DETERMINAZIONE DEL PIANO SPERIMENTALE DI UNA SPERIMENTAZIONE FATTORIALE A 2 E 3 LIVELLI CON CONFUSIONE E FRAZIONATA

L. TORO, F. VEGLIO'
Dipartimento di Chimica, Ingegneria Chimica e Materiali:
Facoltà di Ingegneria - Monteluco di Roio - L'Aquila

SOMMARIO

Nella sperimentazione industriale spesso vengono usati dei *designs* di prove realizzati secondo i principi della sperimentazione fattoriale.
Quando il numero dei fattori da analizzare e' molto elevato il lavoro sperimentale puo' risultare troppo oneroso.
In questi casi possono essere usati dei *designs* sperimentali estratti dalle prove del fattoriale completo (fattoriale frazionato).
Nel presente lavoro e' stata effettuata una rassegna dei principi della sperimentazione fattoriale e delle metodologie che permettono di individuare in maniera sistematica piani sperimentali frazionati a due ed a tre livelli.

1. INTRODUZIONE

Nella sperimentazione industriale una delle fasi piu' importanti e' quella della ricerca di un modello matematico che descriva un determinato fenomeno.
Il problema in genere e' quello di trovare come una determinata variabile dipendente (superfice di risposta) sia legata ad una serie di variabili assunte come indipendenti (fattori), che possono assumere vari valori (livelli), arbitrariamente selezionati dallo sperimentatore.
La combinazione dei vari livelli dei vari fattori viene definita trattamento, ed in corrispondenza di questo viene determinata sperimentalmente la superfice di risposta.
Il problema viene risolto ricercando il modello che descrive il fenomeno in esame e cio' viene realizzato impiegando varie tecniche a seconda della tipologia del modello (algebrico o differenziale, lineare o non lineare) [1] [3] [4] [5].
In tal senso una delle fasi piu' delicate che occorre bene tener presente e' la pianificazione delle prove: in definitiva occorre scegliere i livelli dei vari fattori che influenzano il fenomeno in esame.
Cioe' in definitiva occorre che il piano sperimentale sia sufficentemente esplorato in quanto una cattiva scelta dei livelli dei fattori si riperquote sulla stima dei parametri del modello [1], [4].
Risulta evidente che se il numero dei fattori e dei livelli risulta elevato il numero di prove da realizzare puo' risultare molto oneroso sia in termini di tempo impiegato nella sperimentazione e sia in termini di costo; si puo' aggiungere infine che a volte possono subentrare problemi di scala che rendono improponibile una sperimentazione con molte prove da realizzare.
Si consideri che se si vogliono studiare 5 fattori a 3 livelli il numero delle prove da realizzare mediante un reticolo fattoriale e' pari a 243.
Il problema e' pertanto quello di individuare una metodologia che permetta di realizzare una sperimentazione contenente il minimo numero di prove con il massimo contenuto di informazione.
Piani sperimentali di questo tipo sono i fattoriali frazionati che costituiscono un sottoinsieme

opportunamente definito dell'insieme contenente tutti i trattamenti di una sperimentazione fattoriale completa [2].
In Fig.1 viene mostrato un reticolo completo di prove di un fattoriale a tre livelli con 3 fattori (27 trattamenti), mentre in Fig.2 viene mostrato un fattoriale frazionato in cui i trattamenti sono stati opportunamente estratti dal fattoriale completo (9 trattamenti).
Dall'analisi della Fig.2 e' possibile constatare che guardando il cubo da qualsiasi lato, la visione che si avra' sara' sempre quella di 9 trattamenti distinti non sovrapposti. In altre parole il design sperimentale a due dimensioni risulta ortogonale.
In questo lavoro viene descritta la metodologia della ricerca sistematica del fattoriale frazionato, in sperimentazioni fattoriali a 2 ed a 3 livelli;tale procedura e' stata utilizzata per la realizzazione di un programma di calcolo per la definizione di un piano sperimentale frazionato.

2.SPERIMENTAZIONE FATTORIALE

La sperimentazione fattoriale rappresenta un modo molto efficente per realizzare delle prove sperimentali [2].
In pratica si tratta di realizzare le prove mediante un cosiddetto reticolo ortogonale.
I fattori analizzati vengono studiati a vari livelli ed in corrispondenza di un determinato trattamento si ottiene la superfice di risposta .
In Fig.1 e' mostrato il reticolo di una sperimentazione con 3 fattori a tre livelli ciascuno.
Le prove da realizzare sono 27 e sono costituite dai nodi del cubo di Fig.1, che costituiscono i trattamenti della sperimentazione.
Occorre fare qualche precisazione sul simbolismo che sara' adottato nel seguito.
Nella sperimentazione 2^n (fattoriale con n fattori a due livelli), un generico trattamento viene indicato con delle lettere minuscole (notazione di Yates) [2].
Ad es. il trattamento ab di un fattoriale 2^3 (con i fattori A, B, C) rappresenta il trattamento in cui i

fattori A e B sono al livello piu' alto, mentre C e' al livello piu' basso.
Il trattamento denotato con 1 indica la prova con tutti i fattori al livello piu' basso.
Nella sperimentazione 3^n (fattoriale con n fattori a 3 livelli), per definire il generico trattamento verranno usati una serie di numeri interi (0,1,2).
Ad es. il trattamento 012 indica una prova in cui il fattore A si trova al livello piu' basso, B a quello intermedio e C a quello piu' alto.
E' chiaro che quest' ultima notazione risulta essere di piu' facile estendibilita' per sperimentazioni fattoriali a qualsiasi numero di livelli e pertanto nel seguito si fara' riferimento prevalentemente a quest'ultima notazione.
Mediante la tecnica dell'analisi della varianza e' possibile definire quali sono i contributi dei vari fattori sulla superfice di risposta e definirne la loro significativita' mediante degli F-tests [2].
Dall'analisi del fattoriale generalmente e' possibile determinare il valore degli effetti e delle interazioni tra fattori; questi rappresentano il contributo dei singoli fattori o delle loro interazioni, sulla superfice di risposta.
Un effetto o una interazione e' in generale una combinazione lineare dei trattamenti.
Queste funzioni lineari godono della proprieta' di ortogonalita' e di indipendenza, definite maniera usuale [5].

3.RELAZIONE TRA CONFUSIONE E FATTORIALI FRAZIONATI

Esiste una profonda relazione tra fattoriale frazionato e fattoriale confuso in quanto e' possibile mostrare che il frazionato puo' essere derivato da un fattoriale completo confuso [2].
Per questa ragione nel seguito si fara riferimento ai concetti di confusione nella sperimentazione fattoriale.
La confusione viene applicata nella sperimentazione fattoriale quando non e' possibile garantire che le prove vengano condotte in condizioni uniformi a prescindere dai fattori che invece vengono deliberatamente variati.

Infatti in un fattoriale completo la dimensione del blocco dei trattamenti tende ad essere grande all'aumentare del numero dei fattori e dei livelli; all'interno del blocco pero' possono esistere sorgenti di variazione, non imputabili all'errore sperimentale, che incrementano l'errore stesso diminuendo in tal modo l'efficenza dell'esperimento.
Il problema e' legato al fatto che quando si vuole studiare l'effetto di un certo fattore sulla superfice di risposta e' auspicabile che questa stima non sia inquinata da altre sorgenti di variazione nascoste che ne inficerebbero tale confronto.
Ad esempio se si vuole studiare l'effetto della temperatura sulla resa di un certo processo chimico che tratta una determinata partita di materiale base si desidera che tale partita sia di caratteristiche costanti durante tutto il corso della prove.
Questo puo' non essere sempre possibile e in tal modo si potrebbe verificare che l'effetto del fattore in esame venga confuso con la variazione tra partite di materiale.
Per rendere la stima degli effetti piu' importanti da stimare, non contaminata da tale variazione si ricorre ad un piano sperimentale confondendo una o piu' *high interaction* con la variazione tra le partite [2].
Questo metodo suggerito da Yates si basa sulla scarsa inportanza delle interazioni con ordine elevato per realizzare un'esperimento piu' efficente.
Verranno realizzati dei blocchi di prove effettuate con una certa partita di materiale.
Un blocco e' rappresentato da un gruppo di trattamenti realizzato in condizioni praticamente omogenee.
Il fattoriale frazionato e' rappresentato da uno dei blocchi che costituiscono un determinato sistema di confusione [2].
Tale blocco conserva la importante proprieta' del fattoriale completo, cioe' la condizione di ortogonalita' degli effetti stimati anche se a causa del minor numero di prove possono verificarsi delle confusioni tra effetti ed interazioni.
In definitiva con il fattoriale completo ogni effetto proprio in virtu' di tale proprieta' , puo' essere stimato indipendentemente dagli altri effetti.
Quando si estraggono dei trattamenti dal fattoriale completo per ridurre il numero delle prove non e'

detto che tale proprieta' venga conservata, rendendo cosi' la stima degli effetti non indipendente tra loro.
Lo scopo del presente lavoro e' quello descrivere una procedura sistematica per l'individuazione di un fattoriale ridotto che conservi la proprieta' di ortogonalita' (fattoriale frazionato) tenendo conto comunque che in questo caso puo' originarsi una certa confusione nella stima di effetti e di interazioni.

4.DETERMINAZIONE DEL FATTORIALE FRAZIONATO

E' possibile determinare un fattoriale frazionato passando per i concetti della confusione e partendo da due punti di vista:

a) dalla costruzione di quadrati, cubi ed ipercubi latini [2],
b) utilizzando la definizione di ortogonalita' [2].

Nel primo caso si costruisce il fattoriale completo avente il numero di prove che si desidera realizzare ; si determinano le espressioni degli effetti ed interazioni.
Dalla definizione di questi effetti o interazioni e' possibile dedurre il piano sperimentale confondendo uno di questi con l' effetto di un nuovo fattore [2].
Questo modo di procedere potrebbe definirsi come "ricerca in avanti".
Con il secondo modo di procedere si parte dal fattoriale completo contente tutti i fattori che si vogliono studiare e si estrae da tutti i trattamenti un sottogruppo (blocco principale) dal quale viene derivato il fattoriale frazionato.
Questo modo di procedere puo' essere definito come "ricerca all'indietro" e sara' oggetto del presente lavoro.

5. APPLICAZIONE DEL CONCETTO DI GRUPPO ALLA DEFINIZIONE DELLA SPERIMENTAZIONE FATTORIALE

Gli effetti ed i trattamenti di una sperimentazione fattoriale completa possono essere determinati tenendo conto della definizione di gruppo, cioe' di un insieme di elementi definito con una determinata legge di composizione [2].
Gli elementi del gruppo possono essere definiti assegnando un gruppo di generatori ad esempio del tipo A, B, C, tenendo presente che:

$$A^2 = B^2 = C^2 = 1$$

Nello stesso modo e' possibile ottenere gli elementi dello stesso gruppo considerando come generatori gli elementi A, B, BC, dove gli stessi rappresentano l'effetto di A, di B e l'interazione BC.
La sola condizione richiesta per i generatori e' che siano indipendenti: ogni elemento non deve risultare combinazione degli altri. Ad esempio il set A, B, AB non puo' essere preso come gruppo generatore del fattoriale completo.
In Tab. 1 e' stato determinato il gruppo del fattoriale completo 2^3 considerando come generatori A, B, BC.

<u>Nota 1.</u>

Un reticolo fattoriale puo' essere considerato come uno spazio fattoriale n-dimensionale (n=numero dei fattori) i cui elementi o vettori hanno componenti discrete.
Nel caso di fattoriali a due livelli le componenti sono Booleane; ad esempio se n=3 (fattori A, B, C) i vettori
$V_1 = (0,1,0)$ *e* $V_2 = (1,1,0)$ *rappresentano gli elementi b ed ab del gruppo dei trattamenti.*
In questa maniera tutti i trattamenti del fattoriale a due livelli con 3 fattori possono essere determinati, sommando con mod.2, ad es. i seguenti 3 vettori:

$V_1 = (1,0,0);\ V_2 = (0,1,0);\ V_3 = (0,0,1);$

In tal caso il trattamento abc sara' dato da $V_1+V_2+V_3$

e cosi' via.
Il discorso e' analogo se i livelli sono 3 (mod.3), 4 (mod.4) etc..

6.DEFINING CONTRAST (D.C.)

Operando in un sistema di confusione con un certo numero di blocchi, necessariamente alcuni effetti verranno di conseguenza confusi.
Un set di effetti confusi in un qualsiasi sistema di confusione viene definito *defining contrast* (DC). Ad es. in una sperimentazione 2^3 in cui si vuole confondere l'interazione ABC con la variazione tra due blocchi il DC sara' costituito dagli elementi I e ABC (dove I e' l'elemento neutro del gruppo degli effetti ed interazioni).
In generale dato un fattoriale 2^n, questo puo' essere confuso in 2^p blocchi (p=1,2..,n); in tal caso vengono a costituirsi 2^{p-1} DC di cui p sono indipendenti, mentre i rimanenti 2^p-p-1 sono combinazione dei p elementi.
I DC con l'elemento neutro costituiscono un gruppo finito chiuso rispetto all'operazione di combinazione (che chiameremo d'ora in poi moltiplicazione).
Ad es. si consideri un fattoriale 2^5 in cui si vogliono realizzare 8 blocchi di 4 osservazioni (p=3); possono essere arbitrariamente scelti 3 DC mentre i rimanenti 4 verranno determinati impiegando la legge di composizione del gruppo [2].
Ponendo ad es. come DC indipendenti i tre elementi CDE, ACE e ABDE si ottengono con la moltiplicazione di questi elementi tra loro, il gruppo completo dei DC, costituito dai seguenti 8 elementi (compreso l'elemento neutro):

I, AD, AB, BE, CDE, ACE, BCD, ABDE

Questo gruppo puo' essere impiegato per la determinazione degli effetti confusi nel particolare sistema di confusione.
E' ovvio che in una sperimentazione fattoriale si desidera confondere le *high-interactions*, facendo in modo da rendere puliti gli effetti che si vogliono stimare con una maggiore precisione come quelli

principali e le *two-interactions* [2].

Nota 2.

Due o piu' effetti si dicono confusi tra loro, quando per la loro determinazione si usa lo stesso confronto. Ad es. si consideri un fattoriale 2^3 (A,B,C). Se si confonde l'interazione ABC con un nuovo fattore, ad es. D, si avra' che:

$D=ABC$

In definitiva i termini per determinare ABC, vengono usati per valutare D.
In questo caso il DC sara' dato da:

I, ABCD.

Moltiplicando questo DC per i vari effetti si ottengono i fattori che vengono confusi; ad es. se si moltiplica per A si otterra' che l'effetto A si confonde con BCD (perche' $A^2=1$).
In questa maniera verranno definiti tutti i fattori confusi.

Nota 3.

La determinazione dei trattamenti di una sperimentazione fattoriale puo' essere derivata applicando gli stessi concetti visti sopra, selezionando un determinato gruppo di generatori costituito questa volta da trattamenti.
Selezionando come gruppi generatore il gruppo 1, a, b, c, e' possibile derivare il fattoriale completo 2^3 o gruppo dei trattamenti.

7.BLOCCO PRINCIPALE

Si definisce blocco principale, il gruppo dei trattamenti di un sistema di confusione che contiene l'elemento neutro del gruppo dei trattamenti.
Definito un gruppo di DC puo' essere mostrato che il gruppo principale puo' essere derivato da questo,

cercando i trattamenti che risultano ortogonali ai DC. Un effetto di un DC puo' essere scritto nella forma:

$$A^p B^q C^r D^s \qquad (1)$$

mentre un trattamento come:

$$a^w b^x c^y d^z \qquad (2)$$

Nel caso di fattoriale a due livelli gli esponenti possono assumere valori pari a 0 ed 1.
Il trattamento (2) risulta ortogonale all'effetto (1) se:

$$pw+qx+ry+sz = 0 \ (\mathrm{mod}.2)$$

Quindi in una sperimentazione fattoriale a due livelli 2^n in cui e' necessario realizzare un sistema di confusione con 2^p blocchi, una volta scelto opportunamente il set di effetti facenti parte del DC, puo' essere individuato, applicando i concetti di ortogonalita', il blocco principale.
Questo puo' essere realizzato per individuare gli altri blocchi da realizzare, nel sistema di confusione assegnato [2].

Nota 4.
La condizione di ortogonalita' e' definita come il prodotto scalare di due vettori dello spazio vettoriale.
Ad es. in una sperimentazione 2^3 (A,B,C) si desideri confondere ABC con la variazione tra i blocchi; l'interazione ABC e' data dal seguente confronto:

$$ABC = 1/4 \ [(abc+a+b+c)-(bc+ac+ab+1)]$$

Il gruppo bc, ac, ab, 1, definito anche come:

(0,1,1) (1,0,1) (1,1,0) (0,0,0)

e' un blocco principale e risulta ortogonale ad ABC definito anche (1,1,1).
Il blocco principale rappresenta un gruppo chiuso rispetto alla moltiplicazione.
Da questo possono essere derivati gli altri blocchi

del sistema di confusione considerato (in questo caso ABC confuso); se viene usata la notazione con le lettere, occorre moltiplicare il blocco principale per un trattamento non contenuto nel blocco stesso; se viene usata la notazione vettoriale occorre sommare ai vettori che costituiscono il blocco principale un vettore che non e' compreso in esso.

8.CONFUSIONE IN UN 3^n DESIGN

Analogamente a quanto detto precedentemente per i 2^n designs, e' possibile applicare gli stessi concetti visti sopra ai 3^n designs operando solo alcune modifiche.
I generici effetti e trattamenti espressi tramite la (1) e la (2) saranno validi anche in questo caso tenendo presente pero' che gli esponenti possono assumere valori di 0, 1 e 2, essendo tre i livelli.
Inoltre l'elemento neutro, sia dei trattamenti che degli effetti, e' dato da:

$$A^3=B^3=C^3=D^3=A^0=...=D^0=I$$

$$a^3=b^3=c^3=d^3=a^0=...=d^0=1$$

In definitiva facendo assumere ad (1) ed a (2) tutte le possibili combinazioni di 0, 1 e 2, viene generato il fattoriale completo, sia come trattamenti che come effetti.
La condizione di ortogonalita' tra due trattamenti o tra due effetti o tra un trattamento ed un effetto e' data da:

$$pw+qx+ry+sz = 0 \ (\text{mod}.3)$$

<u>Nota 5.</u>
Occorre considerare che in un fattoriale a tre livelli il concetto di effetto risulta di piu' difficile comprensione ed in ogni caso si puo' sempre parlare della significativita' dei fattori.

Nel caso di fattoriali a tre livelli e' necessario

fare alcune considerazioni particolari sugli effetti e sui DC; viene considerato come esempio un fattoriale 3^3. Dal generico effetto-interazione $A^a B^b C^c$, come e' stato gia' detto, e' possibile ottenere il gruppo degli effetti; questi saranno costituiti dai 27 termini mostrati in Tab.2.
Questo gruppo, come nel caso di un 2^n design, e' chiuso rispetto all'operazione di moltiplicazione.
Da questi elementi e' possibile estrarre dei sottogruppi di ordine 3 che hanno la proprieta' di essere chiusi rispetto alla moltiplicazione.
Ad es. costituiscono un sottogruppo gli elementi I, A, A^2, oppure I, B, B^2.
Si consideri il sottogruppo I, A, A^2; sara' possibile trovare un gruppo di 9 trattamenti che risultano ortogonali al sottogruppo; questi trattamenti sono mostrati in Tab.3.
Nel seguito per indicare un generico trattamento verranno indicati solo gli esponenti; ad es. $a^0 b^1 c^2$ = 012.
Se si moltiplica per a ed a^2 questo gruppo di trattamenti si ottengono i tre gruppi di trattamenti del sistema di confusione che confonde la variazione tra i blocchi con l'effetto di A; in altre parole il sottogruppo I, A, A^2 individua l'effetto di A.
Procedendo analogamente per gli altri sottogruppi si ottiene la Tab.4 in cui vengono riportati le corrispondenze tra sottogruppi ed effetti determinati.
Nel caso di una sperimentazione 3^n tali sottogruppi individuano i DC che possono essere selezionati per individuare il sistema di confusione voluto.
Un sistema 3^3 puo' essere confuso o con 3 blocchi da 9 o con 9 blocchi da 3 trattamenti ciascuno.
Nel primo caso il DC puo' essere costituito ad es. da:

I, ABC, $A^2B^2C^2$

Nel secondo caso occorre confondere due effetti; se si confonde per esempio [2]:

I, AB, A^2B^2 [F(AB)]
I, BC, B^2C^2 [F(BC)]

saranno confusi anche:

AB^2C, A^2BC^2 e AC^2, A^2C,

che si ottengono dalla legge di moltiplicazione dei due effetti confusi inizialmente.
Il DC complessivo sara' dato pertanto dal seguente gruppo chiuso:

I, AB, A^2B^2, BC, B^2C^2, AB^2C, A^2BC^2, AC^2, A^2C,

che corrisponde a confondere [2]:

F(AB), F(BC), I(AC), X(ABC).

Come nel 2^n *design*, una volta noto il gruppo dei DC, e'possibile individuare il blocco principale del sistema di confusione in base alla condizione di ortogonalita' (3).
Noto tale blocco possono essere derivati i rimanenti moltiplicando per un certo set di trattamenti: ad es. per (1,0,0) e (2,0,0).

9.CONCLUSIONI

Nel presente lavoro e' stata descritta una metodologia sistematica per la definizione di un piano sperimentale frazionato a 2 ed a 3 livelli.
Tale procedure comunque risulta essere generalizzabile.
In Fig.2 viene riportato il diagramma di flusso di tale procedura.
In definitiva per la determinazione delle prove da realizzare occorre :

1. individuare con quante prove si vogliono studiare i fattori in esame,
2. fissare il sistema di confusione assegnando un opportuno DC,
2. determinare il blocco principale applicando la condizione di ortogonalita'.
3. ottenere gli altri blocchi moltiplicando per un certo set di trattamenti,
4. scegliere tra questi il blocco che costituira' il frazionato.

Questo piano sperimentale puo' essere applicato oltre che nello studio della significativita' dei vari fattori, anche nella pianificazione preliminare delle prove per la ricerca di un modello.
Infatti come e' noto nelle fasi successive si seguono le regole della "programmazione della sperimentazione" per la ricerca delle prove da realizzare per una migliore stima dei parametri del modello stesso [4].

BIBLIOGRAFIA.

[1] D.H. Himmelblau, " Process Analysis by Statistical Methods", John Wiley & Sons, 1970.

[2] O.L. Davies et al., " The Design and Analysis of Industrial Experiments", ICI, IIª edizione, 1979.

[3] O.L. Davies and P.L. Goldsmith, "Statistical Methods in Research and Production", ICI, IVª edizione, 1972.

[4] G.B. Ferraris, "Analisi ed identificazione di modelli", CLUP, Milano 1981.

[5] R.C. Bose, "Combinatorial Problems of Experimental esign II: Factorial Design", in Annals of Discrete Mathematics 6 (1980).

TAB.1 - Generazione fattoriale completo.

GENERATORI	A, B, BC
PRODOTTO DUE ALLA VOLTA	AB, ABC, C
PRODOTTO TRE ALLA VOLTA	AC
PRODOTTO CON STESSO	I

TAB.2 - Gruppo del fattoriale completo a tre fattori e tre livelli.

A, A^2, B, B^2, C, C^2, A^2B, AB^2, A^2C, AC^2, B^2C, BC^2
BC, B^2C^2, A^2BC, AB^2C^2, A^2BC, AB^2C^2, AB^2C, A^2BC^2
ABC^2, A^2B^2C, ABC, $A^2B^2C^2$, I

TAB.3 - Gruppo principale di un fattoriale a tre livelli e tre fattori.

$a^0b^0c^0$	$a^0b^0c^1$	$a^0b^0c^2$
$a^0b^1c^0$	$a^0b^1c^1$	$a^0b^1c^2$
$a^0b^2c^0$	$a^0b^2c^1$	$a^0b^2c^2$

TAB. 4

I, A^2, A	A
I, B^2, B	B
I, C^2, C	C
I, A^2B, AB^2	I(AB)
I, AB^2, A^2B	F(AB)
I, A^2C, AC^2	I(AC)
I, AC, A^2C^2	F(AC)
I, B^2C, BC^2	I(BC)
I, BC, B^2C^2	F(BC)
I, A^2BC, AB^2C^2	W(ABC)
I, AB^2C, A^2BC^2	X(ABC)
I, ABC^2, A^2B^2C	Y(ABC)
I, ABC, $A^2B^2C^2$	Z(ABC)

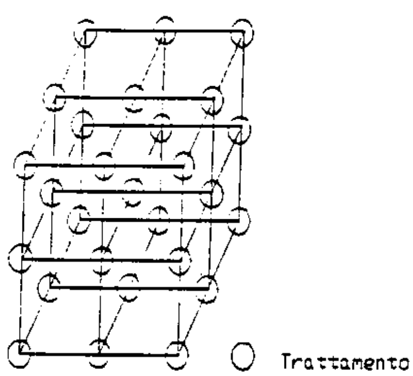

fig 1

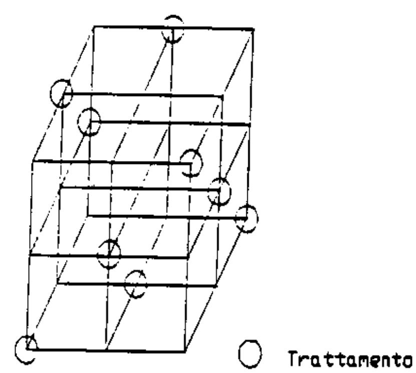

fig 2