tau(P)$ un S_{r-2}, non per P, ma contenente S_{m-1}, sia $\widetilde{H} = H \cap S_{r-2}$. Essa è una (n)-varietà regolare non singolare di S_{r-2} contenente l'S_{m-1}, onde la dimensione massima degli spazi contenuti in $\widetilde{H}$ è $m-1$ (non potendo essere m altrimenti $\Gamma(P) = H \cap \tau(P)$ e quindi H conterrebbero un S_{m+1}). Per l'induzione ammessa si ha allora:

$$\begin{cases} r = 2t+1 \Rightarrow r-2 = 2(t-1)+1 \Rightarrow m-1 \leq t-1 \Rightarrow m \leq t, \\ r = 2t \quad\quad \Rightarrow r-2 = 2(t-1) \quad\quad\;\; \Rightarrow m-1 \leq t-2 \Rightarrow m \leq t-1, \end{cases}$$

onde l'asserto.

In $\mathbb{P}_{r,k}$ una (n)-varietà regolare non singolare H si dirà di tipo m se m è la massima dimensione dei sottospazi contenuti in H. Per la proposizione II, si ha:

$$
(2.2) \qquad \begin{cases} r = 2t+1 \Rightarrow m = 0, 1, 2, \dots, t, \\ r = 2t \qquad \Rightarrow m = 0, 1, 2, \dots, t-1. \end{cases}
$$

La H si dirà iperbolica o di tipo iperbolico se $m = t$ per $r = 2t+1$, ovvero $m = t-1$ per $r = 2t$. Proviamo che:

III. Se H è una (n)-varietà iperbolica di $\mathbb{P}_{2t+1,k}$ $(t \geq 1)$ per ogni $S_{t-1} \subset H$ passano esattamente n spazi S_t di H, che formano fascio (cioè appartengono ad un S_{t+1}).

Dimostrazione. L'asserto è vero per $t = 1$, in quanto in $\mathbb{P}_{3,k}$ per ogni punto P $(= S_o)$ di H, il piano tangente $\tau(P)$ incontra H in n rette per P (cfr. proposizione VII n. 1, e si tenga presente che attualmente $m = t = 1$), le quali sono le uniche rette di H per P. Possiamo allora procedere per induzione rispetto a t, supponendo $t \geq 2$. Si consideri un qualsiasi $\overline{S}_{t-1} \subset H$ e sia $P \in \overline{S}_{t-1}$. Il cono tangente $\Gamma(P) = H \cap \tau(P)$ contiene l' $\overline{S}_{t-1}$. Si scelga un $S_{2(t-1)+1}$ contenuto in $\tau(P)$ non per P e si ponga $\widetilde{H} = H \cap S_{2(t-1)+1}$. $\widetilde{H}$ è una (n)-varietà iperbolica di $S_{2(t-1)+1}$, perchè contiene gli S_{t-1} intersezione degli S_t di H per P con l'$S_{2(t-1)+1}$. Inoltre $\overline{S}_{t-2} = \overline{S}_{t-1} \cap S_{2(t-1)+1}$ è contenuto in $\widetilde{H}$. Per l'induzione ammessa in $\widetilde{H}$ esistono allora esattamente n spazi S_{t-1} per $\overline{S}_{t-2}$; inoltre essi appartengono ad uno stesso S_t cioè formano fascio. Proiettando da P tali n spazi S_{t-1} si ottengono n spazi S_t per $\overline{S}_{t-1}$ formanti fascio. Ne segue l'asserto.

3. - PROPRIETA' DELLE (n)-VARIETA' REGOLARI NON SINGOLARI, H, DI TIPO m IN $\mathbb{P}_{r,k}$.

Proviamo che:

I. *Sia H una (n)-varietà di tipo m di $\mathbb{P}_{r,k}$. Per ogni punto P di H il cono tangente $\Gamma(P) = H \cap \tau(P)$ proietta da P una (n)-varietà di tipo m-1 di un S_{r-2} contenuto in $\tau(P)$, non per P, $\widetilde{H} = H \cap S_{r-2}$.*

Dimostrazione. Per la proposizione I n. 2, per P passa qualche S_m contenuto in H e quindi contenuto in $\Gamma(P)$, onde $\widetilde{H} = H \cap S_{r-2}$ contiene l'$S_{m-1} = S_m \cap S_{r-2}$. D'altra parte $\widetilde{H}$ non può contenere degli $\overline{S}_m$, altrimenti l'S_{m+1} congiungente P con $\overline{S}_m$ apparterrebbe a $\Gamma(P)$ e quindi ad H (mentre m è la massima dimensione degli spazi contenuti in H). Ne segue che $\widetilde{H}$ è di tipo m-1, onde l'asserto.

II. *Se H è una (n)-varietà di tipo m di $\mathbb{P}_{2t+1,k}$ $(t \geq 1)$, esiste in $\mathbb{P}_{2t+1,k}$*

qualche $S_{2(t-m)+1}$ che incontra H in un (n)-ovoide.

Dimostrazione. Per la proposizione I esiste un $S_{2(t-1)+1}$ ($= S_{r-2}$, $r = 2t+1$) che incontra H in una (n)-varietà $\tilde{H}_1$ di tipo m-1. Applicando la proposizione I ad $\tilde{H}_1$ ($\subseteq S_{2(t-1)+1}$) si ha che esiste un $S_{2(t-2)+1}$ che incontra $\tilde{H}_1$ e quindi H in una (n)-varietà $\tilde{H}_2$ di tipo m-2. Così procedendo dopo i passi si ha che esiste un $S_{2(t-i)+1}$ che incontra H in una (n)-varietà $\tilde{H}_i$ di tipo m-i ($i = 1, 2, \dots, m$). Per i = m si ha allora che esiste un $S_{2(t-m)+1}$ che incontra H in una (n)-varietà di tipo 0 cioè in un (n)-ovoide. Si ha così l'asserto.

In modo del tutto analogo alla proposizione II si prova che:

III. Se H è una (n)-varietà di tipo m di $\mathbb{P}_{2t,k}$ ($t \geq 2$), esiste in $\mathbb{P}_{2t,k}$ un $S_{2(t-m)}$ che incontra H in un (n)-ovoide ((n)-ovale se $m = t-1$).

Poichè un (n)-ovoide $\mathcal{O}$ di $\mathbb{P}_{r,k}$ con $r \geq 3$ possiede rette esterne (perchè $\mathcal{O} \cap \tau(P) = \{P\}$, $\forall P \in \mathcal{O}$), dalle proposizioni II, III e II n. 2, si ha:

IV. Ogni (n)-varietà H di tipo m di $\mathbb{P}_{r,k}$, priva di rette esterne, è di tipo iperbolico, cioè $m = t$ se $r = 2t+1$, $m = t-1$ se $r = 2t$.

Dalla proposizione IV come corollario si ha:

V. Se k è un campo algebricamente chiuso ogni quadrica non singolare è di tipo iperbolico. Se k è finito, $k = GF(q)$, in $PG(r, q)$ ogni varietà hermitiana non singolare è di tipo iperbolico (q quadrato).

Osservato che se $\mathcal{O}$ è un (n)-ovoide di $\mathbb{P}_{r,k}$ ogni sottospazio $S_{r'}$ di $\mathbb{P}_{r,k}$, tale che $|\mathcal{O} \cap S_{r'}| \geq 2$, incontra $\mathcal{O}$ in un (n)-ovoide e quindi, se in $\mathbb{P}_{r',k}$ non esistono (n)-ovoidi, in ogni $\mathbb{P}_{r,k}$ con $r \geq r'$ non esistono (n)-ovoidi, dalle proposizioni II, III e II n. 2, si ha:

VI. Se il campo k è tale che in $\mathbb{P}_{3,k}$ non esistono (n)-ovoidi, allora ogni (n)-varietà (regolare non singolare) di $\mathbb{P}_{r,k}$ è di tipo iperbolico.

VII. Se il campo k è tale che in $\mathbb{P}_{4,k}$ non esistono (n)-ovoidi, allora ogni (n)-varietà di tipo m di $\mathbb{P}_{r,k}$, con $r \geq 3$ e $r = 2t$ o $r = 2t+1$, è tale che $m = t-1$ ovvero $m = t$ (se $r = 2t+1$).

Proviamo infine che:

VIII. Se il campo k è tale che in $\mathbb{P}_{2,k}$ ogni conica non degenere ha qualche punto a coordinate in k, allora ogni quadrica non singolare di $\mathbb{P}_{r,k}$ con $r \geq 3$ e $r = 2t$ o $r = 2t+1$, è di tipo $m = t-1$ ovvero $m = t$ (se $r = 2t+1$).

Dimostrazione. Sia $\mathcal{O}$ un (2)-ovoide di $\mathbb{P}_{4,k}$ che sia una quadrica. Se $P, Q \in \mathcal{O}$, con $P \neq Q$, gli iperpiani $\tau(P)$ e $\tau(Q)$ s'incontrano in un piano π tale che $\pi \cap \mathcal{O} = \emptyset$. D'altra parte $\pi \cap \mathcal{O}$ è una conica non degenere e quindi per l'ipotesi fatta è $\pi \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Ne segue che in $\mathbb{P}_{4,k}$ non esistono quadriche che siano (2)-ovoidi e quindi anche in $\mathbb{P}_{r,k}$, con $r \geq 4$, non esistono quadriche che siano ovoidi. Dalle proposizioni II, III e II n. 2, segue allora l'asserto.

4. - SULLE (n)-VARIETA' REGOLARI NON SINGOLARI IN UNO SPAZIO DI GALOIS PG(r, q).

Cominciamo a provare che:

I. In PG(3, q) ogni (n)-ovoide $\mathcal{O}$ è tale che n= 2, non ammette piani esterni e per ogni retta esterna passano due piani tangenti.

Dimostrazione. Sia ℓ una retta esterna ad $\mathcal{O}$ ed u, v rispettivamente il numero dei piani per ℓ tangenti ed esterni ad $\mathcal{O}$. I rimanenti q+1-(u+v) piani per ℓ incontrano ciascuno $\mathcal{O}$ in una (n)-ovale e quindi in q(n-1)+1 punti. D'altra parte si ha (essendo le n-secanti $\mathcal{O}$ per un punto P di $\mathcal{O}$ in numero di q^2, le altre q+1 rette risultando tangenti in P ad $\mathcal{O}$):

$$|\mathcal{O}| = q^2(n-1) + 1. \tag{4.1}$$

Deve allora aversi (pensando i punti di $\mathcal{O}$ distribuiti sui piani per ℓ):

$$|\mathcal{O}| = q^2(n-1) + 1 = (q+1-(u+v))(q(n-1)+1) + u ,$$

da cui:

$$v = q\,[n-(u+v)(n-1)]. \tag{4.2}$$

Risulta $0 \leq v < q$ (se fosse v = q+1 sarebbe $\mathcal{O} = \emptyset$, se fosse v=q sarebbe $|\mathcal{O}| = q(n-1)+1$ e ciò è escluso dalla (4. 1)). Dalla (4. 2) allora segue che deve essere $0 \leq n-(u+v)(n-1) < 1$ e quindi:

$$n-(u+v)(n-1) = 0 \Rightarrow v = 0\ ,\ n-u(n-1) = 0 \Rightarrow v = 0\ ,\ u = \frac{n}{n-1} \Rightarrow v = 0\ ,\ n = 2,$$

onde l'asserto.

<u>II.</u> <u>In PG(4, q) non esistono (2)-ovoidi.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Sia $\mathcal{O}$ un (2)-ovoide di PG(4, q). Risulta:

$$|\mathcal{O}| = q^3 + 1. \tag{4.3}$$

Inoltre ogni iperpiano, S_3, incontra $\mathcal{O}$ o in un sol punto P (iperpiano tangente in P ad $\mathcal{O}$), o in un (2)-ovoide dell'S_3, ovvero nel vuoto. Siano P, $Q \in \mathcal{O}$, con $P \neq Q$, il piano $S_2 = \tau(P) \cap \tau(Q)$ è ad intersezione vuota con $\mathcal{O}$ (perchè $P \notin S_2$ e $Q \notin S_2$), onde ogni S_3 per S_2 non può incontrare $\mathcal{O}$ in un (2)-ovoide (cfr. proposizione I) e quindi incontra $\mathcal{O}$ o in un sol punto ovvero nel vuoto. Pensando i punti di $\mathcal{O}$ distribuiti sugli S_3 per l'S_2 si ha allora:

$$|\mathcal{O}| \leq q + 1,$$

ma ciò è in contrasto con la (4. 3). Si ha così l'asserto.

Dalle proposizioni I e VI n. 3, segue che:

III. In $PG(r, q)$, $r \geq 3$, ogni (n)-varietà (regolare non singolare) con $n \geq 3$ è di tipo iperbolico (cioè gli spazi massimali S_m hanno dimensione $m = t-1$ se $r = 2t$, $m = t$ se $r = 2t+1$).

Dalle proposizioni II e VII n. 3, si ha che:

IV. In $PG(r, q)$, $r \geq 2$, ogni (2)-varietà (regolare non singolare) o è di tipo iperbolico, ovvero è di tipo $m = t-1$ se $r = 2t+1$.

Denotiamo con $H = H^m_{r,n,q}$ una (n)-varietà regolare non singolare di tipo m di $PG(r, q)$, $r \geq 1$ (onde, per le proposizioni III e IV, se $n \geq 3$ risulta $m = t-1$ se $r = 2t$ o $m = t$ se $r = 2t+1$, se $n = 2$ risulta $m = t-1$ se $r = 2t$ ovvero $m = t$ o $m = t-1$ se $r = 2t+1$). Se $P \in H$ si ha:

$$|\tau(P) \cap H| = q\,|H^{m-1}_{r-2,n,q}| + 1,$$

inoltre ciascuna delle q^{r-1} rette per P non appartenenti a $\tau(P)$ è n-secante H. Dunque risulta:

$$|H^m_{r,n,q}| = q^{r-1}(n-1) + q\,|H^{m-1}_{r-2,n,q}| + 1. \tag{4.4}$$

Se $r = 2t$, in forza delle proposizioni III e IV, H è necessariamente iperbolica cioè $m = t-1$. Da (4.4) si ha allora:

$$|H^{t-1}_{2t,n,q}| = q^{2t-1}(n-1) + q\,|H^{t-2}_{2(t-1),n,q}| + 1. \tag{4.5}$$

Porremo qui e nel seguito:

$$\vartheta_s = \sum_{i=0}^{s} q^i . \tag{4.6}$$

Proviamo che:

<u>V.</u> <u>In PG(2t, q) per ogni (n)-varietà (regolare non singolare) H si ha:</u>

$$|H| = (q^t(n-1)+1)\vartheta_{t-1}. \tag{4.7}$$

<u>In particolare per una quadrica $\mathcal{Q}$ non singolare risulta:</u>

$$|\mathcal{Q}| = \vartheta_{2t-1}, \tag{4.8}$$

<u>per una varietà hermitiana non singolare $\mathcal{H}$ risulta $(n = \sqrt{q}+1)$:</u>

$$|\mathcal{H}| = (q^t\sqrt{q}+1)\vartheta_{t-1}. \tag{4.9}$$

<u>Dimostrazione.</u> In PG(2, q) una (n)-ovale H è tale che $|H| = q(n-1)+1$, dunque la (4.7) è vera per t= 1. Possiamo allora procedere per induzione rispetto a t, supponendo $t \geq 2$. Per l'induzione risulta:

$$|H^{t-2}_{2(t-1),n,q}| = (q^{t-1}(n-1)+1)\vartheta_{t-2}.$$

Dalla (4.5) si ha allora:

$$|H^{t-1}_{2t,n,q}| = q^{2t-1}(n-1) + q[q^{t-1}(n-1)+1]\vartheta_{t-2} + 1 = q^t(n-1)[q^{t-1}+\vartheta_{t-2}] +$$
$$+ q\vartheta_{t-2} + 1 = (q^t(n-1)+1)\vartheta_{t-1},$$

onde l'asserto.

VI. In $PG(2t, q)$ per ogni (n)-varietà (regolare non singolare) H, denotato con M_t il numero degli spazi massimali, S_{t-1}, di H, si ha:

$$(4.10) \qquad M_t = \prod_{i=1}^{t} (q^i(n-1)+1).$$

In particolare per una quadrica $\mathscr{Q}$ non singolare si ha:

$$(4.11) \qquad M_t(\mathscr{Q}) = \prod_{i=1}^{t} (q^i+1),$$

per una varietà hermitiana non singolare $\mathscr{H}$ si ha ($n = \sqrt{q}+1$):

$$(4.12) \qquad M_t(\mathscr{H}) = \prod_{i=1}^{t} (q^i\sqrt{q}+1).$$

Dimostrazione. Computando nei due modi possibili le coppie (P, S_{t-1}), ove S_{t-1} è uno spazio massimale di H e $P \in S_{t-1}$, si ha:

$$(4.13) \qquad M_t \vartheta_{t-1} = |H| M_{t-1}$$

(tenuto conto che gli spazi massimali di H per $P \in H$ appartengono tutti a $\tau(P)$ e quindi sono tanti quanti gli spazi massimali di una (n)-varietà regolare non singolare di un $PG(2(t-1), q)$, cfr. proposizioni VII n. 1 e I n. 3). Dalle (4.7), (4.13) si ha:

$$M_t = M_{t-1}(q^t(n-1)+1).$$

Da ciò per induzione si ricava la (4.10).

Supponiamo ora $r = 2t+1$ e che H sia iperbolica, cioè $m = t$. Dalla (4.4) si ha allora:

$$|H^t_{2t+1,n,q}| = q^{2t}(n-1) + q\,|H^{t-1}_{2(t-1)+1,n,q}| + 1. \tag{4.14}$$

Proviamo che:

<u>VII. In PG(2t+1, q) per ogni (n)-varietà (regolare non singolare) H di tipo iperbolico (m = t) si ha:</u>

$$|H| = |H^t_{2t+1,n,q}| = (q^t(n-1)+1)\,\vartheta_t. \tag{4.15}$$

<u>In particolare per una quadrica $\mathscr{Q}$ iperbolica risulta:</u>

$$|\mathscr{Q}| = \vartheta_{2t} + q^t, \tag{4.16}$$

<u>per una varietà hermitiana non singolare $\mathscr{H}$ risulta:</u>

$$|\mathscr{H}| = (q^t\sqrt{q}+1)\,\vartheta_t. \tag{4.17}$$

<u>Dimostrazione.</u> La (4.15) è vera per $t = 0$, procediamo dunque per induzione rispetto a t, supponendo $t \geq 1$. Per l'induzione si ha:

$$|H^{t-1}_{2(t-1)+1,n,q}| = (q^{t-1}(n-1)+1)\,\vartheta_{t-1}.$$

Dalla (4.14) si ha allora:

$$|H| = |H^t_{2t+1,n,q}| = q^{2t}(n-1) + q(q^{t-1}(n-1)+1)\vartheta_{t-1} + 1 = q^t(n-1)(q^t + \vartheta_{t-1}) +$$
$$+ q\vartheta_{t-1} + 1 = (q^t(n-1)+1)\vartheta_t ,$$

cioè l'asserto.

VIII. In $PG(2t+1, q)$ per ogni (n)-varietà (regolare non singolare) H di tipo iperbolico ($m = t$), denotato con M_t il numero degli spazi massimali, S_t, di H si ha:

$$M_t = \prod_{i=0}^{t} (q^i(n-1)+1). \tag{4.18}$$

In particolare per una quadrica iperbolica $\mathcal{Q}$ risulta:

$$M_t(\mathcal{Q}) = \prod_{i=0}^{t} (q^i+1), \tag{4.19}$$

per una varietà hermitiana non singolare $\mathcal{H}$ risulta:

$$M_t(\mathcal{H}) = \prod_{i=0}^{t} (q^i\sqrt{q} + 1) . \tag{4.20}$$

Dimostrazione. Analoga a quella della proposizione VI.

Ci rimane da esaminare il caso $r = 2t+1$ e che H sia una (2)-varietà di tipo $m = t-1$ (cfr. proposizioni III e IV). Dalla (4.4) si ha allora:

$$|H^{t-1}_{2t+1,2,q}| = q^{2t} + q|H^{t-2}_{2(t-1)+1,2,q}| + 1. \tag{4.21}$$

Proviamo che:

IX. In PG(2t+1, q) per ogni (2)-varietà (regolare non singolare) H di tipo m = t-1 si ha:

$$|H| = |H^{t-1}_{2t+1,\,2,\,q}| = \vartheta_{2t} - q^t = \vartheta_{t-1}(q^{t+1}+1). \tag{4.22}$$

Dimostrazione. La (4.22) è vera per t=1 (in quanto in PG(3, q) per un (2)-ovoide $H = H^0_{3,\,2,\,q}$ si ha $|H^0_{3,\,2,\,q}| = q^2+1$). Possiamo dunque procedere per induzione rispetto a t, supponendo $t \geq 2$. Per l'induzione, si ha:

$$|H^{t-2}_{2(t-1)+1,\,2,\,q}| = \vartheta_{2(t-1)} - q^{t-1}.$$

Dalla (4.21) si ottiene allora:

$$|H^{t-1}_{2t+1,\,2,\,q}| = q^{2t} + q(\vartheta_{2(t-1)} - q^{t-1}) + 1 = \vartheta_{2t} - q^t,$$

cioè l'asserto.

X. In PG(2t+1, q) per ogni (2)-varietà (regolare non singolare) H di tipo m = t-1, denotato con M_t il numero degli spazi massimali, S_{t-1}, di H si ha:

$$M_t = \prod_{i=2}^{t+1} (q^i+1). \tag{4.23}$$

Dimostrazione. Analoga a quella della proposizione VI.

5. - PROPRIETA' DEGLI SPAZI MASSIMALI DI UNA (n)-VARIETA' REGOLARE NON SINGOLARE DI TIPO m DI $\mathbb{P}_{r,k}$ ($m \leq [(r-1)/2]$).

Proviamo che:

I. Sia H una (n)-varietà di tipo m di $\mathbb{P}_{r,k}$. Dato comunque uno spazio massimale S_m di H, per ogni $P \in H - S_m$ esiste uno spazio massimale S'_m di H, sghembo con S_m, passante per P.

Dimostrazione. L'asserto è vero per $r = 1$ e $r = 2$. Possiamo dunque procedere per induzione rispetto ad r, supponendo $r \geq 3$. Esiste certamente un punto Q di S_m tale che la retta QP non appartenga ad H (altrimenti l'S_{m+1} congiungente P con l'S_m apparterrebbe ad H). Poichè $Q \in S_m$ sarà $S_m \subseteq \tau(Q)$. Inoltre $\tau(P) \cap \tau(Q) = S_{r-2}$ non passa nè per P nè per Q (perchè la retta QP è n-secante H). Sia $\tilde{H} = H \cap S_{r-2}$. Risulta $S_{m-1} = S_m \cap S_{r-2} \subseteq \tilde{H}$. Poichè $\tilde{H}$ è una (n)-varietà di tipo m-1 di S_{r-2}, per l'induzione, esisterà un S'_{m-1} di $\tilde{H}$ sghembo con S_{m-1}. Allora l'S'_m congiungente S'_{m-1} con P appartiene ad H ed è sghembo con S_m, onde l'asserto.

II. Sia H una (n)-varietà di tipo m di $\mathbb{P}_{r,k}$. Dato comunque in H uno spazio massimale S_m ed un sottospazio $\overline{S}_d$ di S_m, esiste uno spazio massimale S'_m di H tale che $\overline{S}_d = S_m \cap S'_m$. Ne segue che per ogni $d \leq m$ esistono due spazi massimali di H che s'intersecano in un S_d.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente possiamo supporre $d \geq 0$. L'asserto è vero per $r=1$, $r=2$. Possiamo allora procedere per induzione rispetto ad r, supponendo $r \geq 3$. Sia $P \in \overline{S}_d$ $(\subseteq S_m)$, risulterà che $\overline{S}_d \subseteq S_m \subseteq \tau(P)$. Si consideri un S_{r-2} non per P contenuto in $\tau(P)$ e sia $\widetilde{H} = H \cap S_{r-2}$. Risulta:

$$\overline{S}_{d-1} = \overline{S}_d \cap S_{r-2} \subseteq S_{m-1} = S_m \cap S_{r-2} \subseteq \widetilde{H}.$$

Poichè $\widetilde{H}$ è una (n)-varietà di tipo $m-1$ di S_{r-2}, per l'induzione, relativamente agli spazi S_{m-1} $(\subseteq \widetilde{H})$ e $\overline{S}_{d-1}$ $(\subseteq S_{m-1})$, esisterà uno spazio massimale S'_{m-1} di $\widetilde{H}$ tale che $\overline{S}_{d-1} = S_{m-1} \cap S'_{m-1}$. Ma allora lo spazio S'_m congiungente P con l'S'_{m-1} è contenuto in H ed interseca l'S_m nell'$\overline{S}_d$, cioè $\overline{S}_d = S_m \cap S'_m$. Si ha così l'asserto.

6. - I DUE SISTEMI DI SPAZI MASSIMALI DI UNA (2)-VARIETA' DI TIPO IPERBOLICO H DI $\mathbb{P}_{2t+1,k}$.

Osserviamo che qualsiasi sia il campo k in $\mathbb{P}_{r,k}$ esistono sempre (2)-varietà (regolari non singolari) di tipo iperbolico. Infatti se $r = 2t+1$ la quadrica di equazione:

(6.1) $$x_0x_1 + x_2x_3 + \ldots + x_{2t}x_{2t+1} = 0$$

è una (2)-varietà regolare non singolare che ammette come spazi massimali degli S_t (in quanto $x_0 = x_2 = \ldots = x_{2t} = 0$ è un S_t soddisfacente la (6.1)) e quindi è di tipo iperbolico. Se $r = 2t$ la quadrica:

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \ldots + x_{2t-2}x_{2t-1} + x_{2t}^2 = 0 \tag{6.2}$$

è una (2)-varietà regolare non singolare che ammette come spazi massimali degli S_{t-1} (in quanto $x_0 = x_2 = \ldots = x_{2t-2} = x_{2t} = 0$ è un S_{t-1} che soddisfa la (6.2)).

Cominciamo a provare che:

I. <u>Una (2)-varietà regolare non singolare H di $\mathbb{P}_{3,k}$ rigata è una quadrica iperbolica.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Sia ℓ una retta di H e P_1, P_2, P_3 tre suoi punti distinti. Il piano $\tau(P_i)$ incontra H in ℓ ed in una retta ℓ_i ($\neq \ell$) per P_i. Le rette ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sono a due a due sghembe tra loro (altrimenti H conterrebbe un piano e quindi sarebbe singolare). Ogni retta s incidente ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, avendo tre punti distinti in comune con H, appartiene ad H. Quindi H contiene la quadrica iperbolica $\mathcal{Q}$ costituita dalle rette incidenti ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3:

$$\mathcal{Q} \subseteq H. \tag{6.3}$$

Sia $X \in H - \tau(P_1)$. La retta XP_1 è secante $\mathcal{Q}$ in P_1 ed in un altro punto Y. Il punto Y, appartenendo alla quadrica $\mathcal{Q}$, risulta contenuto in H (cfr. (6.3)). Se fosse $X \neq Y$ la retta XP_1 avrebbe tre punti distinti in comune con H (i punti X, Y, P_1) onde sarebbe contenuta in H, ma allora dovrebbe appartenere a $\tau(P_1)$ e ciò è escluso. Dunque $X = Y \in \mathcal{Q}$. Ne segue che $H \subseteq \mathcal{Q}$ e quindi per la (6.3) $H = \mathcal{Q}$. Si ha così l'asserto.

Nel seguito di questo numero ci occuperemo degli spazi massimali, S_t, di una (2)-varietà iperbolica H di $\mathbb{P}_{2t+1,k}$. Proviamo che:

II. Siano S'_t e S''_t due spazi massimali di H e sia $S_d = S'_t \cap S''_t$. Per ogni spazio massimale S_t di H, sia $S'_{d_1} = S_t \cap S'_t$ e $S''_{d_2} = S_t \cap S''_t$. Se $d \equiv t \bmod 2$ risulta $d_1 \equiv d_2 \bmod 2$ (cioè se d e t hanno la stessa parità, ciò accade anche per d_1 e d_2), se $d \not\equiv t \bmod 2$ risulta $d_1 \not\equiv d_2 \bmod 2$ (cioè se d e t hanno parità diverse, ciò accade anche per d_1 e d_2). Ne segue per esempio che se t è pari non esistono tre spazi massimali di H a due a due sghembi tra loro.

Dimostrazione. L'asserto è vero per $t=1$ (cfr. proposizione I). Possiamo dunque procedere per induzione rispetto a t, supponendo $t \geq 2$.

Cominciamo a provare l'asserto per $d \geq 0$. Se lo spazio massimale S_t di H passa per l'$S_d = S'_t \cap S''_t$, fissato un punto $P \in S_d$, l'iperpiano $\tau(P)$ contiene S'_t, S''_t, S_t. Scelto un S_{2t-1} di $\tau(P)$ non per P, sia $\widetilde{H} = H \cap S_{2t-1}$. Si ha allora che $S'_{t-1} = S'_t \cap S_{2t-1}$, $S''_{t-1} = S''_t \cap S_{2t-1}$, $S_{t-1} = S_t \cap S_{2t-1}$ sono spazi massimali di $\widetilde{H}$, inoltre risulta $S'_{t-1} \cap S''_{t-1} = S_d \cap S_{2t-1} = S_{d-1}$, $S_{t-1} \cap S'_{t-1} = S'_{d_1} \cap S_{2t-1} = S'_{d_1-1}$, $S_{t-1} \cap S''_{t-1} = S''_{d_2} \cap S_{2t-1} = S''_{d_2-1}$ (tenuto conto che $P \in S'_{d_1}$

e $P \in S''_{d_2}$). Ma $\widetilde{H}$ è una (2)-varietà iperbolica di S_{2t-1}, quindi per l'induzione si ha che se $d-1 \equiv t-1 \mod 2$ allora $d_1-1 \equiv d_2-1 \mod 2$, cioè se $d \equiv t \mod 2$ risulta $d_1 \equiv d_2 \mod 2$; se invece $d-1 \not\equiv t-1 \mod 2$ allora $d_1-1 \not\equiv d_2-1 \mod 2$, cioè se $d \not\equiv t \mod 2$ risulta $d_1 \not\equiv d_2 \mod 2$, onde l'asserto se S_t passa per l'S_d.

Se l'S_t non passa per l'S_d, scelto $P \in S_d - S_t$, l'iperpiano $\tau(P)$ contiene S'_t ed S''_t ma non l'S_t (perchè se $S_t \subseteq \tau(P)$, l'S_{t+1} congiungente P con S_t apparterrebbe ad H e ciò è escluso). Sia $S_{t-1} = S_t \cap \tau(P)$, sarà allora (essendo $S'_t \subseteq \tau(P)$ e $S''_t \subseteq \tau(P)$):

$$(6.4) \qquad \begin{cases} S'_{d_1} = S_t \cap S'_t = S_{t-1} \cap S'_t\,, \\ S''_{d_2} = S_t \cap S''_t = S_{t-1} \cap S''_t\,. \end{cases}$$

Si scelga in $\tau(P)$ un S_{2t-1} non per P ma <u>passante</u> per l'S_{t-1} e sia $\widetilde{H} = H \cap S_{2t-1}$. Dalla (6.4) si ha:

$$(6.5) \qquad S'_{d_1} = S_t \cap S'_t \subseteq S_{2t-1}\,, \qquad S''_{d_2} = S_t \cap S''_t \subseteq S_{2t-1}\,.$$

Si ha allora che S_{t-1}, $S'_{t-1} = S'_t \cap S_{2t-1}$, $S''_{t-1} = S''_t \cap S_{2t-1}$ sono spazi massimali di $\widetilde{H}$, inoltre risulta: $S'_{t-1} \cap S''_{t-1} = S'_t \cap S''_t \cap S_{2t-1} = S_d \cap S_{2t-1} = S_{d-1}$ ed infine:

$$S_{t-1} \cap S'_{t-1} = S'_{d_1}\,, \qquad S_{t-1} \cap S''_{t-1} = S''_{d_2}$$

(infatti dalle (6.4) e (6.5) si ha: $S_{t-1} \cap S'_{t-1} = S_{t-1} \cap S'_t \cap S_{2t-1} = S'_{d_1} \cap S_{2t-1} =$

$= S'_{d_1}$, analogamente $S_{t-1} \cap S''_{t-1} = S''_{d_2}$). Essendo $\widetilde{H}$ una (2)-varietà iperbolica di S_{2t-1}, per l'induzione otteniamo che se $d-1 \equiv t-1 \mod 2$ allora $d_1 \equiv d_2 \mod 2$, cioè se $d \equiv t \mod 2$ risulta $d_1 \equiv d_2 \mod 2$; se invece $d-1 \not\equiv t-1 \mod 2$ allora $d_1 \not\equiv d_2 \mod 2$, cioè se $d \not\equiv t \mod 2$ risulta $d_1 \not\equiv d_2 \mod 2$. Si ha così l'asserto per $d \geq 0$.

Ci rimane da provare l'asserto nel caso che S'_t ed S''_t siano sghembi. Si scelga un S_{t-1} in S'_t. Per la proposizione III n. 2, esiste uno spazio massimale $\overline{S}_t$ di H per l'S_{t-1} con $\overline{S}_t \neq S'_t$. Poichè $S'_t \cap \overline{S}_t = S_{t-1}$ ed è $t-1 \geq 0$, per quanto abbiamo precedentemente provato, relativamente agli spazi S'_t, $\overline{S}_t$ e S''_t si ha che $S''_t \cap S'_t$ e $S''_t \cap \overline{S}_t$ s'incontrano in spazi le cui dimensioni hanno parità diverse (perchè $t-1$ ha parità diversa da t). Ma $S''_t \cap S'_t = S_{-1} = \emptyset$ dunque $\dim(S''_t \cap \overline{S}_t)$ è pari, cioè:

$$S''_t \cap \overline{S}_t = S_{2d} .$$

Consideriamo ora un qualsiasi spazio massimale S_t di H e sia $S'_{d_1} = S_t \cap S'_t$, $S''_{d_2} = S_t \cap S''_t$. Relativamente agli spazi S'_t, $\overline{S}_t$ ed S_t, poichè $S'_t \cap \overline{S}_t = S_{t-1}$ e $t-1 \not\equiv t \mod 2$, per quanto precedentemente provato (essendo $t-1 \geq 0$), dovrà aversi:

$$d_1 = \dim(S_t \cap S'_t) \not\equiv \dim(S_t \cap \overline{S}_t) \mod 2. \tag{6.6}$$

Relativamente agli spazi S''_t, $\overline{S}_t$ e S_t, poichè $S''_t \cap \overline{S}_t = S_{2d}$ (essendo $2d \geq 0$), si ha che:

$$\begin{cases} t \text{ pari (cioè } 2d \equiv t \bmod 2) \Rightarrow d_2 \equiv \dim(S_t \cap \bar{S}_t) \bmod 2, \\ t \text{ dispari (cioè } 2d \not\equiv t \bmod 2) \Rightarrow d_2 \not\equiv \dim(S_t \cap \bar{S}_t) \bmod 2, \end{cases}$$

e quindi per la (6.6):

$$(6.7) \qquad \begin{cases} t \text{ pari} \Rightarrow d_2 \not\equiv d_1 \bmod 2\,, \\ t \text{ dispari} \Rightarrow d_2 \equiv d_1 \bmod 2\,. \end{cases}$$

Ne segue completamente l'asserto.

Sia $\mathscr{S}$ la famiglia degli spazi massimali, S_t, di H. In $\mathscr{S}$ consideriamo la seguente relazione ϱ:

$$(6.8) \qquad S_t', S_t'' \in \mathscr{S}, \quad S_t' \,\varrho\, S_t'' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \dim(S_t' \cap S_t'') \equiv t \bmod 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \dim(S_t' \cap S_t'') \text{ e } t \text{ hanno la stessa parità.}$$

La ϱ è evidentemente riflessiva e simmetrica. Proviamo che è transitiva. Dalla proposizione II segue che:

$$S_t' \,\varrho\, S_t'', \quad S_t'' \,\varrho\, S_t''' \Leftrightarrow \dim(S_t' \cap S_t'') \equiv t \bmod 2, \quad \dim(S_t'' \cap S_t''') \equiv t \bmod 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim(S_t'' \cap S_t') \equiv \dim(S_t'' \cap S_t''') \bmod 2 \Rightarrow \dim(S_t' \cap S_t''') \equiv t \bmod 2 \Rightarrow S_t' \,\varrho\, S_t''',$$

cioè la transitività di ϱ. Dunque la ϱ è una <u>relazione di equivalenza</u> in $\mathscr{S}$.

Proviamo che:

III. Le classi di equivalenza della relazione ϱ data dalla (6.8) in $\mathscr{S}$ sono esattamente due, $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$. Si ha che gli spazi di una stessa classe s'intersecano a due a due tra loro in spazi le cui dimensioni hanno la stessa parità di t, mentre spazi di classi diverse s'intersecano a due a due tra loro in spazi le cui dimensioni hanno parità diversa da quella di t. Inoltre per ogni $S_{t-1} \subset H$ passa uno ed un solo spazio $S'_t \in \mathscr{S}_1$ ed uno ed un solo spazio $S''_t \in \mathscr{S}_2$ (cfr. proposizione III n. 2). Infine per ogni $P \in H$, fissato un S_{r-2} di $\tau(P)$, con $P \notin S_{r-2}$, e posto $\tilde{H} = S_{r-2} \cap H$, i due sistemi $\tilde{\mathscr{S}}_1$ e $\tilde{\mathscr{S}}_2$ di spazi massimali, S_{t-1}, di $\tilde{H}$, proiettati da P danno origine ai due sistemi di spazi massimali di H per P (cioè agli spazi di $\mathscr{S}_1$ per P e agli spazi di $\mathscr{S}_2$ per P).

Dimostrazione. Esistono certamente due spazi $S^1_t, S^2_t \in \mathscr{S}$ che non siano in relazione ϱ tra loro (cfr. proposizione II n. 5), per essi dunque risulta:

$$\dim(S^1_t \cap S^2_t) \not\equiv t \bmod 2. \tag{6.9}$$

Siano $\mathscr{S}_1$ ed $\mathscr{S}_2$ le classi di equivalenza (distinte) determinate da S^1_t e da S^2_t. In forza della proposizione II e della (6.9) si ha allora che per ogni S_t appartenente ad $\mathscr{S}$ risulta:

$$\dim(S_t \cap S^1_t) \not\equiv \dim(S_t \cap S^2_t) \bmod 2$$

e quindi o è $\dim(S_t \cap S^1_t) \equiv t \bmod 2$, cioè $S_t \,\varrho\, S^1_t$, ossia $S_t \in \mathscr{S}_1$; ovvero è $\dim(S_t \cap S^2_t) \equiv t \bmod 2$, cioè $S_t \,\varrho\, S^2_t$, ossia $S_t \in \mathscr{S}_2$. Ne segue l'asserto.

7. - CARATTERIZZAZIONI DELLE (n)-VARIETA' REGOLARI DI PG(r, q) ($n \geq 3$) COME VARIETA' HERMITIANE.

E' stato provato da M.Tallini Scafati ("Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un $S_{r,q}$", Rend.Mat.Roma,(3-4) 26,(1967),273-303) che:

I. In PG(r, q) ($r \geq 3$) una (n)-varietà H non singolare priva di rette esterne, con $n \neq q/2 + 1$, è una varietà hermitiana non singolare ed allora q è un quadrato, H è regolare ed $n = \sqrt{q} + 1$.

Inoltre A. Barlotti ha provato che ("Una caratterizzazione grafica delle ipersuperficie hermitiane non singolari in uno spazio lineare finito di ordine quattro", Le matematiche, 21, (1966), 387-395):

II. In PG(r, 4), $r \geq 3$, una (3)-varietà regolare non singolare priva di rette esterne è una varietà hermitiana non singolare.

Proviamo che:

III. In PG(r, q), $r \geq 4$, ogni (n)-varietà H regolare non singolare, con $n \geq 3$, è una varietà hermitiana non singolare ($n \neq q/2 + 1$).

Dimostrazione. In forza dei teoremi I, II, basta mostrare che una (n)-varietà regolare non singolare di PG(r, q), con $r \geq 4$ e $n \geq 3$, non ammette rette esterne.

Sia dunque H una (n)-varietà regolare non singolare di PG(r, q), con $r \geq 4$ e $n \geq 3$. Sia α un piano di PG(r, q). Mostriamo che:

(7, 1) $$\alpha \cap H \neq \emptyset .$$

Se $\alpha \cap H = \emptyset$, sia $P \in \alpha$, non può accadere che ogni retta per P incontri H al più in un punto, altrimenti si avrebbe:

(7, 2) $$|H| \leq \vartheta_{r-1} - \vartheta_1 = q^2\, \vartheta_{r-3} ;$$

d'altra parte risulta (cfr. (4, 7), (4, 15)):

(7, 3) $$\begin{cases} r = 2t, & |H| = (q^t(n-1)+1)\,\vartheta_{t-1}, \\ r = 2t+1, & |H| = (q^t(n-1)+1)\,\vartheta_t, \end{cases}$$

e quindi, per la (7, 2):

$$r = 2t, \qquad |H| = (q^t(n-1)+1)\,\vartheta_{t-1} \leq \vartheta_{2t-1} - \vartheta_1 = q^t\,\vartheta_{t-1} + \vartheta_{t-1} - \vartheta_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad n - 1 \leq 1 - \vartheta_1 / q^t \vartheta_{t-1} < 1,$$

$$r = 2t+1, \qquad |H| = (q^t(n-1)+1)\,\vartheta_t \leq \vartheta_{2t} - \vartheta_1 = q^t\,\vartheta_t + \vartheta_{t-1} - \vartheta_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad q^t\,\vartheta_t(n-1) \leq q^t\,\vartheta_t - q^t - \vartheta_1 \Rightarrow n - 1 \leq 1 - (q^t + \vartheta_1)/q^t\,\vartheta_t < 1,$$

e cioè in ogni caso l'assurdo. Esiste dunque per P una retta ℓ (n)-secante H. L'S_3 congiungente ℓ con α, incontra H in una (n)-varietà regolare priva di rette (altrimenti $\alpha \cap H \neq \emptyset$) e quindi in un (n)-ovoide, ma ciò è assurdo per la proposizione I n. 4. Rimane così provata la (7, 1).

Mostriamo che:

(7.4) $$|\alpha \cap H| \geq 2.$$

Risulta per la (7.1), $|\alpha \cap H| \geq 1$. Se fosse $|\alpha \cap H| = 1$, sia $\{T\} = \alpha \cap H$ e sia ℓ una retta n-secante H per T. L'S_3 congiungente ℓ con α incontra H in una (n)-varietà regolare non rigata (altrimenti $|\alpha \cap H| \geq 2$), cioè in un (n)-ovoide, ma allora, per la proposizione I n. 4, deve essere $n = 2$, mentre noi supponiamo $n \geq 3$. Si ha così la (7.4).

Ragionando ora per assurdo supponiamo che esiste una retta ℓ esterna ad H. Ogni piano α per ℓ non può contenere rette di H e quindi incontra H, per la (7.4), in una (n) - ovale, onde:

$$|\alpha \cap H| = q(n-1) + 1.$$

Poichè i piani per ℓ sono in numero di ϑ_{r-2}, si ha allora:

(7.5) $$|H| = \vartheta_{r-2}(q(n-1)+1).$$

Dalle (7.3) si ha allora:

$r=2t$, $t \geq 2$, $$|H| = (q^t(n-1)+1)\vartheta_{t-1} = \vartheta_{2t-2}(q(n-1)+1) \Rightarrow (n-1)(q\vartheta_{2t-2} - q^t\vartheta_{t-1}) + q^t\vartheta_{t-2} = 0 \Rightarrow (n-1)q\vartheta_{t-2} + q^t\vartheta_{t-2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (n-1) + q^{t-1} = 0,$$

$r=2t+1$, $t \geq 2$, $$|H| = (q^t(n-1)+1)\vartheta_t = \vartheta_{2t-1}(q(n-1)+1) \Rightarrow (n-1)(q\vartheta_{2t-1} -$$

$$-q^t \vartheta_t) + q^{t+1} \vartheta_{t-2} = 0 \Rightarrow (n-1)q\vartheta_{t-2} + q^{t+1}\vartheta_{t-2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (n-1) + q^t = 0,$$

dunque in ogni caso si ha l'assurdo, ne segue l'asserto.

IV. In $PG(3, q)$ ogni (n)-varietà regolare non singolare H, con $n \geq 3$, è una varietà hermitiana non singolare. ($n \neq q/2 + 1$).

Dimostrazione. Ricordiamo che un quadragono è uno spazio geometrico $(S, \mathscr{L})$ (gli elementi di S si dicono punti, quelli di $\mathscr{L}$ si dicono rette) tale che:

(7.6) $\quad \forall \ell_1, \ell_2 \in \mathscr{L}, \quad \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow |\ell_1 \cap \ell_2| \leq 1,$

(7.7) $\quad \forall \ell \in \mathscr{L}, \quad |\ell| = s \geq 3,$

(7.8) $\quad \forall P \in S, \quad |F_P| = t \geq 3$ (F_P insieme delle rette per P),

(7.9) $\quad \forall P \in S, \ \forall \ell \in \mathscr{L}, \quad P \notin \ell \Rightarrow \exists! \ell' \in \mathscr{L}: P \in \ell', |\ell \cap \ell'| = 1.$

Higman D. G. ha provato che ("Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs", Atti Conv. Geom. Comb. e Appl., Perugia, (1970) 263-293):

(7.10) $$s \leq (t-1)^2 + 1, \qquad t \leq (s-1)^2 + 1.$$

Sia H una (n)-varietà regolare non singolare di $PG(3, q)$, con $n \geq 3$, e sia $\mathscr{L}$ la famiglia delle sue rette. Si prova subito che $(H, \mathscr{L})$ è un quadragono con $|\ell| = s = q + 1$, $|F_P| = t = n$. Dalla $(7.10)_I$ si ha allora:

$$n \geq \sqrt{q} + 1. \tag{7.11}$$

Proviamo ora che H è priva di rette esterne, ne seguirà l'asserto in forza dei teoremi I, II. Sia ℓ una retta esterna di H; ogni piano α per ℓ non può incontrare H al più in un punto (altrimenti sarebbe $|H| = \vartheta_1(q(n-1)+1) \leq \leq \vartheta_1$). Esiste dunque un piano per ℓ che incontra H almeno in due punti, ma allora $\alpha \cap H$ è una (n)-ovale.

D'altra parte sia $\mathcal{O}$ una (n)-ovale di un piano proiettivo π_q, denotato con t_o, t_1, t_n rispettivamente il numero delle rette esterne, tangenti ed n-secanti $\mathcal{O}$, risulta evidentemente:

$$\begin{cases} t_o + t_1 + t_n = q^2 + q + 1, \\ t_1 = |\mathcal{O}| = q(n-1) + 1, \\ t_1 + nt_n = |\mathcal{O}|(q+1) = [q(n-1)+1](q+1), \end{cases} \tag{7.12}$$

da cui si ha:

$$t_o = q(q-1)/n - q(n-2). \tag{7.13}$$

Dalla (7.13) otteniamo:

$$\begin{cases} t_o \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \sqrt{q} + 1, \\ t_o = 0 \Leftrightarrow n = \sqrt{q} + 1. \end{cases} \tag{7.14}$$

Dalla (7.14) si ha che l'(n)-ovale $\alpha \cap H$ del piano $\alpha = PG(2, q)$, poichè ammette la retta esterna ℓ, è tale che $n < \sqrt{q} + 1$, ma ciò è assurdo per la (7.11). Ne segue l'asserto.

Il teorema IV segue anche da un risultato di D. Olanda: "Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo", Relazione n. 26, Ist. Mat. Univ. Napoli, (1973), 1-21.

Dai teoremi III, IV e IV n. 1, si deduce il seguente teorema che dà una completa caratterizzazione delle (n)-varietà regolari di $PG(r, q)$.

V. In $PG(r, q)$, $r \geq 3$, una (n)-varietà regolare H $(n \geq 3)$ o è costituita da n iperpiani formanti fascio, o è un cono proiettante da un S_{r-3} una (n)-ovale di un piano α sghembo con l'S_{r-3}, ovvero è una varietà hermitiana singolare o non singolare.

8.- CARATTERIZZAZIONE DELLE (2)-VARIETA' REGOLARI DI $\mathbb{P}_{r,k}$ COME QUADRICHE.

Sussistono le seguenti proposizioni:

I. Un (2)-ovoide $\mathcal{O}$ di $\mathbb{P}_{r,k}$ $(r \geq 3)$, tale che ogni ovale sezione piana è una conica, risulta una quadrica (non rigata).

Dimostrazione. Per $r=3$ è stato provato da G. Tallini in Lezioni di Geometria III anno acc. 1977-78: "Archi, ovali, insiemi quadratici, calotte negli spazi finiti". Per quanto riguarda $r > 3$, la proposizione si prova in modo analogo induttivamente.

II. Un insieme H di $\mathbb{P}_{r,k}$ $(r \geq 3)$, tale che ogni sezione iperpiana risulta una quadrica (con almeno due punti), è una quadrica rigata.

Dimostrazione. L'insieme H è un (2)-insieme, in quanto se una retta ℓ ha tre punti in comune con H, un iperpiano per ℓ incontra H in una quadrica $\mathcal{Q}$, onde ℓ ha tre punti in comune con $\mathcal{Q}$ e quindi $\ell \subseteq \mathcal{Q} \subseteq H$.

Se H è un (2)-insieme singolare, esso risulta un cono proiettante da un S_d una (2)-varietà $\tilde{H}$ non singolare di un S_{r-d-1} sghembo con l'S_d (cfr. proposizione II n. 1). Un iperpiano π per l'S_{r-d-1} incontra H in una quadrica $\mathcal{Q}$, onde $\tilde{H} = S_{r-d-1} \cap H \subseteq \pi \cap H = \mathcal{Q}$ e quindi $\tilde{H}$ è una quadrica (non singolare), onde H è un cono quadrico, si ha così l'asserto in questo caso.

Possiamo allora supporre che H sia non singolare. Proviamo che è <u>regolare.</u> Per ogni $P \in H$, sia $F(P)$ la famiglia delle rette per P tangenti o appartenenti ad H. Si ha:

(8.1) $\forall \ell_1, \ell_2 \in F(P),\ \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow$ ogni retta ℓ per P di $\alpha = \ell_1 \veebar \ell_2 = \overline{\ell_1 \cup \ell_2}$ (spazio congiungente ℓ_1 ed ℓ_2), appartiene ad $F(P)$.

Infatti un iperpiano π per α incontra H in una quadrica $\mathcal{Q}$ che ammette ℓ_1, ℓ_2 come rette tangenti o appartenenti a $\mathcal{Q}$, onde α appartiene all'iperpiano tangente in P alla $\mathcal{Q}$, ne segue la (8.1).

Dalla (8.1) si deduce che $\bigcup_{\ell \in F(P)} \ell$ è un sottospazio, S_d, cioè:

$$\bigcup_{\ell \in F(P)} \ell = S_d.$$

Proviamo che $d = r-1$, ne seguirà che <u>H è una (2)-varietà regolare.</u> Sia $\overline{S}_{d-1}$ un sottospazio (d-1)-dimensionale contenuto in S_d e passante per P. Si consideri un iperpiano π per $\overline{S}_{d-1}$ ma non contenente l'S_d. Si ha che $\pi \cap H$ è una quadrica $\mathcal{Q}$ tale che l'unione delle rette tangenti o appartenenti a $\mathcal{Q}$ è l'$\overline{S}_{d-1}$. Dunque è $d-1 \geq r-2$ (perchè $\mathcal{Q}$ è una (2)-varietà regolare di $\pi = \mathbb{P}_{r-1,k}$), onde $d \geq r-1$ e quindi $d = r-1$, essendo P non singolare per H.

La (2)-varietà regolare non singolare H è poi rigata in quanto se non lo fosse ogni iperpiano tangente incontrerebbe H in un sol punto. Si è così provato che:

(8.2) <u>Un insieme H di $\mathbb{P}_{r,k}$ $(r \geq 3)$, tale che ogni sezione iperpiana ri-</u>

sulta una quadrica (con almeno due punti) o è un cono quadrico ovvero è una (2)-varietà regolare non singolare rigata.

Dalla (8, 1) con argomentazioni analoghe a quelle fatte nel Lavoro di G. Tallini, "Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito", Ann. Mat., (4) 42, (1956), 119-164 (argomentazioni che si trasportano subito anche al caso che il campo k sia infinito), segue l'asserto.

Proviamo ora che:

III. In $\mathbb{P}_{4,k}$ ogni (2)-varietà H regolare non singolare rigata è una quadrica.

Dimostrazione. Osserviamo che H è rigata ma non contiene piani e che ogni iperpiano, S_3, incontra H o in una (2)-varietà regolare non singolare e quindi in un (2)-ovoide oppure in una quadrica iperbolica dell'S_3 (cfr. proposizione I n. 6) ovvero in un cono proiettante da un punto V ($\in S_3$) una ovale piana. Proviamo che:

(8, 3) Ogni ovale piana di H è una conica.

Sia dunque α un piano che incontri H in una ovale $\mathcal{O}$. Sia $P \in \mathcal{O}$ ed ℓ una retta di H per P. Per l'osservazione precedente l'$S_3 = \alpha \veebar \ell$ incontra H o in una quadrica iperbolica, ma allora $\mathcal{O}$ è una conica, ovvero in un cono Γ con vertice un punto V di ℓ ($V \neq P$) e proiettante da V l'ovale $\mathcal{O}$.

In questo secondo caso siano $P_1 \in \mathscr{O}$, con $P_1 \neq P$, ℓ_1 una retta per P_1 appartenente ad H diversa dalla P_1V (e quindi che interseca l'$S_3 = \alpha \veebar \ell$ solo in P_1), ℓ_1' una retta di H per P diversa dalla ℓ (onde $\ell_1' \cap S_3 = \{P\}$) e sghemba con ℓ_1 (certamente esistente). Per l'osservazione precedente l'$\bar{S}_3$ congiungente ℓ_1 ed ℓ_1' incontra H in una quadrica iperbolica $\mathscr{Q}$ (essendo $\ell_1 \cap \ell_1' = \emptyset$); il piano $\beta = \bar{S}_3 \cap S_3$ non passa per V (altrimenti la retta ℓ apparterrebbe a $\mathscr{Q}$ ed essendo incidente ℓ_1' in P dovrebbe incontrare anche ℓ_1 in un punto, mentre $\ell_1 \cap \ell = \emptyset$, in quanto $\ell_1 \cap S_3 = \{P_1\}$). Dunque β ($\subseteq S_3 = \alpha \veebar \ell$) incontra Γ in una ovale $\mathscr{O}'$ che è una conica (in quanto, essendo $\beta \subseteq \bar{S}_3$, si ha $\mathscr{O}' = \mathscr{Q} \cap \beta$). Ma allora Γ è un cono quadrico e quindi $\mathscr{O}$ è una conica. Abbiamo così provato la (8. 3).

Dalla (8. 3) e dalla proposizione I, tenuto conto dell'osservazione precedente, si ha che ogni sezione iperpiana di H è una quadrica. Dalla proposizione II segue allora l'asserto.

Proviamo infine che:

IV. In $\mathbb{P}_{r,k}$ ($r \geq 3$) ogni (2)-varietà regolare non singolare rigata H è una quadrica.

Dimostrazione. Per r=3 ed r=4 l'asserto è vero (cfr. proposizioni III e I n. 6). Possiamo dunque supporre $r \geq 5$ e procedere per induzione rispetto ad r.

Supponiamo prima che H sia di tipo $m \geq 2$. Ogni iperpiano tangente $\tau(P)$ incontra H in un cono $\Gamma(P)$ proiettante da P una (2)-varietà regolare non singolare, $\widetilde{H}$, di un S_{r-2} ($\subseteq \tau(P)$) con $P \notin S_{r-2}$. La $\widetilde{H}$ è di tipo $m-1 \geq 1$, quindi è rigata. Per l'induzione allora $\widetilde{H}$ è una quadrica, onde $\Gamma(P) = \tau(P) \cap \cap H$ è un cono quadrico.

Un iperpiano $\pi = S_{r-1}$ non tangente incontra H in una (2)-varietà regolare non singolare rigata (in quanto $m-1 \geq 1$), onde, per l'induzione, $\pi \cap H$ è una quadrica. Si è così provato che, se $m \geq 2$, ogni iperpiano incontra H in una quadrica, quindi H è una quadrica per la proposizione II.

Supponiamo infine che H sia di tipo $m = 1$ (cioè sia rigata ma non contenga piani). Proviamo che:

(8.4) <u>Ogni ovale $\mathcal{O}$ sezione di H con un piano α è una conica.</u>

Siano $P, P_1 \in \mathcal{O}$, con $P \neq P_1$, e t, t_1 rette di H, sghembe tra loro, passanti rispettivamente per P e P_1. Lo spazio congiungente t ed t_1 è un $\bar{S}_3$. Esso incontra H in una (2)-varietà regolare rigata non singolare (in quanto $m = 1$), cioè in una quadrica iperbolica $\mathcal{Q}$ (cfr. proposizione I n. 6). Se $\alpha \subset \bar{S}_3$, sarà $\mathcal{O} = \alpha \cap H = \alpha \cap \mathcal{Q}$, onde $\mathcal{O}$ è una conica. Se $\alpha \nsubseteq \bar{S}_3$, si consideri l'$\bar{S}_4$ congiungente α e l'$\bar{S}_3$. L'$\bar{S}_4$ incontra H in una (2)-varietà regolare $\bar{H}$, che è non singolare (perchè se lo fosse, detto V un suo punto singolare, il piano congiungente V con t, se $V \notin t$, oppure il piano congiungente

V con t_1, se $V \notin t_1$, sarebbe contenuto in $\overline{H}$ e quindi in H, mentre è $m = 1$), inoltre $\overline{H}$ è rigata. Ma allora per la proposizione III, $\overline{H}$ è una quadrica e quindi $\mathscr{O} = \alpha \cap H = \alpha \cap \overline{H}$ è una conica. Si è così provata la (8.4).

Tenuto conto che, essendo $m = 1$, ogni iperpiano di $\mathbb{P}_{r,k}$ incontra H o in un (2)-ovoide, oppure in una (2)-varietà regolare non singolare rigata, ovvero in un cono proiettante un (2)-ovoide, per l'induzione ammessa, dalla (8.4) e dalla proposizione I, si ha che ogni iperpiano incontra H in una quadrica, onde l'asserto per la proposizione II.

Dalle proposizioni IV e V del n. 1, e dalla precedente proposizione IV segue che:

<u>V. Ogni (2)-varietà regolare di $\mathbb{P}_{r,k}$ ($r \geq 3$) o è una quadrica ovvero è un (2)-ovoide, oppure è un cono proiettante da un S_d ($0 \leq d \leq r-3$) un (2)-ovoide ((2)-ovale se $d = r-3$) di un S_{r-d-1} sghembo con l'S_d.</u>

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BARLOTTI, Una caratterizzazione grafica delle ipersuperficie hermitiane non singolari in uno spazio lineare finito di ordine quattro, Le matematiche, 21 (1966), 387-395.

[2] A. BICHARA & F. MAZZOCCA, Su una caratterizzazione dello spazio di Grassmann delle rette di uno spazio affine, Quad. Sem. Geom. Comb. n. 31, 1980, Ist. Mat. "G. Castelnuovo", Univ. Roma.

[3] A. BICHARA & F. MAZZOCCA, Sull'indipendenza degli assiomi che definiscono gli spazi di Grassmann affini e proiettivi, Rapp. Int. n. 8, Ist. Mat. Fac. Ing. Napoli, Ottobre 1981.

[4] A. BICHARA & F. MAZZOCCA, On a characterization of Grassmann spaces associated with an affine space, Rapp. Int. n. 5, Ist. Mat. Fac. Ing. Napoli, Sept. 1981.

[5] A. BICHARA & F. MAZZOCCA, On a characterization of Grassmann space representing the lines in an affine space, Simon Stevin, vol. 56, (1982), 129-141.

[6] A. BICHARA & F. MAZZOCCA, On the indipendence of the axioms defining the affine ana projective Grassmann spaces, Ann. Discr. Math. 14 (1982), 123-128.

[7] A. BICHARA & F. MAZZOCCA, On a characterization of the Grassmann spaces associated with an affine space, Ann. Discr. Math.

18 (1983), 95-112.

[8] A. BICHARA & C. SOMMA, A characterization of Schubert manifold associated with a 3-dimensional projective space, Atti Convegno Geometria combinatoria e di incidenza, La Mendola (Italy), July 1982. Rend. Sem. Mat. Brescia, 7 (1984), 89-110.

[9] A. BICHARA & C. SOMMA, On Schubert manifold associated with a projective space, to appear in Rend. Mat. Univ. Roma.

[10] A. BICHARA & C. SOMMA, On the flag space associated with an affine or projective space, to appear in Rend. Mat. Univ. Roma.

[11] A. BICHARA & G. TALLINI, On a characterization of the Grassmann manifold representing the planes in a projective space, Ann. Discr. Math., 14 (1982), 129-150.

[12] A. BICHARA & G. TALLINI, On a characterization of the Grassmann space representing the h-dimensional subspaces in a projective space, Ann. Discr. Math. 18 (1983), 113-132.

[13] P. DEMBOWSKI, Finite geometries, Ergebnisse der Math., Springer, Berlin, 1968.

[14] D. G. HIGMAN, Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs, Atti Conv. Geom. e Appl., Perugia, (1970), 263-293.

[15] P. M. LO RE & D. OLANDA, Spazi di Grassmann, Ist. Mat. "R. Cac-

ciopoli", Univ. Napoli, 1980.

[16] P.M. LO RE & D. OLANDA, Grassmann spaces, J. Geometry, 17 (1981), 50-60.

[17] F. MAZZOCCA & D. OLANDA, A graphic characterization of the lines of an affine space, Rapp. Int. n. 6, Ist. Mat. Fac. Ing. Univ. Napoli, Ottobre 1981.

[18] F. MAZZOCCA & D. OLANDA, A graphic characterization of the lines of an affine space, Ann. Discr. Math. 18 (1983), 625-634.

[19] N. MELONE, Veronese spaces, Pubbl. Ist. Mat. Univ. Napoli, n. 42, 1982.

[20] N. MELONE, Veronese spaces, J. Geometry, 20 (1983), 169-180.

[21] N. MELONE & D. OLANDA, Su certe strutture di incidenza che generalizzano le varietà di C. Segre, Quad. Sem. Geom. Comb. n. 22, Febbraio 1980, Ist. Mat. "G. Castelnuovo", Univ. Roma.

[22] N. MELONE & D. OLANDA, Una proprietà caratteristica della Grassmanniana delle rette di uno spazio proiettivo, Pubbl. Ist. Mat. Univ. Napoli, n. 2, 1981.

[23] N. MELONE & D. OLANDA, Spazi pseudoprodotti e varietà di C. Segre, Rend. Mat. pura e appl., VII, I, 1981, 381-397.

[24] N. MELONE & D. OLANDA, A characteristic property of the Grassmann manifold representing the lines of a projective space,

to appear in European J. Combin.

[25] D. OLANDA, Sistemi rigati immersi in uno spazio proiettivo, Relazione n. 26, Ist. Mat. Univ. Napoli, (1973), 1-21.

[26] B. SEGRE, Lecture on modern geometry, Ed. Cremonese, Roma, 1961.

[27] B. SEGRE, Forme e geometrie hermitiane, con particolare riguardo al caso finito, Ann. di Mat., (4) 70 (1965), 1-202.

[28] B. SEGRE, Introduction to Galois Geometries, Mem. Acc. Naz. Lincei, (8) 8 (1967), 133-236.

[29] G. TALLINI, Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito, Ann. Mat., (4) 42, (1956), 119-164.

[30] G. TALLINI, Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti, Nota I e II, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8), 20, (1956), 311-317, 442-466.

[31] G. TALLINI, Strutture d'incidenza dotate di polarità, Rend. Sem. mat. e fis. di Milano, 41, (1971), 1-41.

[32] G. TALLINI, Sistemi grafici rigati, Rel. n. 8, Ist. Mat. Univ. Napoli, 1972.

[33] G. TALLINI, Archi, ovali, insiemi quadratici, calotte negli spazi finiti, Lezioni di Geometria III, anno acc. 1977-78.

[34] G. TALLINI, Spazi dei cerchi e delle sfere, lo spazio delle coniche e la superficie di Veronese, teoria delle coniche in un piano di Galois, Lezioni di Geometria III, anno acc. 1977-78.

[35] G. TALLINI, On a characterization of the Grassmann manifold representing the lines in a projective space, in "Finite Geometries and Designs", London Math. Soc. Lecture Note Series 49, Cambridge U. P., (1981), 354-358.

[36] G. TALLINI, Quadriche e varietà grassmanniane in PG(r, q), Lezioni di Geometria III, anno acc. 1986-87.

[37] G. TALLINI, Lezioni di Geometria III, anno acc. 1986-87.

[38] M. TALLINI SCAFATI, Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un $S_{r,q}$, Rend. Mat. Roma, (3-4) 26, (1967), 273-303.

INDICE