MATEMATICA APPLICATA NELL'ANTICA GRECIA (1)

S. MARACCHIA
Dipartimento di Matematica; Istituto "Guido Castelnuovo"
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Piazzale Aldo Moro, 2, 00185 Roma

Si legge nella Vita di Marcello scritta da Plutarco come Platone rimproverasse Archita ed Eudosso perché si erano serviti di mezzi meccanici per risolvere problemi altrimenti irresolubili: "Platone, racconta infatti Plutarco, rimase indignato da questo modo di procedere e polemizzò coi due matematici, quasi distruggessero e corrompessero ciò che vi era di buono nella geometria. In tal maniera essa abbandonava infatti i concetti astratti per scendere nel mondo sensibile ed usava anch'essa oggetti che richiedevano ampiamente un grosso lavoro manuale. La meccanica fu così separata e si staccò dalla geometria; per molto tempo la filosofia l'ignorò, ed essa divenne una delle arti militari."[2]

L'influenza di Platone bene si riflette negli Elementi di Euclide nei quali invano cercheremmo formule atte al semplice calcolo dell'area di una figura, di un volume di un solido o qualche indicazione per eseguire anche le più semplici operazioni aritmetiche. In questo modo le opere del filosofo e quelle del matematico collaborarono a creare la convinzione che la matematica in quanto tale doveva rivolgersi solo a problemi astratti, interni alla matematica stessa, ed affrontati con mezzi assolutamente razionali oltretutto limitati al solo uso delle curve perfette quali la retta e la circonferenza. La matematica, inoltre, doveva risultare un godimento in sè e per sè, utile, caso mai, secondo Platone, ad addestrare l'animo all'astrazione e prepararlo alla ricerca della verità attraverso la dialettica[3].

E' noto, d'altra parte, l'episodio raccontato da Stobeo[4] secondo

----

1. Il presente articolo è una rielaborazione di un precedente lavoro presentato al Convegno Nazionale della Mathesis tenuto ad Iseo nell'aprile del 1990.

2. Plutarco, Vita di Marcello, 14, tr.di C.Carena.

3. "Senza la matematica -scrive Platone- non può esistere la felicità" (Epinomide 977, c-d) e si tratta ovviamente di una felicità del tutto spirituale.

4. Stobeo, Floril. IV, p. 205, citazione tratta da T.Heath, A History of Greek Mathematics, Clarendon Press, Oxford 1921, I, p. 357.

il quale Euclide fece allontanare un allievo dalla sua scuola "perché aveva pensato di trarre profitto dalla matematica".

Nessuna meraviglia, dunque, se l'opinione corrente attribuisce alla matematica greca un taglio assolutamente astratto, come si vede d'altra parte in quasi tutte le opere di Archimede e nell'opera conservataci di Apollonio sulle coniche.

Però, nonostante le indicazioni di Platone e gli esempi dei grandi matematici greci, non c'è dubbio che applicazioni pratiche della matematica dovevano pur esserci e non soltanto per la comune pratica del misurare e del calcolare necessari per la vita di una civiltà complessa qual era quella greca ["geometria" (γεωμετρια) com'è noto vuol dire appunto "misura della terra" a testimonianza delle origini che i Greci attribuivano ad essa e la "logistica" (λογιστιχη) era la comune pratica del calcolo], quanto per vere e proprie applicazioni di risultati teorici a problemi di ordine pratico anche complessi e ad una vera e proprie fisica-matematica del tipo di quella che si trova nelle opere "meccaniche" di Archimede.

D'altra parte i Greci avevano importato dai Babilonesi e dagli Egiziani una matematica di carattere essenzialmente pratico ed è proprio da questa che prese le mosse quella astratta che è una delle loro glorie più fulgide. Lo scopo di questo lavoro, pertanto, è quello di mostrare attraverso qualche esempio che l'aspetto pratico della matematica si conservò durante i secoli, accanto allo straordinario sviluppo di quella teorica.

Nei risultati del primo matematico greco, Talete di Mileto (624-548 a.C. circa) è possibile trovare già questi due aspetti e se non ci si può meravigliare di quello pratico tratto direttamente dalla matematica che aveva appreso durante i suoi viaggi, è l'aspetto razionale, o per meglio dire una certa caratteristica razionalizzante, a meravigliarci poiché ci troviamo per la prima volta difronte a qualcosa di assolutamente nuovo[1]. In seguito accadrà il contrario: sarà la presenza di un aspetto pratico in una matematica tutta volta alla massima razionalizzazione a meravigliarci.

Secondo Proclo, infatti, Talete affrontò la matematica sia nel suo aspetto generale (καθολικωτερον) e sia nel suo

----

1.Molto vasta è la letteratura a questo riguardo, mi limito a dare solo qualche indicazione dalle quali però è possibile trarre altri riferimenti: G.J.Allman, <u>Greek Geometry from Thales to Euclid</u>, Dublino, Londra 1889, p. 7 sgg.; S.Maracchia, <u>Talete nello sviluppo della geometria razionale</u> in "Cultura e Scuola" 1971 nn.1-2; B. Rizzi e T. Viola, <u>Dalla contemplazione ideale delle figure geometriche nell'uomo primitivo a quelle della geometria razionale attraverso l'opera di Talete di Mileto</u>, "Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino" vol. 114, 1980.

aspetto sensibile (αισθητικωτερον)[1]. Per il primo aspetto ricordiamo alcune dimostrazioni che gli vengono attribuite dallo stesso Proclo (uguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele; esser retto l'angolo inscritto in un semicerchio; divisione in due parti uguali del cerchio per mezzo del diametro; uguaglianza degli angoli opposti al vertice). Per il secondo aspetto ricordiamo la possibilità della misura dell'altezza delle piramidi per mezzo di una proporzione, legata ad un'idea di similitudine e ricordiamo specialmente la possibilità di misurare la distanza di una nave dalla costa attraverso il secondo criterio di uguaglianza (così Proclo,ma probabilmente si tratta anche in questo caso di una applicazione di una similitudine di triangoli).

La misura della distanza delle navi (nemiche?) dalla costa è dunque il primo vero esempio di una matematica applicata ad un avvenimento reale di pratico interesse; il matematico non è soltanto uno studioso astratto, assolutamente distaccato dalla realtà che lo circonda, ma è in grado di applicare la sua scienza al momento opportuno qualora le circostanze lo richiedano.[2] Questa misura eseguita attraverso la similitudine di triangoli rettangoli (questa è la spiegazione del procedimento di Talete che mi sembra più attendibile) oppure attraverso una vera e propria triangolazione che stabilisce la distanza di un punto inaccessibile a partire da due accessibili (ipotesi questa che risponde maggiormente all'indicazione di Proclo ma che risulta più elaborata per quanto riguarda l'applicazione matematica) oppure secondo altre ipotesi ancora, avrebbe spinto Anassimene, secondo quanto scrivono Federigo Enriques e Giorgio De Santillana[3] a tentare una analoga triangolazione col sole in modo da poterne calcolare la distanza dalla terra. Non mi occuperò di questo episodio, non del tutto certo, di matematica applicata; anche un altro allievo di Talete, Anassimandro, aveva tentato di

----

1.Cfr. Proclo,*Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, Prologo, parte II (Friedlein, 65, 10-11); le successive indicazioni relative ai risultati matematici di Talete si trovano nei commenti alle varie proposizioni. Ricordiamo che dell'opera di Proclo esiste l'edizione curata da Maria Timpanaro Cardini (Giardini, Pisa, 1978) nella quale il brano relativo a Talete si trova a p.71.

2.Viene spontaneo ricordare a questo punto le difese approntate da Archimede in occasione dell'assedio di Siracusa da parte del console Marcello e gli altri episodi che legarono il grande matematico a problemi di carattere pratico: costruzione della sfera armillare; episodio della corona; spostamento di una nave a pieno carico con la forza muscolare di un solo uomo (cfr. ad esempio la citata *Vita di Marcello* di Plutarco o la *Storia di Roma* di Tito Livio, XXIV, 34).

3.Cfr. la loro *Storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna, 1932, pp. 269 e 271.

stabilire la stessa distanza[1], ma vedremo in seguito alcune dimostrazioni di Aristarco di Samo volte alla determinazioni delle dimensioni e delle distanze del sole e della luna.

La spinta per una più consapevole applicazione della matematica avvenne però paradossalmente proprio da parte di chi contribuì in misura maggiore a renderla astratta e razionale: Pitagora di Samo (580-504 a.C. circa). La sua concezione di un universo ordinato e costruito secondo canoni matematici, se da un lato incrementò la ricerca pura volta alla conoscenza dei segreti dell'universo attraverso le proprietà del numero che ne costituiva l'intima essenza, da un altro lato, proprio per questo, indicò all'uomo la possibilità di poter applicare la matematica ad ogni attività umana, pratica o no. La lingua con cui è stato scritto il libro dell'universo è quella matematica, scriverà molti secoli dopo Galileo, e matematici ne sono anche i caratteri[2]. Pitagora aveva detto la stessa cosa, anzi egli era andato ancora più a fondo: la struttura stessa dell'universo (còsmos κοσμος cioè "ordine") non solo era governata dal numero, ma era proprio il numero in tutta la sua magica potenza ordinatrice[3]. E' chiaro che con una concezione siffatta anche qualsiasi problema di ordine pratico deve potersi risolversi nell'ambito della teoria astratta del numero e quindi matematicamente.

Lo stesso Pitagora, d'altra parte, aveva dato un esempio di connessione tra la matematica ed una disciplina apparentemente molto lontana da essa: la musica. Lo studio delle proporzioni tra la lunghezza di una corda vibrante e le note emesse da questa è pur sempre una applicazione della matematica ad una disciplina esterna ad essa. Ma, per ribadire un concetto già espresso, è

----

1. Per quanto riguarda Anassimandro, anche per l'uso scientifico dello "gnomone" all'origine delle principali misurazioni solari, si può leggere l'interessante e denso lavoro di Filippo Franciosi, Le origini scientifiche dell'astronomia greca, L'"Erma" di Bretschneider, Roma, 1990.

2."La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto." (Il Saggiatore Ed. Naz. VI, 232).

3.Numerose sono le testimonianze relative alla concezione pitagorica; Aristotele e i suoi commentatori se ne sono occupati più volte, cfr. ad esempio La Metafisica 985, b 23 - 986, b 31 e il relativo commento di Alessandro (p. 62 sgg. nei Pitagorici, Testimonianze e Frammenti Fasc. III di Maria Timpanaro Cardini, La Nuova Italia, Firenze, 1964).

nella concezione di un universo matematicamente ordinato, nel sogno di una possibile indagine fisico-matematica della realtà che consiste il contributo maggiore dato da Pitagora ad una applicazione della matematica.

La concezione pitagorica, anche talvolta nei suoi aspetti più esteriori, si diffuse con le fortune della scuola fondata da Pitagora che riscosse grande considerazione in tutta l'Antichità nonostante le varie concezioni filosofiche che la fertile fantasia e capacità speculativa dei Greci elaborarono. Ecco che cosa scrivono a questo proposito F. Enriques e G. De Santillana:[1]

> "Col fiorire della scuola pitagorica la tecnica viene penetrando degli ideali matematici. La ragione geometrica (...) si impone in ogni campo, come norma d'azione (...) ogni cosa deve avere la sua giustificazione nel numero e nella misura. (...) L'entusiasmo matematico si ritrova ovunque. Un tipico rappresentante di questo movimento di idee, Ippodamo di Mileto -che nutrito di filosofia diventò poi grande architetto- è il primo che abbia affrontato i problemi dell'urbanistica con criteri razionali. Fu chiamato dai Rodii a sistemare la loro città; Pericle (...) gli diede a ricostruire il Pireo. Quando la lega Panellenica volle fondare la città simbolica di Turii, gli chiese di farne il progetto, ed egli disegnò quel tipo di città geometrica, dalle strade dritte intersecantisi perpendicolarmente, di cui poi l'antichità face così largo uso (ed anzi abuso: si vedano le piante della città di Priene) e che ritroviamo nel tracciato regolare delle città romane. D'altronde Ippodamo non si era accontentato di portare la geometria all'architettura, ma aveva proposto uno schema di costituzione della _polis_, in cui i poteri e gli uffici erano tutti organizzati su una base ternaria: idea che si ritroverà nel _Tripolitico_ di Dicearco[2]. dall'architettura si passa alla scultura: anche qui le matematiche si impongono e pretendono portare il

----

1._Op. cit._ pp. 487-488.

2.Di Ippodamo (V sec. a.C.) parla Aristotele nella _Politica_, 1267, b sgg.; la città stato avrebbe dovuto avere solo diecimila uomini divisi in tre classi (agricoltori, artigiani, militari); anche il territorio avrebbe dovuto dividersi in tre tipi (sacro, pubblico, privato) e anche le leggi, infine, avrebbero dovute essere di tre tipi, relative alle tre colpe possibili (oltraggio, danno, omicidio). Ricordo che Ippodamo, cui venne anche attribuita l'idea del terreno a terrazze nel caso di campi scoscesi, viene considerato pitagorico da Stobeo (cfr. H.Diels, _I Presocratici. Testimonianze e Frammenti_,Laterza, Bari, 1986, I, 442) notizia che in verità M.Timpanaro Cardini considera "tardiva e falsa" (_op.cit._ Fasc.III, p.370); suo allievo fu Dinocrate di Rodi che iniziò la costruzione di Alessandria a cui poi successe Sostrato di Cnido autore del famoso Faro, una delle sette meraviglie del mondo.

proprio criterio estetico. Agatarco ateniese verso il 470, applica la stereometria alla Prospettiva (...) le proporzioni geometriche (...) sono condizione indispensabile di bellezza del corpo umano [secondo Policleto]."

In maniera simile, sebbene con diversa valutazione, si esprime Benjamin Farrington allorché scrive:[1] "il pitagorismo col suo culto del numero e della geometria, fu la teoria che influì più profondamente sulla vita dei greci" e, dopo aver osservato che l'esasperazione di questo autoritarismo toglieva agli artisti la freschezza dell'ispirazione, aggiunge: "Vennero di moda i piani regolatori urbani basati su linee geometriche. Ippodamo di Mileto, un fanatico della teoria del numero, preparò nuovi piani per il Pireo, il porto di Atene, per Rodi e per Turi." Anche Farrington accenna al fatto che l'influenza di Ippodamo si fa sentire anche in epoca romana (e oltre!): "per scegliere due esempi fra i tanti, scrive infatti, gli schemi urbani di Pompei e di Timgad costituiscono tarde testimonianze della tradizione pitagorica, e molte città moderne che sono sorte sul modello di accampamenti romani rivelano ancora l'impronta di quella moda. Perfino il nuovo mondo ne è erede. New York, col suo disegno geometrico e con le sue streets e avenues numerate, è una città interamente pitagorica."

Osserviamo ora un chiaro esempio di matematica applicata ad esigenze esclusivamente pratiche. Troviamo in Erodoto questo significativo passo:

> "[Nell'isola di Samo] sono state realizzate le tre opere più importanti che ci siano fra i Greci tutti: in un colle, che si eleva sino a 150 orge, è stata scavata una galleria che comincia proprio ai piedi del colle e va a sboccare sull'altro versante. La galleria è lunga sette stadi, alta otto piedi e larga altrettanti, per tutta la sua lunghezza è stato compiuto un altro scavo, profondo venti cubiti e largo tre piedi, attraverso il quale, incanalata per mezzo di tubi, giunge alla città l'acqua derivata da una grande sorgente. L'architetto di quest'opera di scavo fu il megarese Eupalino, figlio di Naustrofo. Questa è una delle tre meraviglie..."[2].

1.B.Farrington, La scienza nell'antichità, Longanesi, Milano, 1978, pp. 40-41.

2.Erodoto, Le Storie, III, 60 (tr.L.Annibaletto); notiamo che le le altre due meraviglie sono: "il molo che recinge il porto sul mare e raggiunge la profondità perfino di 20 orge [40 metri circa], mentre la sua lunghezza supera i due stadi [355 metri circa]" e "[le dimensioni] di un tempio, il più grande di tutti i templi che noi conosciamo".
Teniamo presente che un "piede" è circa 0,333...metri; un'"orgia" è uguale a sei piedi e quindi a circa due metri e uno "stadio" è

Notiamo innanzi tutto che in misure attuali (v. nota precedente) la collina in questione era alta circa 300 metri, la galleria aveva una lunghezza di circa 1,244 km, un'altezza e un larghezza di circa 2,6 m mentre il secondo scavo era profondo circa 9 m e largo 1 m.

Penso che la meraviglia di Erodoto, che era rivolta presumibilmente solo alle dimensioni del l'opera di Eupalino, si sarebbe accresciuta se egli si fosse soffermato sulla circostanza che Eupalino forò la collina, oggi chiamata Castro, da entrambe le parti in modo che i due tronconi si potessero congiungere circa a metà strada!

Fu proprio questa circostanza che ha dato da pensare agli storici della matematica dopo che nel 1882 l'opera di Eupalino venne riscoperta e successivamente esaminata da varie spedizioni archeologiche. Alla metà del tunnel fu possibile osservare, infatti, un certo sfasamento orizzontale e verticale; ma come era stato possibile programmare la direzione congiungente i due punti di attacco? Evidentemente, prima della realizzazione dell'opera, il problema dovette essere risolto a tavolino, cioè matematicamente ed è questa risoluzione matematica che interessa soprattutto gli storici.

In verità tutto sembrava risolto da un problema presente nella <u>Diottra</u> di Erone (vissuto probabilmente nel 1° sec. d. C. ma che possiamo situare con sicurezza solo tra il 2° sec. a. C. ed il 3° sec. d. C.): nel XV problema dell'opera, infatti, viene affrontato e risolto il problema che si era presentato ad Eupalino e cioè come "Traforare la montagna secondo una retta che congiunga due punti dati sulle sue falde". L'esame sul posto sembra però escludere che Eupalino possa essersi servito del procedimento indicato da Erone che si sviluppa su un ideale piano passante per i due punti da cui iniziare gli scavi. In questa sede non ha interesse esaminare la polemica sorta a questo proposito[1], comunque siano andate le cose, la matematica greca era

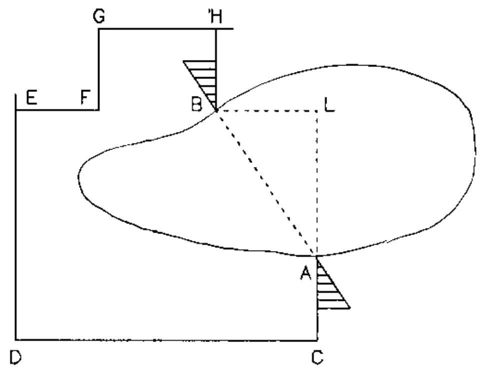
----

...Continua...

uguale a circa 177,70 metri. Un "cubito", infine (questa misura servirà tra poco), ha una lunghezza che oscilla (a seconda dei testi consultati) da 444 mm a 462 mm, cioè poco meno di mezzo metro.

1.Quasi tutti i libri di storia della matematica greca parlano dell'ormai famoso "Tunnel di Eupalino"; riguardo alla polemica relativo al metodo seguito per il congiungimento dei due tronconi, si possono leggere i seguenti articoli nei quali vengono date ulteriori indicazioni bibliografiche: J. Goodfield e S. Toulmin. <u>How was the Tunnel of Eupalinus aligned?</u>, ISIS, 1965, vol. 56, 1; B. L. van der Waerden, <u>Eupalinus and his tunnel</u>, ISIS, 1968; T. Viola, S. Manzoni, M. T. Navale, <u>Problemi geometrici applicati</u>

giunta in qualche modo a risolvere un difficile problema tecnico. Nell'opera di Erone, inoltre, noi possiamo osservarne una soluzione, sia o non sia questa la soluzione di Eupalino.[1]



A e B sono i due punti dai quali si comincia a scavare il tunnel (AB); costruita la poligonale ACDEFGHB con percorso ad angoli retti, è evidente che i cateti AL e BL del triangolo immaginario ABL si possono misurare essendo.

$$AL = DE + FG - (AC + HB)$$
$$BL = DC - (EF + GH)$$

Ma allora, costruendo due triangoli simili al triangolo ABL, come in figura (triangoli tratteggiati), è subito visto che le due ipotenuse sono allineate con AB ed indicano quindi la direzione richiesta.

...Continua...

alle tecniche costruttive e rappresentative in "Imago et mensura mundi", Atti del IX Congresso internazionale di storia della cartografia, Ist. della Encicl. Ital. vol 3.

1.Naturalmente sono state avanzate varie ipotesi relative alla soluzione di Eupalino ma si tratta pur sempre di ipotesi anche se ingegnose; il problema oggi non presenta alcuna difficoltà, ne fanno testimonianza le innumerevoli gallerie che continuamente vengono costruite a partire dalle due parti opposte e con il perfetto congiungimento dei due tronconi e delle maestranze che vi hanno lavorato. A titolo di curiosità, ricordo che nei Problemi di geometria di Lorenzo Mascheroni (Milano, 1832), viene appunto proposto il nostro problema ("continuare la retta AB in C e D [da determinare] al di là dell'ostacolo X che impedisce il traguardo" così lo enuncia Mascheroni) di cui vengono date ben undici soluzioni.

Veniamo ora ad alcune dimostrazioni di Aristarco di Samo (310-230 a. C. circa) su alcune misure astronomiche che si trovano nell'opera Sulla grandezza e sulla distanza del sole e della luna. Ricordiamo, prima di osservare alcuni risultati raggiunti in tale opera, che Aristarco è anche noto per essere stato il primo astronomo greco e forse il primo astronomo in senso assoluto, ad avanzare l'ipotesi eliocentrica. Questa ipotesi, che non si trova nell'opera sopra citata, ma che ricaviamo da una esplicita e attendibile attribuzione presente nell'Arenario di Archimede, non ebbe molti sostenitori: si ha memoria solo di un certo Seleuco che la seguì,[1] dopo di che fu abbandonata, come sappiamo, per molti secoli. Come avverrà per Galileo, anche Aristarco fu attaccato e minacciato per questa ipotesi: riporta Plutarco, infatti, che "Cleante" discepolo di Zenone lo stoico " reputava che Aristarco dovesse essere accusato, davanti ai Greci, di profanazione sacrilega, per aver spostato il focolare del mondo (...) Quest'uomo, infatti, aveva tentato di salvare le apparenze, facendo le ipotesi che il cielo stesse immobile, e che la terra percorresse il cerchio obliquo [l'eclittica] e nello stesso tempo ruotasse intorno al proprio asse"[2]
L'opera di Aristarco, di cui vedremo solo alcuni risultati, è costituita da sei ipotesi e diciotto proposizioni ed è strutturata in forma razionale di tipo euclideo. Aristarco usa diverse proprietà geometriche presenti negli Elementi di Euclide ed inoltre una proprietà che espressa con nostro simbolismo risulta essere:

$$\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta < \alpha/\beta < \operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}\beta \quad (0 < \beta < \alpha < \pi/2)$$ [3]

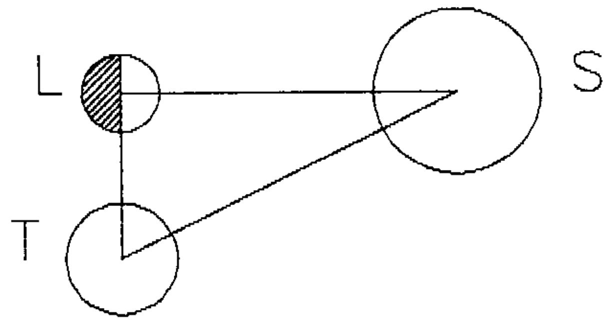
Osserviamo ora le sei Ipotesi su cui Aristarco basa le sue dimostrazioni:

1) La luna riceve la luce dal sole;
2) la terra è come un punto e centro della sfera in cui si muove la luna;
3) quando la luna appare divisa in due parti uguali il [piano del] cerchio massimo che divide la parte illuminata è nella direzione dei nostri occhi;

1.Cfr. T. Heath, op. cit., II, p. 3.

2.Plutarco, De Facie in orbe lunae, cap.6; ho tratto questa citazione dall'opera di Aldo Mieli, Manuale di storia della scienza, ed,Leon. da Vinci, Roma, 1925, p.122.

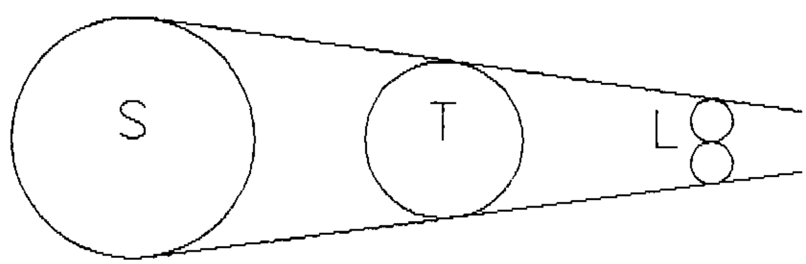
3.Aristarco non sente alcuna necessità di giustificare le due disuguaglianze e da ciò possiamo dedurre che esse dovevavno essere ormai acquisite da tempo; troviamo, infatti, una dimostrazione della seconda nell'ottava proposizione dell'Ottica di Euclide; anche della prima i matematici greci ci hanno tramandato una dimostrazione (Tolomeo, Almagesto, I, 10) anche se questa è successiva ad Aristarco.



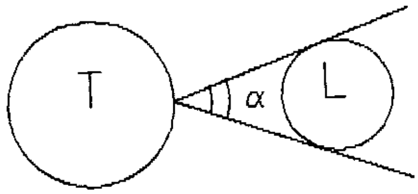
4) quando la luna appare divisa in due parti uguali, la sua distanza dal sole è [vista sotto l'angolo] minore di un quadrante per un trentesimo di quadrante;
(facendo riferimento alla figura precedente si ha cioè LTS = 1R - 1/30 R = 87°)

5) la larghezza dell'ombra [della terra] risulta di due lune;

(in altre parole, il cono d'ombra proiettato dalla terra all'altezza della luna contiene questa esattamente due volte, v.fig.)



6) la luna sottende una quindicesima parte [del segno] dello zodiaco.



$\alpha = 1/15 \cdot (1/12 \cdot 360°) = 2°$

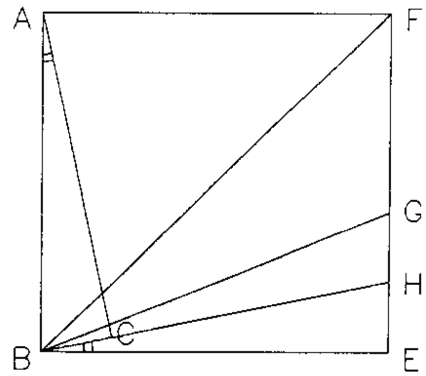
Notiamo che le misure odierne, grazie a strumenti più sofisticati, sono alquanto diverse da quelle di Aristarco; nella quarta ipotesi, ad esempio, a seconda di quando avviene il fenomeno dell'esatta divisione tra ombra e luce nella luna (primo e ultimo quarto), l'angolo LTS assume i valori di 89° 50' 16,8" e 89° 50' 45,6" il che vuol dire che il sole risulterà molto più lontano di quanto verrà ottenuto da Aristarco. Così nell'ipotesi cinque quel valore "due" andrebbe sostituito con 2,606.. ed infine nell'ipotesi sei l'angolo sotto il quale la luna è vista dalla terra oscilla tra 28' 43" e 34' 30" con una media quindi di 31' 36,5". A proposito di quest'ultima misura, notiamo che Aristarco la corresse successivamente in 30', cioè molto vicino a quella di oggi, poiché è questa la misura che gli viene attribuita da Archimede nell'Arenario.

Gli "errori" che si trovano nelle misure di Aristarco, per altro straordinarie ai suoi tempi, nulla però tolgono al rigore del suo ragionamento tanto che sostituissimo alle sue misure quelle di oggi avremmo dei valori abbastanza vicini a quelli che oggi calcoliamo[1]

Vediamo ora, a titolo d'esempio, una delle più importanti proposizioni di Aristarco, la settima, nella quale viene dimostrato che "La distanza che separa il sole dalla terra è maggiore 18 volte, ma minore di 20 volte, della distanza in cui la luna dista dalla terra" In altre parole, indicando con A, B, C rispettivamente i centri del sole, della terra e della luna, Aristarco dimostra che:

1.Ricorda Francesco Pozzo de Somenzi alla voce "Aristarco" dell'Enc. Ital. Treccani), parlando del metodo di Aristarco, che "Keplero nel 1618 ne invocava l'applicazione ad una misura telescopica e Goffredo Wandelin trent'anni più tardi se ne serviva per una determinazione che, pur effetta da errore notevole, è la prima che si approssima alla verità"

$18 < AB/BC < 20$



Si consideri il quadrato di lato AB e sia BG la bisettrice dell'angolo FBE = 1/2·R. Si prolunghi BC sino ad H (v. fig.) e si ricordi che per la quarta ipotesi l'angolo $B\hat{A}C$ (= $H\hat{B}E$) = 1/30·R.

Ricordando la proposizione di Euclide (Ottica,8), si ha:

(*) $GE : HE > G\hat{B}E : H\hat{B}E = 1/4 \cdot R : 1/30 \cdot R = 15/2$

ma per il teorema della bisettrice

(**) $FG : GE = FB : BE > 7/5$[1],

componendo si ha dunque:

(***) $FE : GE > 12/5$.

Dalle (*) e (***), moltiplicando membro a membro, si ha:

$GE/HE \quad FE/GE > 15/2 \cdot 12/5$ cioè $FE/HE > 18$.

ma per la similitudine dei triangoli BHE e ABC, si ha:

----

1. Il rapporto FB : BE è uguale, come scriveremmo noi, a $\sqrt{2}$ che i matematici greci approssimavano con valori d_n / l_n per difetto o per eccesso dedotti dai cosiddetti «numeri diagonali e laterali»:

d_n)	1	3	7	17	41 ...
l_n)	1	2	5	12	29 ...

tenendo presente che si pone inizialmente $d_1 = l_1 = 1$ e si costruiscono i valori successivi con le formule ricorrenti:
$d_n = d_{n-1} + 2\, l_{n-1}$; $l_n = d_{n-1} + l_{n-1}$ (per questa interessante risultato dell'aritmetica pitagorica cfr. «Attraverso la storia della matematica» di Attilio Frajese, Le Monnier, Firenze, 1969, p. 239 sgg.).

$FE/HE = BE/HE = AC/BC$

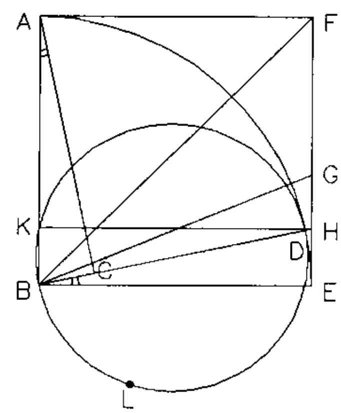
quindi

$AC/BC > 18$

e, a maggior ragione:

(1) $\mathbf{AB/BC > 18}$.

Si consideri ora la parallela per H a BE e sia D il suo punto d'incontro con l'arco di circonferenza di centro B e raggio BA e K quello d'incontro con il lato BA. Poiché l'angolo $D\hat{K}B$ è retto, la circonferenza di diametro BD passa per K e sia L un punto di tale circonferenza tale che BL sia uguale alla metà di BD e cioè uguale al raggio.



Poiché $K\hat{D}B = H\hat{B}E = B\hat{A}C = 1/30 \cdot R$ e l'angolo al centro dell'arco BL è uguale ad 1/6 di angolo giro e cioè $2/3 \cdot R$ (e dunque quello alla circonferenza è $1/3 \cdot R$), si ha:

(°) arc BK / arc BL = 1/10;

d'altra parte, per la proprietà già menzionata $\alpha/\beta > \operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta$ (con $0 < \beta < \alpha < \pi/2$) si ha:

(°°) arc BK / arc BL < BK/r.

Pertanto, dalle (°) e (°°) si ottiene:

$1 : 10 > BK : r$ cioè $r < 10 \cdot BK$

da cui, moltiplicando per due:

(°°°) BD < 20·BK cioè BD/BK < 20

tenendo ora presente che per la similitudine dei triangoli BDK e ABC si ha BD/BK = AB/BC, si può concludere che:

(2) **AB/BC < 20.** ■

A titolo di curiosità, osserviamo quali risultati si ottengono con questi calcoli se al posto delle misure di Aristarco si vanno a sostituire quelle di oggi:

Angolo ABC = 89,842° (valore medio tra 89,838° e 89,846°); di conseguenza l'angolo HBE = 0,158 e il rapporta GBE/HBE anziché 15/2 diventa (90/4) : 0,158 = 142,405 (*).
I rapporti FB : BE = $\sqrt{2}$: 1 sono uguali a 1,4142.. cosicché componendo si ha FE/GE = 2,4142 (***).
Moltiplicando (*) e (***) si ottiene dunque (senza ripetere i passaggi già fatti):

(1)' **AC/BC >** 142,405 2,4142 = **343,794.**

Analogamente, il rapporta tra l'arco BK e l'arco BL diventa (anziché 1/10) 0,158° : 30° = 0,005266.. (°) il cui reciproco é 189,873; dunque si ha r < 189,873 BK e, in definitiva (moltiplicando per due ecc.):

(°°)' **AB/BC < 379,746.**

Notiamo infine che il valore esatto (medio) di tale rapporto AB/BC è oggi, con le misure espresse in chilometri, uguale a 149.650.000 / 384.400 = 389,3080[1].

Nelle successive proposizioni Aristarco, indicando con l, t, s i diametri rispettivamente della luna, della terra e del sole e con L e S le distanze dei centri della luna dalla terra e del sole dalla terra, ottiene i risultati:

Prop. 9 18 < s/l < 20

Prop. 11 1/30 < l/L < 2/45

Prop. 15 19/13 < s/t < 43/6

Prop. 17 108/43 < t/l < 60/19.

----

1. Si noti che se usare il valore medio dell'angolo BAC ottenuto dai due valori che si possono calcolare al primo o all'ultimo quarto, avessimo usato il più grande (89,846°), avremmo ottenuto per le due limitazioni 352,72.. e 389,61.. ancora più straordinariamente vicine ai valori di oggi.

Ebbene, usando i valori medi, possiamo anche considerare i seguenti risultati:

Prop. 7 $S/L = 19$

Prop. 9 $s/l = 19$

Prop. 11 $l/L = 7/180$ cioè $L/l = 180/7$

Prop. 15 $s/t = 27/4$

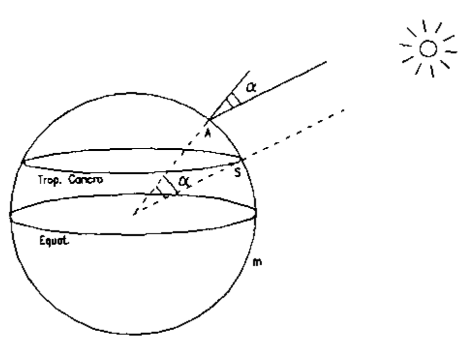
Prop. 17 $t/l = 2316/817$.

In questo modo è possibile calcolare, in diametri terrestri, la distanza del sole dalla terra:

$$S/t = L/l \quad S/L \quad l/t \quad = 180/7 \quad 19 \quad 817/2316 = 172{,}35...$$

Questo valore non è naturalmente attendibile e anche se sarà migliorato dai vari astronomi successivi rimarrà sempre lontano da quello che si calcola oggi (S/t = 149.650.000/2 6370 = 11.746,46..).

Per completare le misurazioni di Aristarco (o quelle degli astronomi che lo seguirono) bisognerebbe calcolare dunque il diametro terrestre. A questo penserà Eratostene (276-194 a.C.) con la sua famosa misura del meridiano terrestre che è un altro esempio di matematica applicata.



Nella figura si è indicato con A la città di Alessandria in cui nel giorno di altezza massima del sole (solstizio del 21 giugno) i suoi raggi hanno una inclinazione rispetto alla verticale di circa $(7 + 1/7)°$; con S la città di Siene (la moderna Assuan) che si trova (quasi) sullo stesso meridiano di Alessandria e sul tropico del cancro il che vuol dire che nello stesso giorno del solstizio considerato (e solo in questo giorno) i raggi cadono perpendicolarmente. Ebbene misurando la distanza delle due città in 5000 stadi (circa 785 km) forse per mezzo di camminatori dal passo regolare, si ottiene, dall'evidente proporzione (v. fig.):

$$\alpha : AS = 360° : 785$$

cioè, indicando con m la lunghezza in chilometri del meridiano:

$$(7 + 1/7) : 785 = 360 : m$$

da cui si ottiene, con stupefacente approssimazione:

m = 39.564 km ![1]

Silvio Maracchia

---

1. La misura esatta, secondo la tradizionale definizione del metro è 40.000 km; bisogna pensare che gli errori commessi da Eratostene nelle sue misure si siano compensati.