JOIN GEOMETRIES : UN APPROCCIO SINTETICO ALLA CONVESSITA'

Antonio LEONELLI
Facoltà di Scienze MM.FF.NN., Università di Viterbo

Gli insiemi convessi hanno come noto un ruolo centrale nei problemi di ottimizzazione. Essi intervengono ad esempio come insiemi soluzione di un sistema di disequazioni lineari in n variabili reali. Le caratteristiche geometriche di tali insiemi interessano, in tali applicazioni, piu' che altro per le loro conseguenze algebriche: si pensi al ruolo che i vertici di un poliedro giocano nella ricerca del massimo di un funzionale lineare. Anche per questo motivo l'approccio classico allo studio degli insiemi convessi e' stato quello di far uso delle coordinate, immergendosi in $\mathbb{R}^n$. La natura geometrica di tali problemi consente, pero', di darne delle dimostrazioni per via *sintetica*, anziche' analitica, cioe' senza far uso delle coordinate. Un modo molto generale per trattare la convessita' per via sintetica, che permette anche di semplificare alcune dimostrazioni e per di piu' fornisce modelli anche fuori della geometria euclidea, e' quello introdotto da Prenowitz, consistente nella geometria dei *Join Spaces*. Un *join space* e' un insieme munito di una iperstruttura, chiamata *prodotto join*, soddisfacente a opportuni assiomi suggeriti dall'operazione geometrica elementare consistente nell'assegnare ad ogni coppia di punti di uno spazio euclideo l'insieme dei punti del segmento che li congiunge. In questo modo, per un sottoinsieme di X l'essere convesso equivale all'essere stabile rispetto al prodotto join. I pochi assiomi stabiliti da Prenowitz permettono, come ora vedremo, di sviluppare una teoria della convessita' che fa ritrovare, senza far uso delle coordinate, i piu' importanti teoremi sugli insiemi convessi.

1. Definizioni ed esempi.

Sia X un insieme e $\cdot : X \times X \longrightarrow 2^X$ una iperoperazione su X. Se A, $B \subseteq X$, l'operazione si estende a coppie di insiemi, ponendo :

$$A \cdot B = \cup \{ a \cdot b \mid a \in A, \ b \in B \}$$

Per brevita' si omettera' il punto (come di abitudine, in Algebra) e si identifichera' ogni singleton $\{a\}$ con il suo unico elemento a.

Se l'iperoperazione e' commutativa, allora e' univocamente determinata l'*operazione inversa*, definita da :

$$(1.1) \qquad \frac{a}{b} = \{ x \in X \mid a \in b \cdot x \} .$$

Anch'essa viene estesa a coppie di insiemi allo stesso modo del prodotto.

1.1. Definizione.

La coppia $(X, \cdot)$ e' detta uno *spazio join* se soddisfa gli assiomi :

j1. $ab \neq \emptyset$, $\forall$ $a, b \in X$.

j2. $ab = ba$, $\forall$ $a, b \in X$. (proprieta' commutativa).

j3. $a(bc) = (ab)c$, $\forall$ $a, b, c \in X$ (proprieta' associativa).

j4. $\forall$ $a, b, c, d \in X$, $\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \Longrightarrow a \cdot d \approx b \cdot c$, dove $\approx$ indica la relazione di incidenza.

j5. $\forall$ $a, b \in X$, $\frac{a}{b} \neq \emptyset$.

j6. $aa = a$, $\frac{a}{a} = a$ $\forall$ $a \in X$, (idempotenza) .

In uno spazio join, l'iperprodotto di due elementi (o sottoinsiemi) e' detto *prodotto join* (o semplicemente *join*), mentre l'operazione inversa prende il nome di *estensione*. Il perche' di tali denominazioni sara' chiaro non appena si considereranno alcuni esempi.

Per il prodotto join e per l'estensione valgono le seguenti *proprieta' di monotonia* :

$$S \subseteq T \text{ e } S' \subseteq T' \Longrightarrow SS' \subseteq TT' \text{ e } \frac{S}{S'} \subseteq \frac{T}{T'} .$$

Osserviamo che, in letteratura, una iperstruttura soddisfacente j1, j2, j3 e' detta un *semi-ipergruppo commutativo*. Per *ipergruppo* si intende, invece, un semi-ipergruppo che soddisfa anche la cosiddetta proprieta' di *riproducibilita'* :

1.2) $aX = X = Xa \quad , \forall\, a \in X$.

Si vede facilmente che (1.2) equivale a j5 e, quindi, uno spazio join e' un ipergruppo commutativo.

Pertanto, l'assioma che caratterizza gli spazi join, nell'ambito degli ipergruppi e' j4 , il cui aspetto formale ricorda una ben nota regola dell'algebra elementare. Tale assioma assume un ben preciso significato geometrico non appena si considerino alcuni esempi di spazi join associati a note strutture geometriche.

1.2. <u>Esempio</u> (join vettoriale).

Si consideri uno spazio vettoriale V su un campo ordinato K (si pensi, per fissare le idee, ad $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$). Presi due elementi a, b di V , si ponga $ab = \{\, (1-\lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in K \,\}$. ab e' il segmento aperto congiungente a e b , se a e b sono distinti, altrimenti si riduce al punto a . Il prodotto di tre elementi, comunque associati, e' il triangolo che li ha come vertici (eventualmente degenere in un segmento se i punti sono allineati) privato della frontiera. Pertanto, gli assiomi j1, j2, j3 sono evidentemente soddisfatti. Per verificare gli assiomi j4 e j5 , occorre vedere cos'e' l'estensione $\frac{a}{b}$ di due elementi. Dalla (1.1) segue facilmente che, se a e b sono distinti, $\frac{a}{b}$ e' la semiretta aperta con origine a , contenuta nella retta individuata da a e b e non contenente b ; con immagine suggestiva si potrebbe dire che e' l'ombra di a proiettata da b . Se, invece, $a = b$, allora $\frac{a}{b}$ e' ridotta al singolo punto a , pertanto l'estensione di due elementi e' comunque non vuota e j5 e' soddisfatto.

Il significato di j4 , in questo esempio, e' il seguente : se la semiretta $\frac{a}{b}$ incide la semiretta $\frac{c}{d}$ allora il segmento ad deve essere incidente al segmento bc , come in effetti avviene.

1.3. Esempio (join *box*).

Si consideri in $\mathbb{R}^2$ l'iperprodotto definito da :

$$(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) = (a_1b_1)\times(a_2b_2)$$

dove a_ib_i $(i=1,2)$ e' il join vettoriale di a_i e b_i in $\mathbb{R}$ e $\times$ indica il prodotto cartesiano. Se i due punti sono sulla stessa retta orizzontale o verticale, il loro join e' un intervallo aperto su tale retta ; se sono in posizione obliqua, il loro join e' il rettangolo aperto coi lati paralleli agli assi che ha i due punti come vertici di una sua diagonale. Si puo' generalizzare questo esempio, prendendo in luogo di $\mathbb{R}^2$ il prodotto cartesiano di due o piu' spazi join qualsiasi ed, in particolare, $\mathbb{R}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1.4. Esempio (spazio *triode*).

Sia X l'unione di tre semirette distinte del piano euclideo aventi lo stesso punto origine p , privata di p . Dati $a, b \in X$ il prodotto join ab e' cosi' definito: se $a=b$ allora $ab = a$; se $a\neq b$ ed entrambi i punti appartengono alla stessa semiretta, allora ab e' il segmento aperto su quella semiretta con estremi a e b ; se, infine, i due punti appartengono a semirette differenti, allora $ab = ap \cup pb$. X con tale iperprodotto e' uno spazio join.

1.5. Controesempio.

Consideriamo uno spazio di rette $(S, \mathcal{L})$ dove $L_{a,b} \in \mathcal{L}$ e' la retta che congiunge a con b , se $a \neq b$. Definiamo un iperprodotto al seguente modo :

$$x\cdot y = \begin{cases} \{x\} & \text{se } x = y \\ L_{x,y} & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

L'operazione inversa, in tal caso, e' cosi' caratterizzata :

Se $a \neq b$, si ha :

$$x \in \frac{a}{b} \iff a \in b\cdot x = \begin{cases} \{b\} & \text{se } b=x \\ L_{b,x} & \text{se } b\neq x \end{cases} \quad ; \quad \text{essendo } a \neq b ,$$

non puo' essere $a \in \{b\}$, cioe' non puo' essere $b = x$; pertanto,

$c \neq \frac{a}{b}$; se $x \neq b$, allora $a \in L_{x,b}$, cioe', $L_{x,b}=L_{a,b}$ e quindi $\frac{a}{b} = L_{a,b} - \{b\}$. Se $a = b$, allora $a \in a \cdot x$ e questo succede per ogni x , cioe' $\frac{a}{a} = X$. Si ha in questo caso una specie di "forma indeterminata" , in analogia alla classica $\frac{0}{0}$ in $\mathbb{R}$. Valgono gli assiomi J1, J2, J3, J5 . Non vale, pero', l'assioma J4 (se una retta ha almeno tre punti); infatti, se $a \neq b$, si ha $\frac{a}{b} \not\approx \frac{b}{a}$ ma aa non ha punti in comune con ab.

1.6. <u>Esempio</u> (spazi proiettivi).
Per quanto appena detto, Prenowitz e Jantosciak per poter dare una caratterizzazione degli spazi proiettivi in termini di struttura join hanno dovuto introdurre un elemento neutro e e porre :

$$a \cdot b = \begin{cases} \{a,e\} & , \text{ se } a = b \\ L_{a,b} - \{a,b\} & , \text{ se } a \neq b \end{cases}$$

In tal modo sono soddisfatti tutti gli assiomi di uno spazio join tranne le due proprieta' di idempotenza, espresse dall'assioma J6. Per questo motivo, quest'ultimo assioma e' stato tralasciato da Prenowitz e Jantosciak, in alcune esposizioni della loro teoria (cf.[8]), riuscendo cosi' ad inserire tra le *join geometries* non solo l'importante classe degli spazi proiettivi, ma perfino quella dei gruppi abeliani.

In questa esposizione, focalizzata sulla trattazione degli insiemi convessi, abbiamo preferito conservare l'assioma J6 , perche' essenziale per una buona teoria della convessita'.

Nel seguito, sottointenderemo che gli insiemi considerati sono tutti contenuti in un fissato spazio join X .

2. Sottoinsiemi convessi e lineari.

2.1. Definizione.

Un insieme A e' detto *convesso* se e solo se

(2.1) $$ab \in A \ , \ \forall\, a, b \in A \ .$$

Nell'esempio 1.2., gli insiemi convessi nel senso della Def.2.1. sono esattamente gli insiemi convessi in senso usuale. Dal punto di vista algebrico, i sottoinsiemi convessi in uno spazio join sono quelli stabili rispetto al prodotto join. Si ha, ovviamente, che A e' convesso se e solo se $AA \subseteq A$. Perche' valga l'uguaglianza occorre che sia $A \subseteq AA$ e questo accade certamente se si postula l'idempotenza del join sugli elementi, cioe' la prima parte di j6. Si osservi che postulare l'idempotenza sui punti equivale a supporre che i punti siano convessi, come appare naturale. Come e' evidente, l'intersezione di una famiglia di convessi di uno spazio join e' ancora un insieme convesso. E' quindi possibile definire l'*involucro convesso* di un sottoinsieme S (che sara' indicato con $[S]$) come l'intersezione di tutti i sottoinsiemi convessi di X contenenti S . In particolare, l'involucro convesso di un punto e' il punto stesso, grazie a j6.
Non e' difficile convincersi che l'involucro convesso di un insieme S e' l'unione di tutti i prodotti join finiti di elementi di S . Seguendo la terminologia consolidata nel caso $\mathbb{R}^n$, si dice che S *genera* A (*in senso convesso*) se A e' l'involucro convesso del sottoinsieme S , . Se S e' finito, allora A e' detto un *politopo*. E' facile convincersi che i politopi in senso usuale di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente i politopi della struttura join vettoriale ; in particolare, in $\mathbb{R}^2$, sono i poligoni limitati.

Particolarmente importante e', come noto, il concetto di *punto estremo* di un insieme convesso. Esso puo' essere dato in modo molto semplice nell'ambito generale di uno spazio join, al seguente modo :

2.2. Definizione.

Se A e' un insieme convesso, un punto $a \in A$ e' detto un *estremo* di A se si ha :

$$\forall\, x, y \in A \qquad a \in xy \longrightarrow x = a = y .$$

In altri termini, a e' un punto estremo del convesso A se e solo se $A-\{a\}$ e' ancora convesso.

E' evidente che un punto estremo di A non e' contenuto neanche nel join di tre o piu' punti distinti di A .

Anche in questo ambito cosi' generale valgono alcuni noti teoremi sui punti estremi di convessi in $\mathbb{R}^n$.

2.3. Teorema.

$a \in A$ e' un punto estremo del convesso $A \subseteq X$ se e solo se a appartiene a ogni insieme di generatori di A .

Dimostrazione.

Sia S un insieme di generatori di A , cioe' $[S] = A$. Se a e' un punto di A , allora $a \in A = [S]$, quindi esistono s_1, ... , $s_n \in S$ tali che $a \in s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$. Allora, se a e' estremo, deve essere $a = s_1 = \ldots = s_n$, cioe' $a \in S$.
Viceversa, se a non e' estremo, allora $S-\{a\}$ genera ancora A. Infatti, essendo a non estremo, esistono due punti distinti x, $y \in A$ tali che $a \in xy$. Sia $x = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$, $y = s_{n+1} \cdot \ldots \cdot s_m$, dove gli s_i sono punti opportuni di S , dei quali due almeno distinti, altrimenti $x = y$. Allora, $a \in s_1 \cdot \ldots \cdot s_m$. Supponiamo che gli s_i siano tutti distinti (basta raggruppare quelli uguali e usare l'idempotenza) , allora se $a = s_1$, si ha :
$a \in \dfrac{a}{a} \subseteq s_2 \cdot \ldots \cdot s_m$ e i fattori del prodotto sono tutti distinti da a , pertanto $a \in [S-\{a\}]$.
Poiche' $[S-\{a\}] \supseteq (\, S-\{a\}\,)\cup\{a\} = S$, ne segue $[S-\{a\}] = A$. ∎

Dal Teorema segue che i punti estremi di un politopo sono in numero finito, dato che un politopo e' finitamente generato. Essi sono detti in tal caso anche *vertici*, come usuale in $\mathbb{R}^n$.

Si da' anche una nozione di *indipendenza convessa* al seguente modo :

2.4. Definizione.

Un insieme finito S e' detto *indipendente in senso convesso* o, brevemente, *C-indipendente*, se ogni due suoi sottoinsiemi disgiunti hanno involucri convessi disgiunti. I punti di S sono detti, allora, *C-indipendenti* tra loro.

2.5. Teorema.

Sia S un n-insieme C-dipendente di uno spazio join, allora i politopi generati dagli (n-1)-sottoinsiemi di S hanno un punto in comune.

Dimostrazione.

Essendo S C-dipendente, esistono sottoinsiemi disgiunti S_1 e S_2 di S tali che $[S_1]$ incide $[S_2]$ in almeno un punto p. Ogni politopo generato da $n-1$ punti di S contiene uno degli insiemi $[S_1]$, $[S_2]$ e quindi contiene p ■

2.6. Definizione.

Dato un insieme S , se esiste una massima cardinalita' finita tra quelle dei suoi sottoinsiemi C-indipendenti , essa e' detta il *C-rango* di S ed e' indicata con $r_C(S)$ ..

2.7. Teorema.

Sia L un insieme lineare di C-rango $n \geq 1$ e siano $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sottoinsiemi convessi di L , ogni n dei quali incidenti tra loro, allora $A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

Dimostrazione.

Sia B_j $(j=1,\ldots,n+1)$ l'intersezione degli n insiemi A_i con $i \neq j$, allora per l'ipotesi e' $B_j \neq \emptyset$, $\forall\ j = 1,\ldots,n$. Se $p_j \in B_j$ $\forall\ j=1,\ldots,n$, $A_i \supseteq \{ p_1,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_{n+1} \}$, quindi $A_i \supseteq [p_1,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_{n+1}]$. Poiche' il C-rango di L e' n , gli $n+1$ punti p_j sono C-dipendenti e quindi i politopi $[p_1,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_{n+1}]$ hanno almeno un punto in comune ■

I convessi che sono stabili anche rispetto alla estensione sono, nel caso di $\mathbb{R}^n$, esattamente i sottoinsiemi lineari, quelli cioe' ottenibili come soluzioni di sistemi di equazioni lineari. Questo fatto e' all'origine della :

2.8. Definizione.

Un sottoinsieme A di uno spazio join e' detto *lineare* se e solo se :

(2.2) $ab \subseteq A$, $\frac{a}{b} \subseteq A$, $\forall$ a, b $\in$ A .

Pertanto, gli insiemi lineari sono particolari insiemi convessi. Si dimostra, facendo uso degli assiomi j1-j5 , che nella (2.2) la prima condizione e' conseguenza della seconda e cioe' che A e' lineare se e solo se $\frac{A}{A} \subseteq A$.

L'insieme vuoto e l'intero spazio sono lineari e, grazie alla seconda parte di j6 , lo sono anche i singoli punti .

I sottoinsiemi lineari di uno spazio join sono essi stessi spazi join rispetto al prodotto indotto.

Come e' evidente, l'intersezione di una famiglia di insiemi lineari e' lineare e questo consente di definire l'*involucro lineare* di un sottoinsieme S (o *insieme lineare generato da* S) come l'intersezione $\langle S\rangle$ di tutti i sottoinsiemi lineari contenenti S . Gli elementi di S sono detti *generatori* di $\langle S\rangle$. Scriveremo, per brevita', $\langle S,T\rangle$ in luogo di $\langle S \cup T \rangle$.

L'involucro lineare di un insieme S si esprime in termini di involucro convesso al seguente modo :

$$\langle S\rangle = \frac{[S]}{[S]} \qquad (2.3)$$

ed inoltre $\langle S\rangle$ e' l'unione di tutti i sottoinsiemi del tipo

$\frac{s_1 \cdot \ldots \cdot s_m}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_n}$ (s_i , $t_j \in S$; m, n $\in \mathbb{N}$) .

Si puo' dare una definizione di lineare indipendenza al modo seguente :

2.9. Definizione.

Un insieme S e' detto *linearmente indipendente* (brevemente, *L-indipendente*) o *libero* se si ha : $\forall\, a \in S$, $a \notin \langle S-\{a\}\rangle$.

Anche in questo contesto piu' ampio, gli insiemi linearmente indipendenti hanno la seguente caratterizzazione, ben nota in Algebra Lineare :

2.10. Teorema.

Sia S un insieme *finito*. S e' linearmente indipendente se e solo se nessun sottoinsieme proprio di S genera $\langle S\rangle$.

Dimostrazione.

Sia S L-indipendente . Se $x \in S$ e $\langle S\rangle = \langle S-\{x\}\rangle$, allora x e' L-dipendente da S , contro l'ipotesi.

Sia S insieme minimale di generatori di $\langle S\rangle$; se S fosse L-dipendente, esisterebbe $x \in S$ tale che $x \in \langle S-\{x\}\rangle$ e allora $\langle S\rangle = \langle S-\{x\} , x \rangle = \langle S-\{x\}\rangle$, contro l'ipotesi ■

2.11. Definizione.

Dato un insieme S , se esiste una massima cardinalita' finita tra quelle dei suoi sottoinsiemi L-indipendenti, essa e' detta *L-rango* di S ed indicata con $r_L(S)$. ,

Si dimostra che la L-indipendenza implica la C-indipendenza e che, quindi, per ogni insieme S si ha $r_L(S) \leq r_C(S)$. Non e' vero, in generale, il viceversa.

Dalla definizione 2.11. segue che in ogni spazio join l'insieme vuoto ha L-rango zero e i punti hanno L-rango 1 . Negli spazi $\mathbb{R}^n$ con il join vettoriale, le rette hanno L-rango 2 , i piani L-rango 3 e, in generale, i sottospazi affini di dimensione n hanno L-rango $n+1$. Per dare un concetto di dimensione che coincida con quello usuale nel caso del join vettoriale basta quindi chiamare *dimensione* di un insieme lineare N , di L-rango finito, il numero $\dim N = r_L(N) - 1$.

Sempre in analogia con l'Algebra Lineare, si da' la seguente definizione :

2.12. Definizione.

Si chiama *base* di un insieme lineare L ogni suo sottoinsieme di generatori linearmente indipendenti.

Se L e' finitamente generato, esso ha certamente una base : un qualsiasi suo insieme minimale di generatori (in virtu' del Teorema 2.10.).

Non e' detto, pero', che due basi di uno stesso insieme lineare finitamente generato abbiano lo stesso numero di elementi. Si consideri, infatti, la struttura join *box* su $\mathbb{R}^3$. In tale spazio una qualunque coppia di punti distinti in posizione obliqua e' una base dell'intero spazio, ma anche i tre punti (1,0,0) , (0,1,0) e (0,0,1) costituiscono una base per tale spazio join. Non si puo', quindi, parlare di identita' tra dimensione di un insieme lineare e numero di elementi di una sua base, come avviene in Algebra Lineare. Per ottenere una buona teoria della dimensione, occorre aggiungere l'ulteriore assioma, detto *di scambio* :

EX. Se $b \in \langle S,a\rangle$, $b \notin \langle S\rangle$ allora $\langle S,a\rangle = \langle S,b\rangle$,
$\forall$ $a, b \in X$, $S \subseteq X$.

2.13. Definizione.

Uno spazio join soddisfacente EX e' detto uno *spazio (join) di scambio*.

Se, come naturale, per *retta* in uno spazio join si intende un insieme lineare generato da due punti distinti, allora in uno spazio di scambio si ha che per due punti distinti passa una e una sola retta : la retta $\langle a,b\rangle$. Si dimostra, anzi (cf.[10]), che tale proprieta' e' equivalente all'assioma di scambio. Pertanto uno spazio join e' di scambio se e solo se lo spazio geometrico avente le rette come blocchi ha la struttura di uno spazio di rette (*linear space*).

Lo spazio join *box* (esempio 1.3.) non *e'* di scambio. Si considerino, infatti, due punti di $\mathbb{R}^2$ aventi la stessa ordinata $k \in \mathbb{R}$. Allora l'nsieme di equazione $y = k$ e' una retta rispetto alla struttura join *box* , essendo un insieme lineare generato dai due punti dati. Essa non e' pero' l'unica retta contenente i due punti, dato che l'intero $\mathbb{R}^2$ e', rispetto alla struttura *box*, anch'esso una retta, essendo l'involucro lineare di una qualunque coppia di suoi punti che siano in posizione *obliqua* rispetto agli assi (cioe', aventi coordinate omologhe distinte).

Lo spazio *triode* (esempio 1.4.) e' uno spazio di scambio perche' l'intero spazio e' l'unica retta in esso esistente.

Dal Teorema di scambio seguono risultati analoghi a quelli classici sulle basi degli spazi vettoriali. Infatti, si ha (cf.[10]) :

2.14. <u>Teorema</u>.

Se L ha una base finita, allora tutte le basi di L hanno la stessa cardinalita'.

2.15. <u>Teorema</u> (formula di Grassmann).

Se L e M sono sottoinsiemi lineari di dimensione finita si ha :

$$\dim \langle L,M\rangle \le \dim L + \dim M - \dim L\cap M$$

e, se L incide M , allora vale l'uguaglianza.

3. Spazi ordinati e teoremi classici sui convessi.

I tre teoremi classici di Radon, Helly e Caratheodory possono essere generalizzati all'ambito degli spazi join, se si introduce l'ulteriore *assioma dell'ordine* :

OR. $\forall\, a, b, c \in X$ punti distinti di una retta vale una delle tre relazioni :

(3.1) $$a \in bc \quad , \quad b \in ac \quad , \quad c \in ab$$

3.1. Definizione.

Uno spazio join soddisfacente OR e' detto uno *spazio (join) ordinato*.

E' evidente che $\mathbb{R}^n$, con il join vettoriale, e' uno spazio ordinato.

Lo spazio *triode*, invece, (Esempio 1.4.) non e' ordinato. Per rendersene conto, basta prendere i punti a, b, c uno per ciascuna delle tre semirette che costituiscono lo spazio. I tre punti appartengono alla stessa retta, perche' l'intero spazio e' una retta (nella struttura di spazio-join), ma nessuno di essi appartiene al join degli altri due.

Anche gli spazi $\mathbb{R}^n$ con il join *box* (Esempio 1.3.) non sono ordinati, come si puo' vedere direttamente o tenendo conto del fatto che ogni spazio ordinato e' anche di scambio, come mostrato dal seguente Teorema :

3.2. Teorema.

In uno spazio ordinato, se a e b sono punti distinti, $\langle a,b\rangle$ e' l'unica retta contenente a e b e si ha :

$$\langle a,b\rangle = ab \cup \frac{a}{b} \cup \frac{b}{a} \cup a \cup b \;. \tag{3.2}$$

Dimostrazione.

Sia L una retta contenente a e b. Essendo L lineare, certamente $L \supseteq \langle a,b\rangle \supseteq ab \cup \frac{a}{b} \cup \frac{b}{a} \cup a \cup b$. . Sia $x \in L$. Se $x=a$ oppure $x=b$, allora $x \in \langle a,b\rangle$. Sia $x \neq a, b$. Allora $x, a, b \in L$ e OR implica : $x \in ab$ oppure $a \in xb$ oppure $b \in xa$. In ogni caso, $x \in ab \cup \frac{a}{b} \cup \frac{b}{a} \cup a \cup b \subseteq \langle a,b\rangle$.
Cosi', $L \subseteq ab \cup \frac{a}{b} \cup \frac{b}{a} \cup a \cup b \subseteq \langle a,b\rangle$, da cui l'uguaglianza dei tre insiemi ■

Il Teorema ammette la seguente generalizzazione all'involucro lineare di un n-insieme, con $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi:

3.3. Teorema.

In uno spazio ordinato, $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ e' l'unione di tutti gli insiemi esprimibili nelle seguenti forme :

$$\text{(I)} \qquad a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r} \quad , \qquad 1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n \quad ;$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}}{a_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_s}} \quad , \qquad \begin{array}{l} 1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n \quad ; \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_s \le n \quad ; \end{array}$$

con $i_h \ne j_k$ per $h \ne k$.

Per quanto riguarda l'involucro convesso di un n-insieme in uno spazio ordinato, vale la seguente *formula di espansione dei politopi* : se $p \in [a_1,\ldots,a_n]$, allora
$[a_1,\ldots,a_n]=[p,a_2,\ldots,a_n]\cup[a_1,p,a_3,\ldots,a_n]\cup\ldots\cup[a_1,\ldots,a_{n-1}, p]$.

3.4. <u>Teorema</u>.

In uno spazio ordinato, n punti sono C-indipendenti se e solo se sono L-indipendenti.

Dimostrazione.

Sappiamo che in ogni spazio join la L-indipendenza implica la C-indipendenza. Per il viceversa occorre far uso del fatto che lo spazio e' ordinato.

Siano $a_1,\ldots,a_n$ L-dipendenti, allora e', ad esempio, $a_n \in \langle a_1,\ldots,a_{n-1}\rangle$. Per il Teorema 3.3., $a_n \approx a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}$, oppure $a_n \approx \dfrac{a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}}{a_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_s}}$, con le stesse limitazioni del Teorema 3.3. per gli indici. Nel secondo caso, si ha : $a_n a_{j_1} \ldots a_{j_s} \approx a_{i_1} \ldots a_{i_r}$. Pertanto, in entrambi i casi, si ha una relazione di incidenza di due prodotti join fatti con sottoinsiemi disgiunti di $\{a_1, \ldots , a_n\}$ e, quindi, quest'ultimo e' C-dipendente ■

L'equivalenza tra C-indipendenza e L-indipendenza caratterizza gli spazi ordinati. Si dimostra infatti che uno spazio join e' ordinato se e solo se vale tale equivalenza.

Poiche' L-rango e C-rango sono la stessa cosa, nell'ambito degli spazi ordinati si parla semplicemente di *rango* .

3.5. Corollario.

In uno spazio ordinato, ogni $n+1$ punti di un insieme lineare di rango n (cioe' di dimensione $n-1$) sono C-dipendenti.

3.6. Teorema (di Radon).

In uno spazio ordinato X, sia S un insieme di $n+1$ punti di un insieme lineare di dimensione $n-1$, allora esistono sottoinsiemi disgiunti S_1, S_2 di S tali che $[S_1] \approx [S_2]$.

Dimostrazione.

E' un corollario del Corollario 3.5. ■

3.7. Teorema (di Helly).

In uno spazio ordinato X, sia L un insieme lineare di dimensione $n-1 \geq 0$ e siano $A_1,\ldots,A_{n+1}$ sottoinsiemi convessi di L, ogni n dei quali incidenti fra loro, allora tutti gli $n+1$ sottoinsiemi A_i hanno un punto in comune.

Dimostrazione.

E' una immediata conseguenza dei Teoremi 2.7. e 3.4. ■

3.8. Teorema.

Se S e' un n-insieme linearmente dipendente di uno spazio ordinato, allora $[S]$ e' l'unione dei politopi generati dagli (n-1)-sottoinsiemi di S.

Dimostrazione.

Per ogni $p \in [S] = [a_1,\ldots,a_n]$, la formula di espansione dei politopi da'

$$[a_1,\ldots,a_n]=[p,a_2,\ldots,a_n]\cup[a_1,p,a_3,\ldots,a_n]\cup\ldots\cup[a_1,\ldots,a_{n-1}, p].$$

Essendo S L-dipendente, quindi C-dipendente, gli addendi dell'unione al secondo membro dell'uguaglianza hanno un punto in comune. Scegliendo tale punto come p nell'uguaglianza, esso e' ridondante in ogni addendo dell'unione ■

Un politopo generato da n punti linearmente indipendenti e' detto un *simplesso*.

3.9. Corollario.

In uno spazio ordinato, ogni politopo P e' esprimibile come unione finita di simplessi i cui vertici sono in P.

Dimostrazione.

Usando termini diversi, Il Teorema 3.8. afferma che, in uno spazio ordinato, se un politopo ha n vertici e non e' un simplesso, esso e' l'unione dei politopi generati da $n-1$ suoi vertici. Se questi politopi sono tutti simplessi, la dimostrazione e' completata ; in caso contrario si procede per induzione ∎

Il Corollario afferma, in altri termini, che ogni punto di un politopo P, in uno spazio ordinato, e' contenuto in un simplesso con vertici in P.

3.10. Teorema.

In uno spazio ordinato, sia A un insieme convesso di rango r. Sia S un insieme di C-generatori di A. Allora A e' l'unione di una famiglia di simplessi di rango non superiore ad r ciascuno dei quali ha tutti i vertici in S.

Dimostrazione.

Se $x \in [S] = A$, esiste un sottoinsieme finito F di S tale che $x \in [F]$. $[F]$ e' un politopo di rango al piu' r ∎

3.11. Teorema (di Caratheodory).

Sia L un insieme lineare di dimensione $n-1$ in uno spazio ordinato. Sia $S \subseteq L$. Allora $x \in [S]$ se e solo se x e' in un prodotto-join di al piu' n punti di S.

Dimostrazione.

Se x e' in un prodotto-join di n punti di S, allora certamente $x \in [S]$. Sia, viceversa, $x \in [S]$. Poiche' L ha dimensione $n-1$ e, quindi, rango n, il rango di $[S]$ e' al piu' n. Allora, per il Teorema 3.10., $[S]$ e' l'unione di una famiglia di simplessi di rango al piu' n, aventi vertici in S. x appartiene, quindi, ad un simplesso di rango al piu' n, generato cioe' da al piu' n punti di S ; ne segue che x appartiene ad un prodotto-join formato con alcuni di questi punti ∎

Chi ha presente la formulazione classica del Teorema di Caratheodory puo' riconoscere che il Teorema 3.11. e' una sua generalizzazione semplicemente osservando che , nel caso del join vettoriale, un punto p appartiene al prodotto join di n punti se e solo se p e' esprimibile come combinazione convessa degli stessi.

Concludiamo con una elegante caratterizzazione, in termini del prodotto-join, dell'involucro convesso di un sottoinsieme di un insieme lineare di data dimensione.

3.12. <u>Teorema</u>.

In uno spazio ordinato, sia S un sottoinsieme dell'insieme lineare non vuoto L di dimensione $n-1$. Allora $[S] = S^n$, dove il secondo membro indica il prodotto join di S con se stesso n volte (potenza n-esima nell'ipergruppo).

Dimostrazione.

Sia $x \in [S]$. Per il Teorema 3.11. esistono m punti, con $m \leq n$, di S : $a_1, \ldots, a_m$ tali che $x \in a_1 \ldots a_m$ Quest'ultimo insieme e' contenuto in S^n in virtu' dell'idempotenza del join. Pertanto, $[S] \subseteq S^n$. Il viceversa segue dal fatto che $[S] \supseteq S \cup S^2 \cup \ldots \cup S^n \cup \ldots$ ∎

I risultati esposti in questo articolo possono dare solo una prima idea del lavoro svolto per decenni dal fondatore della teoria, Walter Prenowitz, e dai suoi collaboratori, in particolare James Jantosciak. Essi, con l'uso delle sole operazioni di join e di estensione hanno introdotto con successo nozioni di Topologia, collegandole a quelle di *faccia* e di *iperpiano tangente*, e hanno applicato le tecniche delle *join Geometries* anche alla teoria dei coni, alle geometrie descrittive e sferiche, argomenti per i quali si rimanda alla bibliografia.

BIBLIOGRAFIA

[1] *V.W.Bryant, R.J.Webster*, Generalizations of the theorems of Radon, Helly and Caratheodory. Monatsh.Math.73 (1969), 309-315.

[2] *B.Grünbaum*, Convex Polytopes, New York, Interscience (1967).

[3] *W.Prenowitz*, Descriptive Geometries as Multigroups, Trans. Amer. Math. Soc.59 (1946), 333-380.

[4] *W.Prenowitz*, Partially Ordered Fields and Geometries, Amer. Math. Monthly 53 (1946), 439-449.

[5] *W.Prenowitz*, Spherical Geometries and Multigroups, Canad.J.Math. 2 (1950), 100-119.

[6] *W.Prenowitz*, Projective Geometries as Multigroups, Amer.J.Math. 65 (1943), 235-256.

[7] *W.Prenowitz*, A Contemporary Approach to Classical Geometry, Amer.Math.Monthly 68 (1961),no.1 part II.

[8] *W.Prenowitz, J.Jantosciak*, Geometries and Join Spaces, J.reine und ang. Math.(1972), 100-128.

[9]*W.Prenowitz, J.Jantosciak*, Basic Concepts of Geometry. New York, Blaisdell (1965).

[10] *W.Prenowitz, J.Jantosciak*, Join Geometries, A Theory of Convex Sets and Linear Geometry, UTM , Springer-Verlag (1979).

[11] *A.Seidenberg*, Lectures on Projective Geometry. Princeton 1962.

[12] *A.Zirakzadeh*, A Model for Finite Projective Spaces with Three Points on Every Line, Amer.Math.Monthly 76 (1969), 774-778.