UN ESEMPIO DI ALGEBRA NON ASSOCIATIVA ALLA MANIERA DEI QUATERNIONI

Franco Eugeni e Fulvio Zuanni

Dedicato alla memoria del Prof. Ilio Adorisio e del Prof. Giovanni Melzi. La loro recente scomparsa ci lascia un vuoto incolmabile.

1. INTRODUZIONE

Nella prima meta' del XIX secolo i Matematici, dietro l'impulso di K.F. Gauss, fecero numerosi tentativi per estendere "in qualche modo" il campo dei numeri reali. Naturalmente vennero fatti sia tentativi di generalizzare "l'idea $i = \sqrt{-1}$ " sia tentativi per conquistare altri "ambienti" contenenti il campo dei numeri complessi. Tali tentativi non furono all'inizio molto fruttuosi, poiche' si cercava di conservare almeno tutto il blocco delle proprieta' formali dei numeri complessi in quanto i piu' ritennero che tali proprieta' non potessero essere abbandonate. La logica per conquistare i numeri ipercomplessi doveva essere necessariamente quella che conduceva all'impoverimento delle proprieta' moltiplicative. Cosi nacquero altri numeri del tipo dei complessi e precisamente i <u>numeri duali</u> ($i^2=0$) e i <u>numeri bireali</u> ($i^2=1$), in essi erano salve tutte le proprieta' formali ma erano presenti numeri non nulli a prodotto nullo (i classici divisori dello zero) . Nacquero in pari tempo nuovi numeri, senza divisori dello zero, ma nei quali mancano altre proprieta', precisamente i <u>quaternioni</u> (non commutativi), gli <u>ottetti di Cayley</u> e <u>i numeri di Clifford</u> nei quali manca anche la proprieta' associativa della moltiplicazione.

Per "inventare" questi nuovi numeri ed accettare e comprendere la "logica delle rinuncie" occorreva un cervello multiforme e il saper guardare i numeri complessi da varie sfaccettature e da diversi punti di vista. Una eventuale generalizzazione, anche a costo della perdita di qualche proprieta', poteva nascere da oggetti dai quali scaturissero anche "applicazioni" interessanti e feconde. E i quaternioni trovaro applicazioni in Fisica Teorica e Geometria nell'immediato , cio' ratifico' una certa sorta di successo che tali strutture ebbero, forse al di la' della loro reale importanza. L'inventore dei quaternioni fu' il matematico irlandese William Rowen Hamilton (1805-1865), laureatosi al Trinity College di Dublino, ed ivi rimasto quale professore di astronomia. Buon conoscitore di calcolo infinitesimale, si dedico' alla matematizzazione della dinamica e dell'ottica geometrica, tentandone generalizzazioni indipendenti dal modello fisico della causa del fenomeno. Giunse anche a dare una generalizzazione del principio della minima azione e ad elaborare la formulazione generale delle equazioni del moto dei sistemi (equazioni di Hamilton), che tutti ben conosciamo . Espose la teoria dei quaternioni (1853), la moltiplicazione da lui definita sui quaternioni nonostante la mancanza della proprieta' commutativa, anzi potremmo dire "grazie alla mancanza...", trovo' interessanti applicazioni all'inizio del secolo scorso, nella teoria generale delle algebre lineari e anche nel calcolo vettoriale. I nuovi numeri potevano venire utilizzati per descrivere le rotazioni spaziali attorno ad una retta, e in generale il gruppo delle rotazioni dello spazio.

2. LA NOZIONE DI ALGEBRA SU UN CAMPO

Il presente paragrafo e' di carattere compilativo e riassume brevemente la nozione di algebra su un campo e le principali proprieta' di dette strutture.

DEFINIZIONE. Un insieme non vuoto $\mathbb{A}$ si chiama algebra sopra un campo K se:

a) l'ente $(\mathbb{A},K)$ e' uno spazio vettoriale;

b) in $\mathbb{A}$ e' definita un'operazione $(\cdot)$: $\mathbb{A}\times\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ binaria ed interna detta "moltiplicazione" che per definizione gode della proprieta' distributiva a destra e a sinistra rispetto all'operazione di addizione di vettori.

c) per ogni $a \in K$ e quali che siano $\underline{u}$, $\underline{v} \in \mathbb{A}$ si ha

$$(a\underline{u})\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot(a\underline{v}) = a (\underline{u}\cdot\underline{v}) .$$

Un'algebra $\mathbb{A}$ si dice associativa, commutativa, unitaria, primitiva, secondo che il prodotto dei vettori goda o no, rispettivamente, delle proprieta' associativa, commutativa, ammetta elemento unitario, non ammetta divisori dello zero.

Si noti che ogni algebra associativa, in particolare, e' un anello. Si dice, inoltre, che un'algebra e' a base finita, quando e' di dimensione finita lo spazio vettoriale $(\mathbb{A},K)$. In questo caso, detta n la dimensione dello spazio, si dice che l'algebra ha dimensione n .

Due algebre $\mathbb{A}$ ed $\mathbb{A}'$ su un campo K si dicono isomorfe, se esiste un isomorfismo tra gli spazi vettoriali subordinati che sia un isomorfismo anche rispetto alla struttura moltiplicativa e che, in particolare, muti l'elemento unitario nell'elemento unitario, se tale elemento esiste (anzi si richiede che se ne esiste uno allora deve esistere anche l'altro e devono corrispondersi).

Una algebra $\mathbb{A}$, definita sul campo reale $\mathbb{R}$, si dice una algebra di numeri ipercomplessi, se:

1) $\mathbb{A}$ e' a base finita;

2) $\mathbb{A}$ e' unitaria, ed inoltre denotato con $\underline{\alpha}$ l'elemento unitario, la struttura di $\mathbb{A}$ induce sull'insieme $\{\lambda\,\underline{\alpha} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ dei multipli di $\underline{\alpha}$ una struttura isomorfa a quella di $\mathbb{R}$.

Per indagare su quest'ultima struttura, occorre premettere qualche osservazione sulle algebre a base finita, che presentano un certo interesse. Sia $\left\{ \underline{e}_i \right\}_{i\in I}$ una base di $\mathbb{A}$ e siano :

$$\underline{u} = u^i \underline{e}_i \qquad , \qquad \underline{v} = v^i \underline{e}_i \qquad .$$

due vettori. Risulta, per gli assiomi b) e c) :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u^i v^j \, (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)$$

I vettori $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j$ dovranno essere noti a loro volta ed essi saranno dati mediante una espressione del tipo:

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = C^s_{ij}\, \underline{e}_s \qquad ,$$

in modo che potra' scriversi:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = C^s_{ij} \, u^i \, v^j \, \underline{e}_s \qquad .$$

Le costanti C^s_{ij} prendono il nome di costanti di struttura dell'algebra A rispetto alla base fissata.

Si hanno i seguenti:

TEOREMA 1. Condizione necessaria e sufficiente a che un'algebra A di dimensione finita su un campo K sia associativa e' che siano associativi i prodotti degli elementi della base .

TEOREMA 2. Condizione necessaria e sufficiente a che in un algebra A di dimensione finita nel campo K il prodotto sia commutativo e' che sia commutativo il prodotto di due qualsiasi elementi della base, il che equivale a dire che le costanti di struttura siano simmetriche rispetto agli indici inferiori .

Due algebre A ed A' , sullo stesso campo K, si dicono isomorfe se esiste un'applicazione

$$f : A \longrightarrow A'$$

che sia un isomorfismo sia tra gli spazi vettoriali sottesi sia tra le strutture moltiplicative. Inoltre se una delle due algebre e' unitaria, allora e' unitaria anche l'altra e i due elementi unitari sono corrispondenti.

Si noti che mentre due spazi vettoriali della stessa dimensione n sullo stesso campo K sono necessariamente isomorfi cio' non accade piu' tra due algebre.

Dati due spazi vettoriali, di sostegni rispettivamente A e A' , aventi la stessa dimensione n e definiti sullo stesso campo K ,

se $\left\{ \underline{e}_i \right\}$ è una base di $\left(A , K \right)$ e

$$f : A \longrightarrow A'$$

e' un isomorfismo allora, come e' noto, i vettori $\underline{U}_i = f\left(\underline{e}_i\right)$ formano una base in $\left(A', K\right)$, detta base corrispondente alla data nell'isomorfismo f.

Si ha il seguente:

TEOREMA 3.- <u>Condizione necessaria e sufficiente a che due algebre $\mathbb{A}$ ed $\mathbb{A}'$ della stessa dimensione (finita) sullo stesso campo K siano tra loro isomorfe e' che le costanti di struttura in due basi corrispondenti siano le stesse</u>.

<u>Dim</u>. Infatti, se f e' un isomorfismo tra le due algebre, si ha:

$$f\left(\underline{u} \circ \underline{v}\right) = f\left(\underline{u}\right) \circ f\left(\underline{v}\right)$$

e inoltre

$$f\left(\underline{u}\right) = u^i f\left(\underline{e}_i\right) = u^i \underline{U}_i$$

$$f\left(\underline{v}\right) = v^i f\left(\underline{e}_i\right) = v^i \underline{U}_i$$

$$(*) \quad f\left(\underline{u}\right) \circ f\left(\underline{v}\right) = u^i v^j C^{s'}_{ij}\, \underline{U}_s \quad ,$$

ove le $C^{s'}_{ij}$ sono le costanti dell'algebra $\mathbb{A}'$. Del resto e'

$$(**) \; f\left(\underline{u} \circ \underline{v}\right) = f\left[\left(u^i v^j C^s_{ij}\right) \underline{e}_s\right] =$$

$$= C^s_{ij}\, u^i v^j f\left(\underline{e}_s\right) = C^s_{ij}\, u^i v^j \underline{U}_s \quad ,$$

onde confrontando tra loro la (*) e la (**) si conclude:

$$C^s_{ij} = C^{s'}_{ij} \quad .$$

Inversamente, se

$$C^s_{ij} = C^{s'}_{ij}$$

allora

$$C^{s}_{ij}\, u^{i}\, v^{j}\, \underline{U}_{s} \;=\; C^{s'}_{ij}\, u^{i}\, v^{j}\, \underline{U}_{s}$$

e, sempre dalle (*) e (**), si deduce:

$$f\left(\underline{u}\circ\underline{v}\right) \;=\; f\left(\underline{u}\right)\circ f\left(\underline{v}\right) \quad . \qquad \square$$

3. LEGGE DI TRASFORMAZIONE DELLE COSTANTI DI STRUTTURA IN UN'ALGEBRA DI DIMENSIONE FINITA

Sia $\mathbb{A}$ un'algebra finita di dimensione n sul campo K e siano $\left\{\underline{e}_i\right\}$, $\left\{\underline{e}_{i'}\right\}$ due basi dello spazio vettoriale subordinato $\left(A\ ,\ K\right)$, legate dalle formule:

$$\underline{e}_i \;=\; e^{i'}_{i}\, \underline{e}_{i'} \qquad .$$

Siano C^{k}_{ij} e $C^{k'}_{i'j'}$ le costanti di struttura rispetto alle due basi . Mostriamo che per le costanti di struttura sussiste la seguente <u>formula</u> <u>di</u> <u>trasformazione</u>:

$$C^{k'}_{i'j'} \;=\; e^{k'}_{k}\, e^{j}_{j'}\, e^{i}_{i'}\, C^{k}_{ij} \qquad .$$

Infatti, si ha :

$$\underline{e}_i\, \underline{e}_j \;=\; C^{k}_{ij}\, \underline{e}_k$$

$$(*) \qquad \underline{e}_i\, \underline{e}_j \;=\; C^{k}_{ij}\, e^{k'}_{k}\, \underline{e}_{k'}$$

$$\underline{e}_i\, \underline{e}_j \;=\; (e^{i'}_{i}\, \underline{e}_{i'})(e^{j'}_{j}\, \underline{e}_{j'})$$

$$\underline{e}_i\, \underline{e}_j \;=\; e^{i'}_{i}\, e^{j'}_{j}\, \underline{e}_{i'}\underline{e}_{j'}$$

$$(**) \qquad \underline{e}_i\, \underline{e}_j \;=\; e^{i'}_{i}\, e^{j'}_{j}\, C^{k'}_{i'j'}\underline{e}_{k'}$$

da (*) e (**) si ha

$$C^{k}_{ij}\; e^{k'}_{k}\, e_{k'} = e^{i'}_{i}\, e^{j'}_{j}\, C^{k'}_{i'j'}\, e_{k'}$$

da cui

$$C^{k}_{ij}\; e^{k'}_{k} = e^{i'}_{i}\, e^{j'}_{j}\, C^{k'}_{i'j'}$$

onde

$$C^{k'}_{i'j'} = e^{i}_{i'}\, e^{j}_{j'}\, e^{k'}_{k}\, C^{k}_{ij}$$

Ne segue che:

Date due algebre $\mathbb{A}$ ed $\mathbb{A}'$ sullo stesso campo K, aventi in comune lo stesso spazio subordinato $\left(\mathbb{A}\ ,\ K \right)$, condizione necessaria e sufficiente a che $\mathbb{A}$ ed $\mathbb{A}'$ siano isomorfe e' che, considerate due basi e le costanti di struttura rispetto alle due basi, sia possibile determinare un cambiamento delle base che faccia corrispondere le suddette costanti di struttura .

4. IL CORPO DEI QUATERNIONI

Chiamasi quaternione la somma formale di un numero reale con un vettore tridimensionale:

$$a + \vec{u} = a + u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\ .$$

Detto $\mathbb{q}$ l'insieme dei quaternioni scriveremo formalmente

$$\mathbb{q} := \mathbb{R} + \mathbb{V}$$

essendo $\mathbb{V}$ lo spazio dei vettori ordinari. Definiamo in $\mathbb{q}$ due operazioni ponendo $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{V}$:

$$(2.1)\qquad (a + \vec{u}) + (b + \vec{v}) := (a + b) + (\vec{u} + \vec{v})$$

$$(2.2)\qquad (a + \vec{u}) \cdot (b + \vec{v}) := ab + a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Riportiamo una "battuta demenziale" che è veramente utile per ricordare la definizione di prodotto: nel calcolare il prodotto e' naturale fare il prodotto dei binomi termine a termine cosi' si ottiene ab, $a\vec{v}$, $b\vec{u}$ ma nel calcolare il prodotto vettore per vettore non sappiamo se mettere il prodotto vettoriale o quello scalare: per non sbagliare li mettiamo tutti e due!
Il prodotto scalare e' preso con il segno meno in modo da avere

$$(0 + i)\ (0 + i) = i^2 = -1$$

Naturalmente

$$(a + \vec{u})\ (b + \vec{v}) = (b + \vec{v})\ (a + \vec{u})$$

se e solo se

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = = \vec{v} \wedge \vec{u}$$

cioe', se e solo se

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}\ .$$

Segue:

Il prodotto di due quaternioni e' commutativo se e solo se le due parti vettoriali sono parallele.

Il lettore puo', per convincersi, dimostrare per esercizio che:

La struttura algebrica $(q,+,\cdot)$ e' un anello unitario (non commutativo).

Si chiama norma o modulo del quaternione $a + \vec{u}$ il numero reale

$$\|a + \vec{u}\| = \sqrt{|a|^2 + \|\vec{u}\|^2} = \sqrt{a^2 + u^2}$$

essendo u la norma o modulo del vettore $\vec{u}$.

Si chiama coniugato del quaternione $a + \vec{u}$ il quaternione $a - \vec{u}$.

Dimostriamo che:

Ogni quaternione non nullo $a + \vec{u}$ ha inverso e tale inverso e' dato da:

$$(a + \vec{u})^{-1} := \frac{a - \vec{u}}{\|a + \vec{u}\|^2}\ .$$

Infatti

$$(a + \vec{u})\ (a - \vec{u}) = a^2 - \vec{u} \wedge \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{u} = \|a + \vec{u}\|^2\ .$$

Dunque la struttura algebrica $(q,+,\cdot)$ e' un corpo sghembo.

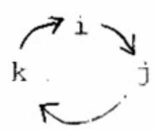
E' evidente che ciascuno dei sottoinsiemi di q costituiti dai quaternioni del tipo $a + bi$ ovvero $a + bj$ ovvero $a + bk$ costituisce una sottostruttura isomorfa a quella dei numeri complessi. Piu' in generale se $\vec{r}$ e' un versore i numeri del tipo $a + b\vec{r}$ formano una struttura isomorfa al campo complesso.

E' interessante vedere che la definizione di prodotto di due quaternioni data dalla (2.2) coincide con quella classica che normalmente si trova nei testi. È semplice esercizio provare che

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k\ ,\ jk = i\ ,\ ki = j$$

$$ji = -k\ ,\ kj = -i\ ,\ ik = -j\ .$$



5. UN PRODOTTO VETTORIALE PLURIDIMENSIONALE ED UNA INTERESSANTE ALGEBRA NON ASSOCIATIVA.

Denotiamo con V_n uno spazio vettoriale n-dimensionale sul campo reale $\mathbb{R}$ e sia :

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

una base ortonormale dello spazio.
Definiamo ora, dati due vettori

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \dots + u_n\vec{e}_n$$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \dots + v_n\vec{e}_n$$

un prodotto binario interno in V_n , che chiameremo prodotto vettoriale, mediante la seguente formula simbolica:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = - \vec{v} \wedge \vec{u} := \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{vmatrix} :=$$

$$:= \begin{vmatrix} u_{n-1} & u_n \\ v_{n-1} & v_n \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} u_n & u_1 \\ v_n & v_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 + \dots + \begin{vmatrix} u_{n-2} & u_{n-1} \\ v_{n-2} & v_{n-1} \end{vmatrix} \vec{e}_n$$

E' immediato convincersi che risulta (pensando alla permutazione circolare 1,2,...,n,1 con 1 successivo di n) :

(3.1) $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_{i+1} = \vec{e}_{i+2}$ $\quad i=1,2, \dots ,n$ con $n+1 = 1$, $n+2 = 2, \dots$

(3.2) $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = \vec{0}$ $\quad$ se $j \neq i+1$

Notiamo che se due vettori non nulli $\vec{u}$, $\vec{v}$ sono paralleli allora il loro prodotto vettoriale e' nullo essendo le componenti proporzionali. Tuttavia il prodotto puo' annullarsi anche in altri casi essendo, per $n > 3$, sufficiente il solo annullarsi dei seguenti minori:

$$\begin{vmatrix} u_{n-1} & u_n \\ v_{n-1} & v_n \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} u_n & u_1 \\ v_n & v_1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} , \dots , \begin{vmatrix} u_{n-2} & u_{n-1} \\ v_{n-2} & v_{n-1} \end{vmatrix}$$

che sono solo una parte dei minori della matrice:

$$\begin{vmatrix} u_1 u_2 & \dots & u_n \\ v_1 v_2 & \dots & v_n \end{vmatrix}$$

Chiamasi pseudo quaternione la somma formale di un numero reale con un vettore n - dimensionale:

$$a + \vec{u} = a + u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \dots + u_n\vec{e}_n$$

Detto Ξ l'insieme dei pseudo-quaternioni scriveremo formalmente

$$\Xi := \mathbb{R} + \mathbb{V}_n \; .$$

Definiamo in Ξ due operazioni ponendo $\forall\ a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \vec{u},\vec{v} \in \mathbb{V}_n$:

(3.3) $$(a + \vec{u}) + (b + \vec{v}) := (a + b) + (\vec{u} + \vec{v})$$

(3.4) $$b\ (a + \vec{u}) := ba + b\ \vec{u}$$

(3.5) $$(a + \vec{u}) \cdot (b + \vec{v}) := ab + a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}$$

dove:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

essendo la base di $\mathbb{V}_n$ ortonormale.
Anche in questo caso pluridimensionale risulta

$$(a + \vec{u})\ (b + \vec{v}) = (b + \vec{v})\ (a + \vec{u})$$

se e solo se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ cioe' se e solo se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
Quindi:

<u>Il prodotto di due pseudo quaternioni e' commutativo se e solo se le due parti vettoriali hanno prodotto vettore nullo.</u>

Da notare che non appena $n > 3$ esistono vettori non nulli e non paralleli con prodotto vettore nullo, ad esempio quelli forniti dalla (3.2).

Il lettore puo', per convincersi, dimostrare per esercizio che:
<u>La struttura algebrica</u> $(\Xi,+,\cdot,\ \cdot)$ <u>e' una algebra unitaria</u>, (non associativa e non commutativa).

Per quanto concerne la non validita' della proprieta' associativa si noti che non appena risulti $n > 3$ si ha (per le (3.1) e (3.2)) il seguente esempio:

$$\vec{e}_1 \star (\vec{e}_2 \star \vec{e}_4) = \vec{e}_1 \star (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_4) = \vec{e}_1 \star \vec{0} = \vec{0}$$

$$(\vec{e}_1 \star \vec{e}_2) \star \vec{e}_4 = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \star \vec{e}_4 = \vec{e}_3 \star \vec{e}_4 \neq \vec{0}.$$

Un problema aperto ed interessante e' quello di caratterizzare le terne di elementi che godono della proprieta' associativa.

Si ricava, con semplici calcoli, l'identita' :

$$(I)\quad (a+\vec{u})*\left[(b+\vec{v})*(c+\vec{w})\right] + \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) + \left[(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\right] =$$

$$= \left[(a+\vec{u})*(b+\vec{v})\right]*(c+\vec{w}) + (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w} + \left[(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}\right]$$

Nel caso 3-dimensionale sono valide le due formule, note come "doppio prodotto vettoriale" e "prodotto misto", seguenti:

$$(II)\qquad \left[(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\right] = \left[(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}\right]$$

$$(III)\qquad \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Esse implicano, per l'identita'(I), la validita della proprieta' associativa del prodotto di quaternioni.
Dunque la proprieta' associativa per una terna di vettori e' valida nel caso generale tutte le volte che i tre vettori verificano le (II) e (III).

Si chiama norma o modulo del pseudo-quaternione $(a + \vec{u})$ il numero reale

$$\|a+\vec{u}\| = \sqrt{|a|^2 + \|\vec{u}\|^2} = \sqrt{a^2+u^2}$$

essendo u la norma o modulo del vettore $\vec{u}$, data in questo caso da:

$$u^2 = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + \ldots + u_n^{\,2}$$

Anche in questo caso si chiama coniugato di $(a + \vec{u})$ l'elemento di Ξ della forma $(a - \vec{u})$. Dimostriamo che:

Ogni pseudo-quaternione non nullo $(a + \vec{u})$ ha inverso, essendo tale inverso dato da:

$$(a+\vec{u})^{-1} := \frac{a-\vec{u}}{\|a+\vec{u}\|^2} .$$

come segue dal banale calcolo :

$$(a+\vec{u})\,(a-\vec{u}) = a^2 - \vec{u}\wedge\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{u} = \|a+\vec{u}\|^2 .$$

Va rimarcato ed e' notevole che in questa algebra elementi invertibili possono essere divisori dello zero (per la non associativita' della moltiplicazione), ad esempio:

$\vec{e}_1$ ha come inverso moltiplicativo $-\vec{e}_1$

$\vec{e}_1$ e' divisore complementare dello zero di combinazioni lineari dei vettori $\vec{e}_3, \vec{e}_4, \ldots, \vec{e}_{n-1}$.

Per pervenire ad una caratterizzazione dei divisori dello zero proviamo i teoremi seguenti:

TEOREMA 1. Gli elementi $(a + \vec{u})$, $(b + \vec{v}) \in \Xi$ non sono divisori complementari dello zero se le due parti vettoriali sono linearmente dipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo, essendo $\vec{r}$ un fissato opportuno versore :

$$a + \vec{u} := a + c\,\vec{r} \quad , \quad b + \vec{v} := x + y\,\vec{r}$$

Risulta:

$$(a + c\vec{r})*\ (x + y\vec{r}) = ax - cy + (ay + cx)\,\vec{r} = \vec{0}^{\not c}$$

da cui il sistema :

$$ax - cy = 0 \quad , \quad cx + ay = 0$$

che ammette solo la soluzione nulla sia letto nelle incognite x ed y che nelle incognite a e b. □

OSSERVAZIONE. Il teorema precedente segue anche dall'osservazione che i pseudo quaternioni del tipo $a + \vec{u} := a + c\,\vec{r}$ con $a\,,c \in \mathbb{R}$ed $\vec{r}$ versore fissato, costituiscono una algebra isomorfa a quella dei numeri complessi, come ovvio.

TEOREMA 2. Gli elementi $(a + \vec{u})$, $(b + \vec{v}) \in \Xi$ con le parti vettoriali linearmente indipendenti sono divisori complementari dello zero se e solo se :

$$(*) \qquad a = b = 0\ , \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0\ , \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}\ .$$

DIMOSTRAZIONE. Se valgono le (*) l'asserto segue dalla (3.5).

Per il viceversa, l'annullarsi della (3.5) implica:

$$(a + \vec{u}) \cdot (b + \vec{v}) := ab + a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

cioe'

$$ab - \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad , \quad a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Si vede facilmente che la seconda e' impossibile quando e' :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$$

Infatti, essendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ linearmente indipendenti, e' possibile assumerli nella forma $\vec{u} = \vec{e}_1$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \lambda\,\vec{e}_2$, da cui risulta:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \end{vmatrix} := \lambda\,\vec{e}_3$$

che e' linearmente indipendente con i vettori dati.

Dunque e' $a\vec{v} + b\vec{u} = \vec{0}$ da cui $a = b = 0$ e quindi si annulla anche il prodotto scalare. Valgono allora le (*). □

BIBLIOGRAFIA

[1] B.M. FRAEIJS de VEUBEKE, A Course in Elasticity, Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[2] E.A.MILNE, Vectorial Mechanics, Methuen, London, 1946.

[3] F.RUSSO SPENA, Una nota sull'algebra dei quaternioni e la rotazioni non infinitesime. Presentato a rivista.

[4] C.TRUESDELL-R.TOUPIN, The Classical Field Theories, Handbuch der Phisik, Band III/1, Springer Verlag, Berlin, 1960.