UNA FORMULAZIONE VARIAZIONALE COMPLETAMENTARE DEL PROBLEMA DI VERIFICA DI RETI DI DISTRIBUZIONE DI FLUIDO INCOMPRESSIBILE

Francesco Russo Spena* Andrea Vacca**

Sommario

Nel presente lavoro si analizza il classico problema di verifica di reti di distribuzione di fluido newtoniano incompressibile in regime di moto stazionario. Viene presentato un principio variazionale complementare che consente di acquisire la dimostrazione delle proprietà di esistenza ed unicità della soluzione del problema di verifica.

Summary

The paper deals with the classical problem arising in the analysis of fluid distribution systems in steady state of flow. A variational complementary principle is stated allowing the proof about the existence and uniqueness properties of solution.

1. Introduzione

È ben noto [1] che il problema di verifica di reti di distribuzione di fluidi newtoniani incompressibili in regime di moto stazionario è strettamente analogo a quello di verifica di telai elastici soggetti all'azione di sole coppie nodali.

Dal punto di vista analitico, infatti, entrambi i problemi sono caratterizzati da due insiemi di variabili duali o coniugate mutuamente collegati da trasformazioni lineari: uno dei due insiemi di variabili soddisfa la condizione di presentare somma algebrica nulla nei nodi della rete; l'altro gode della proprietà di avere somma algebrica nulla lungo ciascun percorso chiuso o maglia della rete.

Basandosi su questa proprietà di aggiunzione algebrica delle variabili duali, la formulazione generale del problema di verifica può essere conseguita con approccio variazionale, mediante

*Professore Associato, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli "Federico II".

**Allievo "Dottorato di Ricerca in Ingegneria Idraulica", Università di Napoli "Federico II".

il quale la soluzione viene ottenuta in base alle condizioni di stazionarietà di una coppia di funzionali reciproci nelle variabili duali che, dal punto di vista fisico, sono connessi alla dissipazione di potenza per attrito espressa in termini di portate volumetriche o di perdite di carico.

Seguendo questa impostazione e, grazie alla finita numerabilità degli spazi vettoriali implicati, si è ricondotti a due indirizzi computazionali alternativi: il primo utilizza metodi della Programmazione Matematica [4, 5], specializzati per l'analisi di problemi di minimizzazione condizionata; il secondo si basa sulla soluzione diretta dei tre sistemi di equazioni algebriche che presiedono al problema e che esprimono rispettivamente:

i) le condizioni di continuità delle portate per ciascun nodo della rete;

ii) le equazioni tra le perdite di carico agli estremi di ciascun ramo della rete ed i carichi idraulici nei nodi collegati dal medesimo ramo;

iii) le equazioni del moto che esprimono il legame tra perdita di carico lungo il generico ramo della rete e portata volumetrica defluente lungo il medesimo.

La formulazione del problema può essere ulteriormente generalizzata allo scopo di schematizzare reti di distribuzione comprendenti serbatoi di alimentazione o di compenso, di dispositivi di regolazione, di intercettazione, di regolazione inseriti nella rete in modo affatto generico [6].

In assenza di dispositivi idraulici e con riferimento ad espressioni monomie per i legami tra portata e perdita di carico nelle condotte, le proprietà di esistenza e di unicità della soluzione del problema di verifica delle reti idrauliche sono state dimostrate da Andrea Russo Spena [2] in un contesto variazionale.

Per quanto risulta agli scriventi non sembra che le medesime proprietà siano state dimostrate con riferimento a reti provviste di dispositivi del tipo sopra richiamato e con riferimento ad espressioni non monomie per il legame portata–perdita di carico.

Nel presente lavoro viene presentata la formulazione del problema di verifica ambientandola in spazi vettoriali astratti normati secondo il prodotto scalare e vengono applicati noti risultati su funzionali convessi definiti in insieme convesso, e sui cosiddetti super–potenziali di dissipazione [11].

Nel paragrafo 2 il problema viene presentato nella sua classica forma algebrica.

Nel paragrafo 3 viene acquisita la formulazione variazionale astratta e, dopo averne dimostrato l'equivalenza con il problema algebrico si fornisce la prova di esistenza ed unicità della soluzione.

2. Formulazione del problema

Ai fini di una schematizzazione di validità generale, una rete di distribuzione di fluido newtoniano incompressibile è da considerarsi costituita di $\tilde{\ell}$ rami (tratti di condotta di diametro e scabrezza costanti); $\tilde{n}$ punti nodali (punti nei quali convergono due o più condotte ovvero punti di una medesima condotta in cui si ha un brusco cambiamento della scabrezza o della portata); t dispositivi di intercettazione, di strozzamento parziale o totale del flusso, di apparecchi di misura o di erogazione.

Il modello matematico corrispondente dovrà pertanto far riferimento alle seguenti equazioni:

i) equazioni che esprimono la continuità tra portate volumetriche $\mathbf{q}$ defluenti nei rami della rete (condotte o dispositivi) e portate $\mathbf{p}$ esterne erogate o immesse nei nodi medesimi[1]

$$\mathbf{Tq} + \mathbf{p} = 0 \tag{2.1}$$

in cui $\mathbf{T}$ denota la matrice topologica $(\tilde{n}, \tilde{\ell})$ di rango $\tilde{n} - 1$ [7], il cui elemento generico t_{ij} è rispettivamente: uguale $a + 1$ se il j–mo ramo ha inizio nel nodo i–mo; uguale a -1 se il j–mo ramo ha termine nel nodo i–mo; uguale a 0 se il lato j–mo non afferisce al nodo i–mo.

ii) equazioni che esprimono la continuità geometrica tra perdite di carico $\mathbf{x}$ nei rami della rete e quote piezometriche nodali $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^t \mathbf{y} \tag{2.2}$$

iii$_a$) equazioni che esprimono il legame tra portate $\mathbf{q}$ defluenti lungo i rami della rete e perdite di carico associate $\mathbf{x}$ rappresentate nella seguente forma generale

$$q_j = \psi_j(x_j) \qquad \forall j \in \{1, \dots, \tilde{\ell} + t\} \tag{2.3}$$

Alla relazione funzionale genericamente espressa dalla (2.3) occorrerà assegnare una specifica espressione secondo che essa si riferisca ad un ramo di condotta o ad un dispositivo. Per quanto attiene alla caratterizzazione dei dispositivi si farà riferimento alla seguente rappresentazione analitica

$$q_j = r_j + s_j x_j |x_j|^{\tau_j} \qquad \forall j \in \{1, \dots, t\} \tag{2.4}$$

I parametri r_j, s_j e l'esponente τ_j sono ottenuti con algoritmi di interpolazione applicati al campo di prestazioni sperimentali esibite dal dispositivo stesso.
Con riferimento invece ai tratti di condotta cilindrica e relativamente a fluido newtoniano incompressibile in regime di moto stazionario, alla relazione (2.3) si attribuisce la forma analitica espressa dalla equazione di Darcy–Weisbach generalizzata

$$x = \lambda \, \frac{8q|q|}{g\pi^2 d^5} \, L \tag{2.5}$$

in cui, secondo consuetudine, si sono indicati con g l'accelerazione di gravità e con d, L e λ rispettivamente il diametro, la lunghezza e l'indice di resistenza della tubazione.

[1] Qui e nel seguito indicheremo con carattere maiuscolo grassetto matrici bidimensionali; con carattere minuscolo grassetto matrici–colonna o vettori numerici.

Con riferimento a condizioni di deflusso in tubi commerciali scabri, all'indice di resistenza λ si attribuisce l'espressione di Colebrook & White

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.71d}\right) \tag{2.6}$$

essendo ϵ/d la scabrezza relativa equivalente in sabbia e Re il numero di Reynolds. Per gli scopi applicativi la relazione implicita trascendente (2.6) può essere convenientemente approssimata dalla seguente forma esplicita proposta da Citrini [8]

$$\lambda = \lambda_\infty \left(1 + \frac{8}{Re\epsilon/d}\right) \tag{2.7}$$

in cui λ_∞ indica il valore di λ relativo a condizioni di turbolenza pienamente sviluppata ($Re \to +\infty$) dato da

$$\lambda_\infty = \frac{1}{4}\left(\log_{10} 3.71\ \frac{d}{\epsilon}\right)^{-2} \tag{2.8}$$

Tenuto conto della (2.7), la (2.5) può essere scritta

$$x = aq|q| + bq \tag{2.9}$$

in cui si è posto

$$a = \lambda_\infty\ \frac{8L}{g\pi^2 d^5} \qquad\qquad b = 16\lambda_\infty\ \frac{L\nu}{g\pi\epsilon d^3}$$

essendo ν la viscosità cinematica.
Pertanto l'equazione costitutiva di forma generale (2.3) può essere espressa nella seguente forma

$$q_j = \mathrm{sgn}(x_j)\left[(b_j^2 + 4a_j|x_j|)^{1/2} - b_j\right]\frac{1}{2a_j} \qquad \forall j \in \{1,\dots,\tilde{\ell}\} \tag{2.10}$$

in cui $\mathrm{sgn}(\cdot)$ denota la funzione signum.
In situazioni di moto puramente turbolento ($Re \to +\infty$), l'equazione (2.10) degenera nell' espressione monomia

$$q_j = \mathrm{sgn}(x_j)c_j|x_j|^{1/2} \qquad \forall j \in \{1,\dots,\tilde{\ell}\}$$

essendo $c_j = a_j^{-1/2}$ l'ammettenza idraulica dipendente dalla lunghezza, dal diametro e dalla scabrezza relativa della tubazione.
In regime di transizione possono altresì essere utilmente impiegate antiche formule empiriche [9] riferite a tubazioni commerciali prodotte e rivestite con varia tecnologia. Tutte sono riconducibili ad espressioni monomie del tipo

$$x_j = \mathrm{sgn}(q_j)w_j L_j d_j^{-\gamma_j}|q_j|^{\alpha_j} \qquad \forall j \in \{1,\dots,\tilde{\ell}\} \tag{2.11}$$

ove $\gamma_j \in [4.71, 4.98]$, $\alpha_j \in [1.79, 1.85]$ e w_j rappresenta un opportuno coefficiente numerico positivo.

Quando si tenga conto della (2.11), alla (2.3) può essere data la seguente altra espressione

$$q_j = c_j |x_j|^{\beta_j} x_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, \tilde{\ell}\} \tag{2.12}$$

essendo

$$\beta_j = \frac{1}{\alpha_j} - 1$$

iii$_b$) equazioni che traducono la presenza di dispositivi di regolazione (rubinetti, idranti, gruppi di erogazione) presenti nei nodi di erogazione della rete mediante un legame tra portate nodali spillate $\mathbf{p}$ e quote piezometriche nodali $\mathbf{y}$

$$p_i = q_i^* + k_i (y_i - z_i)^{\gamma_i} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, \tilde{n}\} \tag{2.13}$$

in cui z_i sta ad indicare la quota piezometrica nota dell'ambiente nel quale la portata p_i affluisce. In particolare se la portata p_i sbocca direttamente nell'atmosfera, z_i denota la quota geometrica del nodo i. La espressione esplicita di k_i e dell'esponente γ_i che figurano nella (2.13), dipendono ovviamente dalla geometria del dispositivo di erogazione, dal grado di apertura del dispositivo medesimo e dal numero di Reynolds. Il termine q_i^* denota una portata di valore assegnato e costante, erogata dal nodo i indipendentemente dal dislivello $y_i - z_i$.
Le equazioni (2.3) possono essere simultaneamente rappresentate nella seguente notazione vettoriale

$$\mathbf{q} = \Psi(\mathbf{x}) \tag{2.14}$$

essendo $\Psi(x) = \{\psi_j(x_j)\}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, \tilde{\ell}\}$.
Le equazioni (2.13) possono a loro volta essere scritte nella notazione compatta

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}^* + \Phi(\mathbf{y}) \tag{2.15}$$

dove

$$\Phi(\mathbf{y}) = \{k_i (y_i - z_i)^{\gamma_i}\} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, \tilde{n}\}$$

Alla stregua della notazione introdotta e sostituendo la (2.2) nella (2.14), otteniamo

$$\mathbf{q} = \Psi(\mathbf{T}^t \mathbf{y}) \tag{2.16}$$

Inoltre dalle (2.1) e (2.15) siamo condotti alla seguente equazione

$$\Psi(\mathbf{y}) + \mathbf{T}\Psi(\mathbf{T}^t \mathbf{y}) = -\mathbf{q}^* \tag{2.17}$$

Infine al sistema di equazioni (2.17) può essere attribuita l'espressione

$$\Xi(\mathbf{y}) = \Gamma(\mathbf{y}) + \mathbf{q}^* = 0 \tag{2.18}$$

dove si è posto

$$\Gamma(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) + \mathbf{T}\Psi(\mathbf{T}^t \mathbf{y}) \tag{2.19}$$

Per completare il modello matematico della rete occorre ancora tener conto della presenza dei dispositivi il cui comportamento idraulico è definito dal sistema di equazioni non lineari (2.4).
Di queste equazioni che si aggiungono a quelle non lineari espresse dalle (2.18), si può tener conto mediante due distinte strategie.
Nel primo approccio le relazioni (2.4) sono considerate alla stregua di vincoli non lineari tra prefissate coppie di incognite nodali (gradi di libertà) in conformità con una strategia computazionale largamente impiegata nell'analisi strutturale [10].
Nel secondo approccio si tiene conto della presenza dei dispositivi considerando le relazioni (2.4) come equazioni costitutive di un ulteriore insieme di rami fittizi nella rete da assemblare con lo stesso procedimento adoperato nella deduzione dell'equazione vettoriale (2.18)
La scelta tra questi due approcci è essenzialmente influenzata da considerazioni basate sull'efficienza computazionale.
D'altra parte poiché ciascuna delle strategie descritte poco sopra presenta specifici pregi e difetti, entrambe possono considerarsi equivalenti dal punto di vista computazionale.
In quel che segue faremo riferimento al secondo approccio. L'ordine dell'operatore di continuità $\mathbf{T}$ dovrà conformemente essere variato per rappresentare la rete topologica fittizia per la quale indicheremo con n ed ℓ rispettivamente il numero di nodi e di rami.

3. Formulazione variazionale astratta

Come già detto nell'Introduzione per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema di equazioni (2.1)–(2.3) si darà al problema una formulazione variazionale equivalente.

Questo approccio si mostra doppiamente utile: da un lato consente la dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità della soluzione del problema posto, dall'altro può fornire indicazioni circa la costruzione di algoritmi di risoluzione dotati di proprietà di convergenza e stabilità.

Il ragionamento che sarà sviluppato è essenzialmente basato su recenti acquisizioni nel campo della meccanica computazionale non lineare ed in particolare sulla teoria dei cosiddetti superpotenziali dissipativi [11]. In effetti nelle questioni di meccanica dei solidi si pone il problema inverso del calcolo delle variazioni laddove, ad esempio, si analizzi, con formulazione differenziale, il contatto unilaterale con attrito alla Coulomb tra due solidi deformabili.

Tale problema consiste essenzialmente nell'associare alle equazioni differenziali che lo definiscono un funzionale le cui condizioni di stazionarietà esprimono le relazioni originali come equazioni di Euler–Lagrange.

Nel caso in esame la proprietà di aggiunzione algebrica dell'operatore $\mathbf{T}$, che interviene nelle equazioni (2.1), (2.2), assicura il verificarsi della condizione necessaria per l'esistenza di soluzione del problema inverso.

È, dunque, necessario individuare un potenziale normale di dissipazione il cui gradiente esprima l'equazione costitutiva non lineare (2.3).

Per concretezza ci riferiremo nel seguito alla seguente espressione generale

$$a_j x_j |x_j|^{\beta_j} + b_j x_j + c_j \tag{3.1}$$

con a_j e b_j entrambi non negativi e $\beta_j > -1$.

Il potenziale normale di dissipazione per ciascun ramo della rete può essere facilmente dedotto mediante integrazione e, a meno di una costante additiva inessenziale, assume la forma

$$f_j(x_j) = \frac{1}{\beta_j + 2} a_j |x_j|^{\beta_j + 2} + \frac{1}{2}\, b_j x_j^2 + c_j x_j \qquad \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \tag{3.2}$$

In base all'ipotesi fatta sul coefficiente b_j per provare la stretta convessità della (3.2) basterà mostrare la stretta convessità del termine

$$\xi(x_j) = \frac{1}{\beta_j + 2}\, a_j |x_j|^{\beta_j + 2}$$

che è evidentemente di classe $C^1(\mathbb{R})$, essendo $\beta_j > -1$. In tal modo sarà sufficiente provare che:

$$\begin{aligned}&\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R} \;:\; z_1 \neq z_2\\ &\xi(z_2) - \xi(z_1) - \nabla_z \xi\big|_{z_1}(z_2 - z_1) > 0\end{aligned}$$

ovvero, essendo $a_j > 0$, che:

$$\frac{1}{\beta_j + 2}\left[|z_2|^{\beta_j+2} - |z_1|^{\beta_j+2}\right] - z_1 |z_1|^{\beta_j}(z_2 - z_1) > 0$$

Dopo alcuni passaggi si perviene alla seguente limitazione inferiore

$$\frac{1}{\beta_j + 2}\left[|z_2|^{\beta_j+2} + (\beta_j + 1)|z_1|^{\beta_j+2}\right] - z_1 z_2 |z_1|^{\beta_j} > 0 \tag{3.3}$$

La disuguaglianza (3.3) è ovviamente soddisfatta quando $|z_1|\,|z_2| \neq z_1 z_2$.

Rimane quindi da esaminare solo il caso $z_2 = \vartheta z_1$ con $\vartheta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ per il quale la disuguaglianza (3.3) diviene

$$\frac{1}{\beta_j + 2}\, \vartheta^{\beta_j+2} + \frac{1}{\beta_j + 2}\,(\beta_j + 1) - \vartheta > 0$$

ed è immediato verificare che essa è soddisfatta per i valori di β_j ipotizzati, $(\alpha_j > 0)$.

Il sistema di equazioni (2.1)-(2.3) è pertanto equivalente al seguente problema di minimizzazione condizionata strettamente convesso

$$\min\left[\mathcal{F}(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = tr\{\mathrm{diag}\; \mathbf{f}(\mathbf{T}^t\mathbf{y})\} - \mathbf{y}^t\mathbf{T}\mathbf{q}\right] \tag{3.4a}$$

soggetto a

$$\mathbf{T}\mathbf{q} + \mathbf{q}^* = 0 \tag{3.4b}$$

dove $\mathbf{f}(\mathbf{T}^t\mathbf{y})$ denota la matrice colonna di funzioni f_j, $j \in \{1, \dots, \ell\}$, e $tr\{\}$ sta ad indicare l'operatore traccia di una matrice quadrata.

Il carattere di stretta convessità del funzionale

$$tr\{\text{diag } \mathbf{f}(\mathbf{T}^t\mathbf{y})\}$$

è preservato $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$

Infatti il funzionale $\Lambda(x) = tr\{\text{diag } \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$ è strettamente convesso essendo somma di termini strettamente convessi e quindi si ha:

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^l \ : \ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \\ &\Lambda(\mathbf{x}_2) - \Lambda(\mathbf{x}_1) - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^t \nabla_x \Lambda\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} > 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Posto

$$\mathcal{M}(\mathbf{y}) = \Lambda\big[\mathbf{x}(\mathbf{y})\big] \quad \text{con} \quad \mathbf{x}(\mathbf{y}) = \mathbf{T}^t\mathbf{y}$$

basterà provare che:

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^{n-1} \ : \ \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2 \\ &\mathcal{M}(\mathbf{y}_2) - \mathcal{M}(\mathbf{y}_1) - (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^t \nabla_y \mathcal{M}\big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_1} > 0 \end{aligned}$$

essendo

$$\nabla_y \mathcal{M}(\mathbf{y}) = \nabla_y \Lambda\big[\mathbf{x}(\mathbf{y})\big] = \nabla_y \mathbf{x}^t(\mathbf{y}) \nabla_x \Lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{T} \nabla_x \Lambda(\mathbf{x})$$

Dopo semplici passaggi si ottiene

$$\mathcal{M}(\mathbf{y}_2) - \mathcal{M}(\mathbf{y}_1) - (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^t \nabla_y \mathcal{M}\big|_{\mathbf{y}_1} = \Lambda(\mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^t \nabla_x \Lambda\big|_{\mathbf{x}_1}$$

ed in virtù della (3.5), la dimostrazione è acquisita.

La sostituzione dei vincoli di uguaglianza (3.4b) nella forma non lineare (3.4a) consente di ricondursi al seguente problema di minimizzazione incondizionata:

$$\min\big[\mathcal{N}(\mathbf{y}) = tr\{\text{diag } \mathbf{f}(\mathbf{T}^t\mathbf{y})\} + \mathbf{y}^t\mathbf{q}^*\big] \tag{3.6}$$

per cui essendo $\mathcal{N}(\mathbf{y})$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ strettamente convesso ed inferiormente limitato la soluzione ottima esiste ed è unica.

Mostriamo ora l'equivalenza tra il problema di minimizzazione incondizionata (3.6) ed il sistema di equazioni algebriche (2.1), (2.14) e la trasformazione lineare iniettiva $\mathbf{x} = \mathbf{T}^t\mathbf{y}$ [13], formalmente espresso da

$$\mathbf{T}\Psi(\mathbf{T}^t\mathbf{y}) + \mathbf{q}^* = 0 \tag{3.7}$$

Le seguenti proposizioni sono infatti equivalenti

a) $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ è un punto di ottimo per il problema (3.6).

b) $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ è soluzione della (3.7).

Proviamo che a) $\Rightarrow$ b).

Sia $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ un punto di ottimo per la (3.6) allora risulta

$$\nabla_y \mathcal{N}(\mathbf{y})\big|_{\mathbf{y}=\bar{\mathbf{y}}} = 0$$

da cui si ottiene

$$\nabla_y \mathcal{H}(\mathbf{y}) = \nabla_y \left[\Lambda(\mathbf{x}(\mathbf{y})) + \mathbf{y}^t \mathbf{q}^*\right] = \nabla_y \left[\Lambda(\mathbf{x}(\mathbf{y}))\right] + \mathbf{q}^* = (\nabla_y \mathbf{x}^t)(\nabla_x \Lambda(\mathbf{x})) + \mathbf{q}^* =$$

$$= \mathbf{T}\nabla_x \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{q}^* = \mathbf{T}\Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{q}^* = \mathbf{T}\Psi(\mathbf{T}^t\mathbf{y}) + \mathbf{q}^*$$

L'ultima uguaglianza riferita a $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$ prova l'asserto.

La dimostrazione che b) $\Rightarrow$ a) può essere ottenuta non appena si osservi che non esiste $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che le relazioni

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}\Psi(\mathbf{T}^t\hat{\mathbf{y}}) + \mathbf{q}^* = 0 \\ &\nabla_x \mathcal{H}(\mathbf{y})\big|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}} \neq 0 \end{aligned}$$

sussistano entrambe.

I risultati ottenuti si riferiscono a reti costituite da rami caratterizzati da espressioni del tipo (3.1) con a_j e b_j entrambi positivi e $\beta_j > -1$.

Per equazioni costitutive espresse dalla (2.10), si ottiene una diversa espressione del funzionale su $\mathbb{R}^{n-1}$ ma ancora strettamente convessa (cfr. Appendice), così che restano ancora provate le proprietà di esistenza e di unicità della soluzione.

Per quanto attiene alla presenza nella rete di dispositivi di regolazione il cui funzionamento idraulico può essere espresso da relazioni del tipo (2.15) o (2.13), con k_i e γ_j indipendenti dal numero di Reynolds, la linea di ragionamento rimane sostanzialmente invariata poiché il problema di minimizzazione incondizionata viene ad essere sostituito da un problema di minimizzazione condizionata su un insieme convesso. Infatti il funzionale $\mathcal{H}(\mathbf{y})$ si modifica in base all'aggiunta del termine strettamente convesso $tr\{\text{diag } \mathbf{h}(\mathbf{y})\}$, dove:

$$h_i(y_i) = k_i \, \frac{1}{\gamma_i + 1} \, (y_i - z_i)^{\gamma_i + 1} \qquad i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

In tal modo il problema diviene:

$$\begin{aligned} &\min\left[\mathcal{H}(\mathbf{y}) = tr\{\text{diag } [\mathbf{f}(\mathbf{T}^t\mathbf{y}) + \mathbf{h}(\mathbf{y})]\} + \mathbf{y}^t\mathbf{q}^*\right] \\ &y_i \geq z_i \qquad i \in \{1, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

che ammette una sola soluzione grazie della stretta convessità dei vincoli [14].

4. Conclusioni

La formulazione variazionale presentata nel Par. 3 per il problema di verifica di reti idrauliche comprendenti dispositivi idraulici e rami per i quali le relazioni tra portate volumetriche e perdite di carico sono espresse da relazioni non monomie, generalizza ben note proprietà provate in [2] e successivamente in [4], per reti magliate.

La linea di ragionamento seguita in questo lavoro si basa essenzialmente sulla teoria dei potenziali normali di dissipazione introdotti nelle questioni di meccanica non lineare dei solidi.

In base alla stretta convessità del potenziale normale di dissipazione corrispondente alle relazioni costitutive tra le variabili coniugate e alla proprietà di aggiunzione algebrica dell'operatore di continuità **T** che interviene nelle (2.1), (2.2), si acquisisce agevolmente la dimostrazione di esistenza e unicità della soluzione del problema non lineare.

L'equivalenza tra il problema algebrico (2.1)–(2.3) e il problema di minimizzazione incondizionata (3.6) può altresì fornire utili indicazioni per la scelta di algoritmi risolutivi dotati di proprietà di convergenza e stabilità.

Appendice

In questa appendice si definisce il potenziale normale di dissipazione associato alla relazione costitutiva(2.10) e se ne prova la stretta convessità.

Si ha infatti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int \left[(b^2 + 4ax)^{1/2} - b\right] dx & \forall x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2a} \displaystyle\int \left[(b^2 + 4a(-x))^{1/2} - b\right] dx & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

e, a meno di una inessenziale costante additiva, risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{12a^2} (b^2 + 4ax)^{3/2} - \dfrac{b}{2a}\, x & \forall x \geq 0 \\ \dfrac{1}{12a^2} \left[b^2 + 4a(-x)\right]^{3/2} - \dfrac{b}{2a}\, (-x) & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

che è ovviamente di classe $C^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

La stretta convessità è allora conseguita non appena si osserva che:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{(b^2 + 4ax)^{1/2}} > 0 & \forall x \geq 0 \\ \dfrac{1}{\left[b^2 + 4a(-x)\right]^{1/2}} > 0 & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

Bibliografia

[1] Fenves S.J.: *Network Topological Formulation of Structural Analysis*, Jour. ASCE, St. Div., 8, 1963.

[2] Russo Spena A.: *Su alcune proprietà caratteristiche delle reti*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, Serie 4, vol. XVII, 1950.

[3] Carpentier G., Cohen G., Hamam Y.: *Water Network Equilibrium Variational Formulation and Comparison of Numerical Algorithms*, in: Computer Application in Water Supply, Vol. I, J. Wiley & S., N.Y., 1987.

[4] Contro R., Franzetti S.: *A New Objective Function for Analyzing Hydraulic Pipe Networks in the Presence of Different State of Flow*, Meccanica, 18, 1983.

[5] Contro R., Franzetti S.: *Verifica delle reti idrauliche in pressione mediante programmazione non lineare*, Atti XVII Conv. Idr. e Costr. Idr., Palermo 1980.

[6] Russo Spena A.: *Il problema di verifica di sistemi di distribuzione idrica ad uso potabile o irriguo*, Giorn. Genio Civile, Fasc. 10, 11, 12, 1979.

[7] Narshing D.: *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice–Hall, N.J., 1974.

[8] Citrini D.: *Una formula semplice per il moto uniforme delle correnti fluide nella zona di Colebrook*, Energia Elettrica, 1962.

[9] Nebbia G., Ippolito G, Russo Spena A., Viparelli M.: *Idraulica*, Liguori, Napoli, 196[illegible]

[10] Narayanaswamy O.S.: *Processing Nonlinear Multipoint Constraints in the Finite ment Method*, Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 21, 1985.

[11] Panagiotopoulos P.D.: *Variational Inequalities in Mechanics and Applications*, Birkäuser, Basel, 1985.

[12] Kantorovic L.V., Akilov G.P.: *Analisi funzionale*, Editori Riuniti, Roma, 1980.

[13] Ben–Israel A., Greville T.N.E.: *Generalized Inverses: Theory and Applications*, J. Wiley & S., N.Y., 1974.

[14] Wismer D.A., Chattergy R.: *Introduction to Nonlinear Optimization*, North Holland, New York, 1979.

Indirizzo degli Autori:

Dr. Francesco Russo Spena
Professore Associato di Fondamenti degli Equilibri non–lineari
Dipartimento di Scienza delle Costruzioni
Facoltà di Ingegneria
P.le V. Tecchio, 80125 Napoli
Ph. 081/7682111

Dr. Andrea Vacca
Allievo "Dottorato di Ricerca in Ingegneria Idraulica"
Facoltà di Ingegneria
Via Claudio 21, 80125 Napoli
Ph. 081/7683463