Ratio Mathematica
Nr. 17 (2006)

LA GEOMETRIA NON-ARCHIMEDEA.
DALLE PREMESSE AGLI INFINITI MODELLI ATTUALI

Raffaele Mascella
Dipartimento di Scienze della Comunicazione
Università degli Studi di Teramo
rmascella@unite.it

La geometria non-archimedea sembra essere un'ipotesi astratta e fantasiosa, accettabile nella matematica ma non per la rappresentazione spaziale, perché usa concetti a lungo esplorati nel pensiero scientifico e filosofico e spesso rigettati, quali l'infinito e l'infinitesimo attuali. L'articolo analizza gli aspetti storici, epistemologici, filosofici e matematici legati a questa geometria ed alle sue radici, considerando l'impostazione dell'inventore Giuseppe Veronese, della formalizzazione analitica di Levi-Civita e di altri matematici e filosofici che sul tema hanno fornito risultati e dibattuto, quali Cantor, Hilbert e Hahn, per terminare con gli infiniti modelli che oggi conosciamo. Questa geometria appare sottovalutata, ma si presta ad un ruolo non meno importante di alcune alternative non-euclidee, spesso semplicisticamente considerate come uniche varianti astratte dei modelli euclideo e riemanniano.

1. Introduzione

Dati due segmenti rettilinei, oppure due pesi o altri due rappresentanti di una stessa grandezza fisica, un qualche multiplo del primo sarà capace di superare il secondo. Questa affermazione rispecchia talmente in profondità la nostra esperienza del mondo, che ci risulta difficile immaginare un universo ed una geometria che non la rispettino. Anche in ambito cosmologico, la stella conosciuta a noi più distante sarà lontana tanti anni luce, ed anche prendendo il millimetro come segmento da moltiplicare o come unità di misura, se ne prendiamo un numero molto, molto grande, riusciremo a raggiungere la stella ed anche a superarla. Dunque, se consideriamo la geometria una scienza osservativa ed empirica che si preoccupa di rappresentare il mondo che conosciamo, sembra inevitabile che una tale affermazione debba esserne posta alla base come principio di verità assoluta. Anche se le nostre teorie dello spazio e dell'universo includono, in modo esplicito o sottinteso, questa affermazione sulla vicendevole raggiungibilità delle grandezze, da quelle più affermate a quelle formulate ancora in chiave ipotetica. Ma la storia della scienza, e quella della geometria in particolare, ci insegna che non sono i secoli di affermate ed inossidabili convinzioni sulla natura del mondo a rendere definitive le teorie: che il mondo non è piatto, che lo spazio non è esattamente euclideo, che le tre dimensioni spaziali (o le quattro spazio-temporali) potrebbero benissimo essere in numero maggiore, e così via.

Nella matematica astratta, invece, dove una geometria è un sistema teorico che rispetta un certo numero di assiomi, possiamo invece considerare e costruire una geometria in cui una tale affermazione non valga, ed è una geometria che in questo ambito può esistere legittimamente, con dignità di appartenenza pari, se non superiore, alle alternative non-euclidee, non-desarguesiane, non-pascaliane, e via dicendo, per le notevoli implicazioni filosofiche che una geometria di tal specie porta con sé. Per una tale costruzione, peraltro, proprio per la sua natura "perlustrativa", non è necessario far riferimento ad enti di base semplici, che siano numeri o segmenti; siamo nell'ambito dei modelli astratti, ed allo scopo tornano utili anche una serie di enti e concetti più complessi, algebrici ed analitici; in primis i campi ordinati, non importa se reali o astratti.

Nel 1891, nel libro *Fondamenti di Geometria* ed a seguire in una serie di articoli fino al 1909, Giuseppe Veronese pose per la prima volta in modo chiaro alla comunità matematica e filosofica il problema di una geometria che non rispondesse necessariamente al postulato di Archimede, tanto nelle forme astratte, tanto nella rappresentazione spaziale. In tutti i modelli concepiti fino a quel punto, ed in tutte le varianti fino allora indagate, esso non era stato mai tirato in causa geometricamente. Alla questione sollevata dal matematico italiano, la comunità scientifico-filosofica rispose in parte con il rifiuto, in parte con l'accettazione e con una serie di importanti lavori che la completarono e ne sancirono la fondatezza, tra cui quelli di Du Bois-Reymond, Levi-Civita, Hahn e Hilbert. Ma la geometria non-archimedea è rimasta sempre in secondo piano, trascurata rispetto alla più classica forma euclidea ed alle quasi contemporanee varianti non-euclidee, rese oggetto d'attenzione poco prima ma rese più importanti dalla fisica di Einstein e dalla connessione con i dati osservativi ed empirici.

L'interesse per la geometria non-euclidea, per queste ragioni innanzitutto, si è rivelata da subito più incisiva ed accettata, in quanto destabilizzava più in profondità le apparentemente solide conoscenze dello spazio. La geometria non-archimedea, anch'essa in un certo senso non-euclidea, nel senso di "diversa" dalla geometria di Euclide, non ha invece goduto dello stesso fascino. Certamente il suo impatto è stato meno devastante rispetto alla geometria "non-euclidea" propriamente detta, perché mette in discussione una proprietà del continuo rettilineo che, dopo essere passata attraverso l'identificazione con i numeri reali, sembra essere una variante molto più fantasiosa ed artificiosa. In realtà, proprio l'assioma archimedeo è un'architrave di passaggio dalla geometria all'aritmetica ed alla teoria dei numeri e viceversa, perché enuncia una proprietà che utilizziamo sia per caratterizzare lo spazio, sia per caratterizzare gli insiemi attuali (in senso aristotelico) di cui possiamo disporre. È, insomma, uno dei principali collanti tra la geometria rettilinea e la teoria dei numeri.

Russell (1897) ad esempio, fa riferimento continuo all'opera di Veronese (1891) per quanto riguarda l'assiomatica, riferendosi all'italiano per il primo assioma che Russell vede nella geometria proiettiva a priori, ma anche per chiarire concetti e sviluppi storici, nel solco del quadro storico-critico della geometria tracciato da Veronese, ma non fa riferimento alla variante non-archimedea, pur avendo scritto il suo saggio nel pieno della polemica nata su tale questione. Russell concentra la sua attenzione sulla geometria a priori e sugli assiomi di base che dovrebbero porre la geometria proiettiva come preliminare alla geometria metrica, e poi sulle argomentazioni filosofiche che intendono stabilire la necessità empirica anche se non logica dell'euclideo rispetto alle sue varianti iperbolico ed ellittico. Tiene in gran conto Veronese, ma dell'archimedeo, o della sua negazione, Russell non fa menzione.

Ad ogni modo, questa "nuova" geometria richiama già in prima istanza alcuni dei concetti più dibattuti della storia della scienza matematica, per comprendere la natura del mondo empirico e dei nostri modelli concettuali, che fanno capo alla continuità e all'infinito. E se la continuità è stata appannaggio quasi esclusivo dello scienziato e del filosofo di scienza, l'infinito con le sue problematiche, ha portato da sempre fascino e curiosità anche nello scrittore e nel poeta, nel filosofo metafisico e nell'uomo di strada. Poi, sulla questione dell'infinito e dell'infinitesimo, il mondo è stato da sempre diviso in una perenne controversia tra spazio osservabile e non, in particolare su come le grandezze che conosciamo empiricamente nello spazio osservabile si possano, o debbano, comportarsi nello spazio esterno alla nostra osservazione.

Al centro della problematica vi è la validità, o la non validità, del cosiddetto *postulato di Archimede* (o *di Eudosso-Archimede*). Pur essendo attribuito ad Archimede, il postulato così come oggi lo conosciamo è ricondotto ad Euclide che lo esplicita nella definizione 4 del libro V degli *Elementi* stabilendo che (Boyer 1980: p. 134):

> Si dice che due grandezze stanno in rapporto l'una con l'altra, quando, se moltiplicate, sono in grado l'una di superare l'altra.

E' un postulato che oggi si ritrova in tutti i pilastri dell'edificio matematico, a cominciare dalla geometria, dall'aritmetica e dall'analisi. È infatti con esso che possiamo riconoscere che la successione 1, 2, 3, … è divergente o che la successione 1/2, 1/3, 1/4, e così via, è infinitesima.

In origine, esso è probabilmente dovuto ad Eudosso (IV sec. a.C.), così come tutta la teoria delle grandezze. Fu Stolz a proporne questa denominazione ritenendo che Euclide ne facesse solo un uso implicito e che invece fosse stato Archimede a darne una definizione precisa e ad usarlo in modo esplicito anche se nel contesto di aree e volumi. Archimede, nello specifico, lo usa nell'opera Sulla sfera e sul cilindro per dimostrare che i rapporti tra le rette possono tendere ad uno, purché sia opportunamente definito la modalità con cui formare i rapporti successivi tra loro. Per Archimede, si possono trovare coppie di segmenti di rette disuguali, tali che il loro rapporto sia minore di qualunque rapporto prefissato maggiore dell'unità, ma vicino all'unità quanto si voglia. In altri termini, le grandezze si possono avvicinare tra loro quanto si vuole.

E' interessante notare, inoltre, come il postulato di Archimede formalizzi matematicamente il pensiero filosofico di Anassagora (V secolo a.C.): «Rispetto al piccolo non c'è un minimo, ma c'è sempre un ancor più piccolo, ma anche rispetto al grande c'è anche un ancor più grande». Anche Aristotele lo accettava, confermandone l'uso fatto dai matematici, e nella *Fisica* chiarisce: «Aggiungendo continuamente a una grandezza finita oltrepasserò qualsiasi grandezza limitata e sottraendo ne lascerò similmente una minore di qualsiasi altra».

Con la scuola d'Elea si apre il dibattito sull'*infinito attuale* e *l'infinito potenziale*, che nel caso non-archimedeo ritorna in campo prepotentemente, accompagnati dall'altro grande problema dei greci, l'incommensurabilità. La direzione più comune che si può storicamente riscontrare è quella della messa al bando dell'infinito attuale, ovvero l'infinito visto come ente a se stante (ad esempio la totalità dei numeri interi). L'infinito potenziale rimane l'unico e vero infinito trattabile (una grandezza è finita, ma può diventare arbitrariamente grande, o arbitrariamente piccola). Questa è stata, peraltro, la chiave concettuale con cui fu proposto ed utilizzato il primo metodo infinitesimale propriamente detto della matematica classica, ovvero il metodo di esaustione. Questo è in fondo un metodo di integrazione, ma non uno strumento di calcolo, bensì un metodo per dimostrare in modo rigoroso la validità di certe uguaglianze di aree o volumi, facendo uso, appunto, del postulato archimedeo: "*date due grandezze omogenee* A *e* B, *con* A < B, *esiste un numero* n *tale che* nA > B". In questo postulato si avverte la presenza dell'infinito potenziale: comunque sia grande o piccola la grandezza A rispetto alla grandezza B, ci sarà sempre un multiplo di A che supera B, poiché ripetendo A per un numero arbitrario di volte (ovvero iterando il processo di auto-addizione) è possibile superare qualunque grandezza assegnata. In potenza, qualsiasi quantità è raggiungibile.

Archimede ne dà un'enunciazione diversa, ed invece di richiedere l'esistenza di un multiplo della quantità minore che superi la maggiore, impone la condizione che per due grandezze A e B ci sia un multiplo della differenza che superi una terza grandezza C, omogenea con le precedenti. Il Postulato di Eudosso-Archimede è dunque un postulato vero e proprio: esso non vale per tutte le grandezze, ma vale solo per certe grandezze d'ora in poi denominate, per definizione, *archimedee*. Archimede è anche consapevole che questo postulato non è sostanzialmente una novità. Infatti nella lettera a Dositeo, prefazione al testo *Quadratura della parabola*, scrive: «[…] avendo assunto il seguente lemma per la sua dimostrazione: date due aree disuguali è possibile, aggiungendo a se stesso l'eccesso di cui la maggiore supera la minore, superare ogni area limitata data. Anche i geometri anteriori a noi si son serviti di questo lemma: infatti se ne sono serviti per dimostrare che i cerchi stanno fra loro in ragione duplicata dei diametri, e che le sfere stanno in ragione triplicata dei diametri, e ancora che ogni piramide è la terza parte del prisma avente la stessa base della piramide ed uguale altezza, e che qualunque cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base del cono ed altezza uguale, ciò assumendo un lemma simile a quello suddetto […]».

Ad ogni modo Euclide non assunse mai esplicitamente la validità della proprietà archimedea per una grandezza geometrica. Ciò che egli assunse era soltanto che la linea retta si comportava in modo archimedeo, suggerendo o che le rette infinite si comportano come quelle finite, o che quelle infinite sono escluse dalle proposizioni riguardanti le misure.

Un'ultima questione da sottoporre in questo paragrafo introduttivo, riguarda la linearità del postulato ed il suo legame principalmente con il rettilineo geometrico. In tutta la letteratura geometrica, dagli scritti di Euclide fino ai nostri giorni, poca considerazione è stata generalmente data all'idea della retta come struttura assiomatica a se stante, ovvero come struttura non indotta da un'assiomatica più ampia, ad esempio quella del piano o dello spazio. D'altronde la concezione prevalente della geometria è stata principalmente quella di scienza della rappresentazione spaziale, quindi con una natura empirica sottostante alla formalizzazione matematica ed alle procedure logiche deduttive. In altre parole, la scarsa considerazione probabilmente dipende dal fatto che la retta è un sistema "povero", che non permette una rappresentazione adeguata, se vogliamo "completa", dell'ambiente fisico in cui viviamo.

Nel caso della geometria non-archimedea, come anticipato, maggiore attenzione va posta proprio al continuo rettilineo, perché l'assioma di Archimede tira in ballo una proprietà lineare delle grandezze e questa trova la sua naturale e principale applicazione nella geometria uno-dimensionale. Ciò non esclude, tuttavia, che l'idea non sia trasportabile anche in modelli geometrici con più di una dimensione.

Una serie di modelli sia lineari che a più dimensioni sono perciò ripercorsi, dalla pionieristica retta di Veronese, con l'evoluzione in chiave algebrica di Levi-Civita, passando per la caratterizzazione data da Hahn (1907) e, per terminare, sui modelli da me discussi in precedenti lavori (Eugeni-Mascella 2002, 2005). In questi ultimi, abbiamo costruito un sistema di assiomi contenente gli assiomi di ordinamento di Peano da cui, dopo aver dimostrato l'isomorfismo tra la retta euclidea e l'insieme ordinato dei reali, abbiamo presentato un nuovo modo di caratterizzare le rette non-archimedee con diversi esempi (infiniti) non isomorfi di rette non-archimedee.

2. L'infinito e l'infinitesimo

"Ciò che è conoscibile è finito". Potrebbe essere questa, una delle massime che sintetizzano secoli di pensiero matematico e filosofico. Ma potremmo anche aggiungere, "… e con poca precisione", visto che nella finitezza la nostra lente di osservazione ha chiari limiti percettivi, peraltro scientificamente provati. L'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo hanno giocato un ruolo centrale nel storia del nostro pensiero. Talvolta nel senso dell'inconoscibilità, talvolta nel ricorso all'extraumano ed all'Assoluto, talvolta nel senso della sua negazione. Ciò che ci interessa in questa sede è però l'approccio intuitivamente più semplice, quello che assegna dei limiti ai processi conoscitivi, senza ulteriori riferimenti sovrastrutturali e senza eliminazioni artificiose delle idee indotte sugli infiniti e sugli infinitesimi.

In tutto il periodo storico dal mondo Classico alla prima metà dell'Ottocento, vi è stata la concezione che, sebbene ogni grandezza possa essere concepita come limitata o illimitata, quelle che si possono effettivamente utilizzare, quelle che esistono concretamente, nonché i processi che si possono "effettivamente" eseguire, sono solo quelli finiti. Anche se possiamo concepire nozioni che coinvolgono l'infinito, non è stata generalmente ammessa la loro esistenza reale. In breve, nella forma aristotelica, con l'infinito si tratta un concetto *potenziale*, non *attuale*. Seguendo Geymonat (1970: I, p. 58): «Si dice che una grandezza variabile costituisce un 'infinito potenziale' quando, pur assumendo sempre valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un segmento con successivi dimezzamenti... il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla invece di 'infinito attuale' quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi; se per esempio immaginiamo di aver scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte a un infinito attuale, perché non esiste alcun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti».

L'infinito è potenziale e può essere avvicinato solo attraverso iterazioni indefinite, cioè eseguite un certo numero di volte via via più lungo. Dunque una finzione, ma necessaria per poter risolvere alcuni problemi posti dal nostro intelletto. Più in dettaglio, Aristotele distingue tre diversi modi di considerare l'infinito: (a) per composizione, come nel caso dei numeri che possono generare numeri sempre più grandi, (b) per divisione, come nel caso della materia, divisibile fino a raggiungere elementi sempre più piccoli e infine (c) per composizione e divisione, come il tempo che non ha né inizio né fine.

In Aristotele l'infinito attuale è respinto, associato all'idea di imperfezione. È sulla stessa scia che Euclide non fa riferimento a rette illimitate o infinite, ma a segmenti prolungabili a lunghezze arbitrarie o, analogamente, non all'esistenza di infiniti numeri primi, ma all'esistenza di numeri primi in numero sempre maggiore (Luminet-Lachièze Rey, 2005: p. 69). Così anche nell'assioma delle parallele: le rette non sono infinitamente estese, bensì si possono estendere indefinitamente.

L'infinito attuale viene evitato definendo un infinito minimale, giusto il necessario per permettere la costruzione dell'edificio teorico, ma senza per questo introdurre un "nuovo" numero. Dunque, con tale approccio, i numeri interi sono potenzialmente infiniti, perché possiamo costruirne sempre di più grandi, ma il loro insieme infinito, come tale, non esiste. L'infinito è cioè im-perfetto, in-terminabile e im-pensabile.

Sulle orme di questi classici, folte schiere di scienziati e filosofi hanno mostrato una dura resistenza al concetto di infinito attuale, anche oltre i limiti di un atteggiamento razionale. Da un lato, l'infinito pensato come attributo attuale è resistito solo in riferimento al divino religioso; dall'altro, ha mostrato segni di rinascita come elemento essenziale nella matematica e nella filosofia naturale, a partire dalla geometria descrittiva, per finire agli studi infinitesimali (integrazione e derivazione su tutti) e cosmologici.

Peraltro, gli infiniti hanno costituito e continuano a costituire un terreno di paradossi molto fertile, ostacolando nei secoli la formazione di una teoria compiuta per la loro manipolazione. E ad ogni buon conto, in ogni momento della sua biografia, «lo statuto fisico dell'infinito è legato inestricabilmente con il suo statuto metafisico» (Luminet-Lachièze Rey, 2005: p. XII).

Il paradosso che più ha minato la nozione di infinito attuale è stato quello della riflessività, che riguarda l'infinitamente grande: in un insieme infinito esiste la possibilità di mettere in relazione biunivoca il tutto con una parte propria. D'altro canto è proprio questa apparente contraddizione a fare da sfondo negli sviluppi successivi della teoria dell'infinito, a cominciare da Bolzano, Dedekind e Cantor. È infatti Bolzano che segna una tappa decisiva sostenendo convintamente l'esistenza dell'infinito attuale, avente uno statuto ontologico come quello che spetta ai numeri finiti. Ma per far ciò occorre abbandonare il carattere paradossale delle sue proprietà; anzi, tali proprietà vanno utilizzate per la definizione stessa di infinito.

A dare forma alle idee di Bolzano provvedettero Dedekind e Cantor, con la teoria e la gerarchia degli infiniti tuttora unanimemente accettati. Cantor, in particolare, enucleò per primo i cosiddetti numeri "transfiniti", che rappresentano gli infiniti matematici sia in senso cardinale che ordinale. Dunque esistono tanti infiniti, a partire dal più semplice, quello numerabile, per continuare con il continuo, e per proseguire, anche qui all'infinito, con potenze successive sempre più grandi, e senza limiti. Il tutto nell'ambito di una precisa gerarchia, definita dal carattere costruttivo che ne prova l'esistenza.

I transfiniti sono numeri infiniti che possiamo manipolare ed utilizzare per fare calcoli, anche se hanno una natura diversa dagli usuali numeri interi e reali. Ciò è stato evidenziato dalla teoria dei numeri non-standard, introdotti negli anni Sessanta da Abraham Robinson. Il modello di Robinson interessa l'aritmetica, nell'idea di contenere sia i numeri interi, sia i numeri infinitamente grandi con i loro inversi, che dunque si comportano come infiniti ed infinitesimi attuali. Se da un lato questo modello pone interrogativi sullo statuto entro cui la nuova matematica si muove, dall'altro legittima il calcolo su queste quantità

Ma l'infinitamente piccolo e l'infinitamente grande, seppure appaiono simmetrici nella concezione matematica (se a diventa molto grande, $1/a$ diventa molto piccolo) e fin da Aristotele, sembrano avere una storia completamente differente. Il problema dell'infinitamente piccolo nasce dal fatto che una grandezza finita possa essere, almeno al livello del pensiero astratto, divisa in sottoelementi sempre più piccoli. La divisibilità "indefinita" è connessa con la nostra percezione della natura continua delle cose e del mondo, che ci appare stabile e permanente. Per l'infinitamente grande, invece, possiamo certamente pensare all'estensione del mondo, ma per padroneggiarlo abbiamo bisogno di un apparato concettuale relativamente più complesso.

E la situazione paradossale messa in risalto dalla tartaruga di Zenone è rappresentativa delle difficoltà storiche. La tartaruga, seppur lentamente, si muove sempre ed il suo inseguitore, Achille, può correre alla velocità che vuole, comunque finita, e non potrà mai raggiungerla.

Per John Stuart Mill queste difficoltà sull'infinito derivano da un errore di ragionamento, generato dalla confusione che nel nostro intelletto si crea tra tempo divisibile in modo indefinito e tempo infinito. Ora, sebbene la matematica abbia imparato a padroneggiare tali situazioni ed a risolvere circostanze in apparenza irragionevoli (per la tartaruga di Zenone vi è la confutazione di Russell, per cui si possono mettere in corrispondenza biunivoca le due successioni di punti che identificano i luoghi occupati dalla tartaruga ed Achille. Con questa posizione le due successioni raggiungono lo stesso punto finale), questo genere di paradossi, in definitiva, può emergere su tutte le grandezze, nel momento in cui ammettiamo la possibilità della divisione infinita.

La presenza di grandezze infinitesime è chiara anche ad Euclide. Il matematico tolemaico di solito rivolge la sua attenzione agli angoli rettilinei, ma nel libro III (alla proposizione 16) ottiene un risultato interessante per i nostri scopi, relativo all'angolo formato da una circonferenza e dalla tangente in un punto, angolo successivamente chiamato *di contingenza* da G. Nemorario. Il risultato complessivo vive su tre proposizioni strettamente collegate, di cui l'ultima riguarda la quantità infinitesimale: (i) se dal diametro di un cerchio consideriamo la perpendicolare all'estremo del diametro, questa cade fuor dal cerchio; (ii) fra la circonferenza e la retta perpendicolare al diametro non esiste nessuna altra retta; infine (iii) l'angolo compreso fra l'arco di circonferenza e la perpendicolare è minore di qualsiasi angolo rettilineo.

Si comprende come l'ultima proposizione sia una "banale" conseguenza della seconda, in quanto per l'esistenza di un angolo rettilineo minore dell'angolo di contingenza è richiesta l'esistenza di una retta compresa tra la circonferenza e la perpendicolare al diametro, ma ciò è appunto dichiarato impossibile.

Dunque si profila una difficoltà che appare insormontabile, se consideriamo gli angoli rettilinei, curvilinei e mistilinei come grandezze della stessa specie. Per tali grandezze non vale il postulato di Archimede, cioè a dire non esiste un multiplo del minore che supera il maggiore o, parimenti, esiste un sottomultiplo del maggiore più piccolo del minore, ammettendo la divisibilità delle grandezze. E questo è il caso, visto che nessun sottomultiplo di un angolo rettilineo può diventare più piccolo dell'angolo di contingenza.

Euclide, pur ammettendo la possibilità teorica di grandezze infinitesime, le bandisce con la definizione 4 del Libro V. In tal modo esclude esplicitamente le grandezze che non soddisfano il postulato di Archimede, perché grandezze che non sono in rapporto creano inevitabili problemi alla sua teoria delle proporzioni. Anche l'atteggiamento di Archimede, nei confronti di tali grandezze è della stessa specie di Euclide. Pur non escludendo la loro possibilità logica, al momento opportuno le lascia fuori dalla sua costruzione razionale. Le grandezze che considera non sono le uniche effettivamente presenti in natura o che si possono studiare, sono soltanto quelle che vengono trattate per definire il campo di validità delle sue teorie. E dunque il postulato di Archimede non esprime una verità necessaria, seppure indiscutibile nella nostra esperienza, ma soltanto più "comoda" per la nostra visione del mondo. Inevitabile, in questo caso, il richiamo a posizioni di tipo convenzionalistico, che peraltro esprime lo stesso Archimede nella *Quadratura della parabola*: «Accade ora che dei suddetti teoremi ciascuno è considerato non meno degno di fiducia di quelli dimostrati senza quel lemma: a noi basta che venga concessa simile fiducia ai teoremi da noi qui dati.»

Dunque l'infinito che viene preso in considerazione e che interessa è soltanto quello potenziale, mentre quello attuale non viene considerato o interpretato concettualmente come non esistente. La discussione sugli angoli di contingenza rimane però aperta: è lecito considerarle grandezze non nulle? È logicamente possibile l'infinitesimo matematico attuale?

Nei pensatori del Cinquecento e Seicento si trova un interesse per l'infinito matematico attuale che non trova riscontro nella matematica classica. A fungere da stimolo in tale direzione è stata certamente la prospettiva nella pittura, con la considerazione dei punti di fuga come corrispondenti ai punti all'infinito, anche se lo sviluppo della geometria cartesiana, affermatasi per l'influenza del pensiero cartesiano, fece passare in seconda linea i metodi sintetici della geometria descrittiva e proiettiva. Ma un altro stimolo è anche la concezione filosofica dell'infinito nel pensiero divino, come si riscontra negli scritti di S. Agostino o nella posizione speculativa di Cartesio, che è agnostica nei confronti dell'infinito fisico e matematico, dunque con atteggiamento negativo sulle posizioni galileiane dell'infinito e infinitesimo attuale, e l'arrivare a possederlo sarebbe un assurdo tentativo di raggiungere l'infinito divino. Infine acquista senso la decomposizione delle figure in infinitesimi, come in Leonardo Da Vinci che nel *Codice Atlantico* (Arrigo-D'Amore 1992: p. 72) dice: «[…] tal prova resta persuasiva immaginando esser diviso il circolo in strettissimi paralleli, a modo di sottilissimi capelli in continuo contatto fra loro». È l'apripista all'analisi infinitesimale sviluppata da Galileo e Keplero. Lo stesso Galileo, pur non arrivando alla considerazione delle diverse tipologie di infinità, mostra diffidenza ed avversione all'infinito potenziale, con un atteggiamento vicino a quello di George Cantor, ed usa teorie sugli infinitesimi attuali che ben si collegano alle concezioni sulla struttura della materia.

Il problema dell'infinito attuale si è riproposto varie volte nel corso della storia della matematica. Si inquadra anche in questo contesto la nascita del calcolo infinitesimale in era più moderna con contribuzioni di vari matematici, da Newton a Leibniz, da Pascal a Cartesio e Torricelli. Il calcolo infinitesimale, sviluppato a partire dal Seicento, mostra come l'infinitesimo sia uno strumento matematico molto utile, anche nelle altre discipline scientifiche, a partire dalla fisica. Ammettendo la divisibilità infinita, si arriva a manipolare numeri infinitamente piccoli e per questo delle nozioni puramente ideali, senza realtà ontologica. Ed è curioso come matematici e fisici abbiano messo assieme un'ampia serie di tecniche di calcolo per utilizzare tale strumento, e contemporaneamente ne contestavano il fondamento filosofico.

Dunque gli infinitesimi hanno una lunga tradizione. Apparsi nella matematica classica, ma poi bandita dalla teoria delle grandezze e dalla geometria ufficiale, sono riapparsi nel tardo medioevo in varie forme ancor più problematiche, ad esempio come indivisibili per giocare un ruolo fondamentale nell'evoluzione dell'analisi. Da sempre hanno avuto uno statuto logico e filosofico dubbio, che ha portato al loro abbandono nell'Ottocento, per essere rimpiazzati dal concetto di limite.

Oggi tendiamo a rappresentare lo spazio ed il tempo, e molti altri processi naturali che ci circondano, facendo uso del concetto di continuità, che nasce dall'idea dell'assenza di salti immotivati ed ingiustificati, come testimonia il «natura non facit saltus» di Leibniz. Da un lato il continuo è visto come indiviso, ininterrotto, banalmente consequenziale, dall'altro ammette la possibilità di processi di divisione infiniti. Leibniz stesso fu molto occupato dalle riflessioni sul "labirinto del continuo", tanto che il *monadismo,* il suo sistema filosofico, traeva origine dal problema di capire se e come le entità continue potessero essere costituite di elementi indivisibili. Leibniz si chiedeva: se ogni entità reale è un'unità ed una molteplicità, e la molteplicità è un'aggregazione di unità, come possiamo classificare il continuo geometrico? Una linea è estesa, e l'estensione è una forma di ripetizione, allora la linea essendo divisibile non può essere un'unità. Allora è una molteplicità, o un'aggregazione di unità. Ma di quali unità parliamo? I punti possono essere solo estremità di parti estese, ed in ogni caso, rifacendosi all'argomento aristotelico, nessun continuo può essere costituito da punti. Dunque un continuo non è né un'unità, né un'aggregazione di unità, esso è piuttosto formato da entità ideali. In questo modo Leibniz introdusse l'uso degli infinitesimi, in modo strumentale, per snellire le argomentazioni e per aiutare l'intuito. Il suo calcolo infinitesimale si fondava in modo essenziale sul concetto di infinitesimo.

E il concetto di infinitesimo è stato sempre legato a quello di continuo, come sua ultima parte. Così come nel caso discreto vi sono delle unità individuali che compongono il tutto, così nel continuo è l' infinitesimo che è suscettibile di comporre l'entità compessiva. Nella matematica del Settecento era diffusa l'idea che, se il continuo ammette la divisione infinita, allora esso non può essere costituito da punti, che per definizione non sono divisibili, ed anzi devono esserci delle grandezze infinitesimali non puntiformi, a partecipare nella costruzione e nella divisione del continuo.

Eulero usa gli infinitesimi non come elementi ideali, ma come elementi più o meno concreti in grado di preservare la forma rettilinea. Berkeley finì con il pensarli come finzioni reali, dopo averne inizialmente combattuto duramente l'uso definendoli "il fantasma delle quantità svanite" e affermando: «Concepire una quantità infinitamente minore di ogni sensibile o immaginabile quantità oltrepassa, lo confesso, ogni mia capacità. Ma concepire una parte di questa quantità infinitesima, tale che sia ancora infinitamente minore di essa, questa è un'infinita difficoltà per qualunque uomo» (Arrigo-D'Amore 1992: p. 123). Cauchy caratterizzò la continuità con una definizione rigorosa di infinitesimale, come "quantità variabile che decresce indefinitamente in modo da convergere al limite 0". In questa affermazione giace proprio la definizione di continuità di una funzione.

Dunque le quantità infinitesimali, sebbene non nulle, sono più piccole di ogni altro numero finito. Questa concezione, che ha portato anche a risultati molto utili nella storia della matematica, è rimasta comunque difficile da sostenere filosoficamente e ad un'indagine di tipo logico. In questa direzione, le ricerche di Dedekind e Cantor, se da un lato aiutarono a comprendere l'infinito, dall'altro colpirono "quasi" mortalmente gli infinitesimali. Infatti la concezione dei numeri reali di Cantor e Dedekind, fondata sulla teoria degli insiemi, soppiantò le altre concezioni di grandezza in competizione: quella geometrico-euclidea in cui venivano utilizzati segmenti rettilinei infinitesimali, e quella analitica che tirava in causa quantità infinitesimali di una qualche specie. D'altronde, uno degli obiettivi di Dedekind era proprio quello di caratterizzare i numeri reali prescindendo dall'evidenza geometrica e dall'intuito spaziale, cercando di liberare i fondamenti dell'aritmetica dall'intuizione geometrica. In breve, divenne un'ortodossia nei fondamenti della matematica, come testimonianoanche le successive generalizzazioni dei numeri reali del XX secolo, che da essa generalmente partono. Cantor, che esplorò i numeri transfiniti, antenne per tutta la vita un atteggiamento ostile nei confronti degli infinitesimi, attaccando tutti gli sforzi matematici in questa direzione. Il suo rigetto nasceva dal fatto dalla credenza che la sua teoria fosse esauriente per descrivere e comprendere la realtà dei numeri, e nessuna altra generalizzazione del concetto di numero, in particolare quelle che includevano gli infinitesimali, potesse essere ammissibile. Ad ogni modo Cantor ruppe l'idea Kantiana, secondo cui oltre il finito esisteva l'*assoluto*, ovvero un'unica forma di infinito. Egli invece dimostrò che esistevano tanti infiniti, e che il limite del finito è il transfinito, ciò che possiamo davvero aggiungere. Per cui esistono le cardinalità del numerabile, del continuo, e altre cardinalità via via più grandi. Dimostrando che non tutti gli infiniti sono numerabili, Cantor fece fare un balzo in avanti al pensiero matematico e filosofico, e provò l'esistenza dell'infinito attuale transfinito, non assoluto, e sempre accrescibile.

In una lettera a Weierstrass nel 1887 Cantor tuttavia scriveva (Abeles 2001: p. 8): «I numeri lineari non nulli (in breve, numeri che possono essere pensati come lunghezze limitate, continue di una linea retta) che sarebbero più piccoli di qualsiasi numero finito arbitrariamente piccolo non esistono, cioè, essi contraddicono il concetto di numeri lineari». Cantor li considerò "il bacillo del colera" che infetta la matematica, con particolare riferimento ai matematici italiani che la promuovevano (Veronese e Levi-Civita su tutti). Nei *Fondamenti della Geometria* (1891), infatti, in una grande opera di revisione fondazionale della geometria e di approccio storico-critico ai concetti geometrici, Veronese elaborò una teoria che ammetteva segmenti infiniti ed infinitesimi come elementi di un campo ordinato non-archimedeo. Questo sviluppo fu ripreso in chiave aritmetica dal suo studente Levi-Civita che, generalizzando la costruzione di Veronese, introdusse gli infinitesimi in modo consistente. In tal modo, nel 1898, era chiaro a tutti che era possibile la costruzione di un campo totalmente ordinato e non-archimedeo, con elementi costituiti da serie di potenze formali.

I concetti di infinito ed infinitesimo attuale trattati nella scuola italiana da Veronese, Levi-Civita e Bindoni affondano le radici nelle opere di Leibniz e Cavalieri, col metodo degli indivisibili. Salvo poi aver avuto un periodo di appannamento a favore di altri approcci concettuali, con le parole di Levi-Civita (1893: p. 1765) «nell'analisi perché, fissate le basi del calcolo sul concetto di limite, nessun'altra teoria ne faceva sentire il bisogno, nella geometria, per l'influenza dell'empirismo ad oggi dominante.»

L'avversione era comunque diffusa. Anche Russell li condannò definendoli non neessari, sbagliati e auto-contraddittori (Russell 1938: p. 345). Quando il continuo ebbe delle solide fondamenta date dalla teoria degli insiemi, l'uso degli infinitesimi fu abbandonato, anche se l'idea non fu completamente estirpata, neanche dopo le dure critiche rivolte a Veronese e la noncuranza riservata alla questione nei primi del Novecento. Poche voci si levavano che non contrastavano le ricerche su di essi. Tra queste, vi era la concezione di Peirce del continuo numerico che comprendeva anche gli infinitesimali, perché i metodi basati su di essi erano utili ed efficienti, e perché li vedeva come la “colla” che fa perdere l’identità ai punti sulla linea continua. Lo stesso Poincaré accettò gli infinitesimi, anche se non li riteneva particolarmente utili.

Il primo segnale di rinascita ci fu con i lavori di Laugwitz e Schmieden, ma la definitiva ripresa si ebbe con Abraham Robinson negli anni Sessanta. Robinson creò la matematica non-standard, un’estensione dell’analisi matematica che incorporava al suo interno numeri finiti, infinitamente grandi e infinitesimi, in cui le usuali leggi dell’aritmetica continuano a valere, in cui si possono tradurre facilmente in un nuovo linguaggio tutte le proposizioni dell’analisi ordinaria dei reali. Ed in cui la proprietà archimedea non è soddisfatta.

3. La retta di Veronese ed i monosemii di Levi-Civita

A partire dalla seconda metà dell’Ottocento, un grosso contributo alla comprensione e caratterizzazione matematica dell’infinito, nonché al suo statuto filosofico, venne dato dagli studi di Dedekind e Cantor, con i numeri transfiniti. Per la prima volta, l’infinito non veniva trattato ontologicamente, dal di fuori, come ente da comprendere nella sua apparenza esterna, ma veniva indagato dal suo interno, cercando di comprenderne la natura e le sue possibili alternative. Per la teoria cantoriana esistono infiniti “infiniti”, peraltro considerabili in modo gerarchico, in cui il primo è l’infinito numerabile e, da qualunque ordine di infinito, è possibile ottenerne uno di ordine più grande prendendo l’insieme delle sue parti. Non sappiamo se tra questi due ordini ve ne sono altri in mezzo, ad oggi questa possibilità viene scartata ma è ancora soltanto un’ipotesi (*del continuo*). Tanto basta, comunque, per poter avere una prima chiave di lettura sul fatto che all’infinito non tutto deve procedere sempre nello stesso identico modo.

Nello stesso periodo si assiste ad una rivisitazione dei concetti e dei fondamenti della geometria, che portano a guardare alla possibilità logica di altre geometrie non soddisfacenti l’assioma delle parallele. Un postulato euclideo la cui affermazione, pur nascendo dall’intuizione nello spazio osservabile, fa un’ipotesi per il suo esterno non controllabile, così come tale sembra essere la proprietà delle grandezze di potersi raggiungere l’un l’altra sempre ed inequivocabilmente, siano esse segmenti o angoli o altro ancora.

Ed è intanto il concetto di continuità ad aver acquisito molta rilevanza in ambito geometrico. Sulla base degli studi di Dedekind e Cantor, il sistema dei numeri reali viene denominato *continuo aritmetico* perché si ritiene sia adeguato a rappresentare tutti i tipi di fenomeni continui. In accordo a ciò, il *continuo lineare geometrico* viene pensato isomorfo e provvisto di un’assiomatizzazione coerente con i numeri reali. Cantor e Dedekind sono i primi a proporre questa tesi matematico-filosofica, ed il presunto isomorfismo tra le strutture è talvolta chiamato *assioma di Dedekind-Cantor* (Ehrlich 2006). In altri termini, se i numeri reali godono di una serie di proprietà, e se la geometria uno-dimensionale è intuitivamente in rapporto strettissimo con essi, come possiamo trasferire tali proprietà assiomaticamente? Sotto la forma data da Dedekind, la continuità si esprime nella forma (*postulato di Dedekind*):

> Se un segmento di retta AB è diviso in due parti in modo che:
> (1) ogni punto del segmento AB appartiene ad una sola delle due parti;
> (2) A appartiene alla prima parte, B alla seconda;

(3) un punto qualunque della prima parte precede un punto qualunque della seconda, nell'ordine AB del segmento;
allora esiste un punto C del segmento AB, che può appartenere all'una come all'altra parte, tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte, ed ogni punto che lo segue appartiene alla seconda parte.

Questo postulato può essere enunciato in maniera analoga considerando segmenti in luogo di punti (segmenti aventi un estremo nel punto A o nel punto B, e l'altro estremo negli altri punti considerati). Invece, il postulato della continuità nella forma di Cantor, espresso in modo armonico con la sua teoria dei numeri, è il seguente (*postulato di Cantor*):

Se due classi di segmenti di retta sono tali che:
(1') nessun segmento della prima classe sia maggiore di qualche segmento della seconda;
(2') prefissato un segmento s piccolo a piacere, esistono un segmento della prima classe ed uno della seconda la cui differenza è minore di s
allora esiste un segmento che non è minore di alcun segmento della prima classe né maggiore di alcun segmento della seconda.

Anche in questo caso il postulato si può enunciare in modo analogo, riferendosi ai punti estremi dei segmenti. Può sembrare che i due enunciati siano equivalenti, invece esiste una differenza sostanziale data proprio dall'assioma archimedeo: dal postulato di Dedekind è possibile dedurre il postulato di Archimede, non altrettanto da quello di Cantor. Ovvero, si possono costruire delle grandezze che soddisfano il postulato di Cantor ma non quello di Archimede.

Ad una prima occhiata, ciò sembra derivare dal fatto che il postulato di Dedekind è fondamentalmente più condizionante e vincolante, nel senso che non si limita ad enunciare l'esistenza di una entità che soddisfa una certa proprietà. Nel caso cantoriano si parla genericamente di un segmento che soddisfa una proprietà, senza alcuna precisazione sulla tipologia del segmento, ad esempio se il segmento è finito o infinito. Invece nella formulazione di Dedekind si parla di un punto preciso C, o se vogliamo di segmenti AC e BC, e dunque si ferma l'attenzione su segmenti che hanno un inizio ed una fine ben specificati. Dunque, ammettendo il postulato di Dedekind, è possibile dimostrare che "dati due segmenti esiste sempre un multiplo dell'uno maggiore dell'altro", ovvero il postulato archimedeo, e perciò, una volta che l'assioma di Cantor-Dedekind è stato adottato dal sistema numerico, ne viene fuori la classica formulazione geometrica rettilinea e la prospettiva filosofico-matematica che gli infinitesimi siano superflui all'analisi della struttura di una linea retta continua. Si può dimostrare, infine, che i due postulati di Cantor ed Archimede equivalgono logicamente al postulato di Dedekind.

A notare questa particolare connotazione semantica del postulato di Dedekind è stato Giuseppe Veronese che evidenzia la possibilità di strutture geometriche non-archimedee, che ammettono la presenza di infiniti ed infinitesimi attuali, ovvero di grandezze irraggiungibili nelle direzioni dell'indefinitamente grande e dell'indefinitamente piccolo. Veronese a tal proposito scrive (1891: p. XXVII): «Sosteniamo l'infinitesimo attuale perché ne abbiamo dimostrato non solo la possibilità ma anche l'utilità nel campo geometrico; ché anzi per quanto possa essere per sé interessante una tale teoria non l'avremmo forse qui trattata senza le applicazioni geometriche che ne abbiamo fatte.» Ed ancora (Veronese 1891: p. XXX): «[…] volendo trattare il problema scientifico in tutta la sua generalità, abbiamo date queste ipotesi per stabilire una geometria indipendente dall'assioma V di Archimede».

Egli fornì anche l'esempio pionieristico di una tale specie di grandezze, noto come *retta di Veronese*, che soddisfa tutti i postulati dell'ordine, della congruenza, e di Cantor, ma non quello di Archimede, e dunque neppure quello di Dedekind.

Veronese (1891) affronta il problema della continuità dando due ipotesi per stabilire sulla forma fondamentale rettilinea la continuità relativa o assoluta, a seconda che i segmenti considerabili nella forma soddisfino il postulato di Archimede o se invece la forma ammetta l'esistenza di segmenti infiniti ed infinitesimi attuali. Il primo concetto di continuo nasce con l'intuizione, ma questo non si può definire; esso si può però rappresentare e determinare formalmente. Emerge, dunque, un approccio che conserva la natura empirica della geometria e dell'interpretazione spaziale delle forme, ma emerge anche la natura logico-formale della scienza geometrica che definisce gli enti indipendentemente dalla comprensione profonda del risultato empirico, che al matematico ed al filosofo naturale appare solo in superficie. Da un lato la geometria trae la sua origine dall'osservazione del mondo esterno, poi da tali osservazioni formalizzate permette di dedurre le prime verità che vengono postulate, ma è altresì necessario fare attenzione al reale contenuto dei postulati, per non introdurre, magari non intenzionalmente, più di quanto è realmente suggerito dall'osservazione. E la nostra osservazione si estende ad una parte limitata e finita dello spazio.

Veronese affronta la questione mettendosi, rispetto al postulato di Archimede, da un punto di vista analogo a quello di Bolyai e Lobacevski rispetto al postulato delle parallele. Con le parole di Fano (1950: p. 500), Veronese procede in questa maniera: «[…] dopo introdotto in una forma a una dimensione un segmento unità e la relativa scala, ottenuta portando quel segmento sulla forma, ripetutamente, a partire da una posizione iniziale qualsiasi e in ambo i sensi, egli postula l'esistenza, nella forma, di almeno un elemento esterno al campo raggiungibile colla scala, in un determinato verso; allora ogni segmento avente un estremo nel campo della scala e l'altro fuori di esso, nel detto verso, si dirà "maggiore" e "infinito attuale" rispetto a qualsiasi segmento avente entrambi gli estremi nel campo della scala. Con questo concetto, eventualmente applicato più volte, si perviene a un continuo non archimedeo, pel quale risultano tuttavia verificati i soliti postulati lineari e della congruenza.»

La retta non-archimedea di Veronese può essere riguardata graficamente nel modo che segue. Consideriamo un sistema di rette, in numero finito o infinito, che per semplicità possiamo immaginare parallele ed equidistanti. Ora fissiamo uno dei due versi, ad esempio nella figura che segue prendiamo il verso da sinistra a destra. I punti su una singola retta si succedono su ogni singola retta nel modo consueto (dunque nell'esempio si ha $A < B$); inoltre ogni punto precede tutti i punti delle rette che seguono (nell'esempio $A < C$, ma anche $B < C$).

In questa retta è evidente che il segmento AB, pur essendo ripetuto un numero indefinito di volte sulla destra di B, non riuscirà mai a portare il punto finale oltre il punto C. Dunque abbiamo un segmento infinitesimo attuale, nello specifico AB, ed un segmento infinito rispetto ad AB, nello specifico AC.

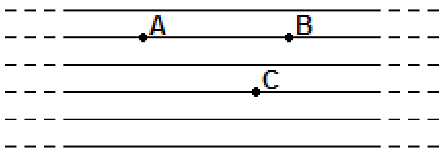

Figura 1.

Poi costruisce il piano attraverso il fascio di rette che si ottiene congiungendo tutti i punti di questa retta con un punto fisso al suo esterno, quindi allo stesso modo genera lo spazio tridimensionale, ed a seguire anche spazi *n*-dimensionali. In altri termini Veronese sviluppa una "geometria assoluta" che è indipendente dal postulato di Archimede, con un numero di qualunque di dimensioni e a più unità rettilinee (come d'altronde recita il sottotitolo dell'opera), e con riferimento alle ipotesi che la retta si presenti come linea aperta (come nel caso euclideo) o come linea chiusa (come nel caso riemanniano). Con le parole di Veronese (1891: p. XXIX-XXX): «[…] diamo alcune ipotesi le quali ci permettono di stabilire una geometria assoluta, indipendente cioè dall'assioma V di Archimede, e di far scaturire da essa due sistemi generali nei quali sono compresi i sistemi particolari di Euclide e Riemann.»

Quello in Fig. 1 è comunque l'esempio più semplice di continuo non-archimedeo.

Nelle opere di Veronese, e in quelle di Levi-Civita, ci si muove nell'ambito di una scienza che non è puramente geometrica, né puramente algebrica o analitica. È un terreno misto, con influenze e conseguenze tanto per la geometria che per l'analisi. Se Veronese ne dà inizialmente un'introduzione geometrica tipicamente sintetica, e per questo forse poco chiara, Levi-Civita si preoccupa degli stessi oggetti da un punto di vista meramente analitico, pur ricononoscendone i pregi in ambito geometrico, che fa di tali oggetti entità direttamente applicabili ed utilizzabili. Questi numeri, che sono denominati *monosemii*, o più precisamente, *numeri monosemii del continuo numerico di seconda specie*, costituiscono un sistema numerico non-archimedeo che si accompagna alla forma uno-dimensionale di Veronese.

Levi-Civita pensa a due numeri reali, a e ν, e considera dei numeri a_ν (i monosemii, appunto) in cui a è la caratteristica, mentre ν è l'indice. I "vecchi" numeri reali sono compresi tra questi numeri come numeri con indice zero. Due numeri monosemii sono uguali se hanno uguali sia l'indice che la caratteristica, con la sola eccezione dei numeri con caratteristica nulla, che sono considerati uguali anche se hanno indice diverso. L'ordinamento su questi numeri, che oggi possiamo riguardare come coppie ordinate di numeri reali, è dato dall'ordinamento lessicografico, che nella notazione originale è espressa dalla seguente: $a_\nu > b_\mu$ se $\nu > \mu$ oppure $\nu = \mu$ e $a > b$. E qui appare una generalizzazione compiuta da Levi-Civita, che parla di numeri di caratteristica reale con indice reale, laddove nella ricostruzione per via algebrica della retta di Veronese sarebbe bastato considerare numeri di caratteristica reale e di indice intero.

Per la somma di monosemii con stesso indice abbiamo banalmente $a_\nu + b_\nu = (a + b)_\nu$ ma per indici fra loro distinti abbiamo a che fare, in generale con somme del tipo $\sum a^{(i)}_{\nu(i)}$. Queste somme, le cui componenti sono denominate *integranti*, ora possono essere finite o infinite. In particolare Levi-Civita è interessato a quelle che risultano soddisfare alcune condizioni sul numero di addendi. Tra queste, fissato un numero A piccolo quanto si vuole, interessa la proprietà di avere solo un numero finito di addendi con indice superiore ad A; o, analogamente, fissato A grande quanto si vuole, interessano quelle integranti che hanno un numero finito di addendi con indice inferiore ad A. I primi sono detti *ellittici* (o soddisfacenti la condizione E), i secondi *iperbolici* (o soddisfacenti la condizione I). Proseguendo nella costruzione teorica, definendo le ulteriori operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, nonché limiti serie e funzioni, Levi-Civita precisa che (1893: p. 1777): «Per tutte le operazioni aritmetiche sui numeri di seconda specie si troverà mantenuto l'algoritmo ordinario: Questa caratteristica, comune ai numeri di Veronese e ai sistemi ellittico ed iperbolico, li distingue essenzialmente dai numeri transfiniti di Cantor, dagli ordini di infinità del du Bois-Reymond, dai momenti di Stolz.» Ed ancora rimarca che sia effettivamente possibile la definizione di un nuovo raggruppamento di numeri con tali operazioni «[…] questa possibilità di conservare tutte le leggi fondamentali dell'aritmetica non è in contraddizione col teorema di Weierstrass, da cui discende che, all'infuori dei numeri reali e complessi ordinari, non esiste alcun altro sistema, *con un numero finito* n *di unità indipendenti*, per il quale valgano le ordinarie regole di calcolo. […] poiché ciascuno dei due sistemi contiene un numero infinito di unità 1_ν , dove l'indice ν assume tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$.»

La definizione di numeri finiti, infiniti e infinitesimi di Levi-Civita (1898: pp. 113-114) è la seguente. Sia ω un elemento qualsiasi in M, che sia ordinato e sia un corpo rispetto a somma e sottrazione. Potendo avere in M anche l'elemento $-\omega$ consideriamo il valore assoluto $|\omega|$ per prendere il valore non negativo. Allora due elementi ω e ω' di M sono *finiti* tra loro se esiste un numero intero e positivo *k* tale che il maggiore dei valori assoluti, ad esempio $|\omega|$ sia inferiore a $k|\omega'|$. Se un tale numero *k* non esiste, ω è *infinito* rispetto a ω', ovvero ω' è *infinitesimo* rispetto a ω.

Nell'ultimo paragrafo dell'articolo del 1893, Levi-Civita si occupa dell'applicazione geometrica di tali concetti, considerando segmenti con un estremo in 0_0 e l'altro variabile. In tal modo i segmenti diventano infiniti, finiti o infinitesimi a seconda che l'indice dell'altro estremo sia maggiore, uguale o minore di zero. Nel confronto tra due segmenti, il primo è infinito, finito o infinitesimo rispetto al secondo se la divisione tra i due estremi produce un monosemio con indice maggiore, uguale o minore di zero.

Emerge ancora una volta, almeno come approccio iniziale, la concezione identificatrice tra continuo geometrico e continuo numerico da cui Levi-Civita muove le sue considerazioni per proporre «una retta più generale, atta cioè a rappresentare non i soli numeri ordinari, ma tutti i numeri ellittici o tutti quelli almeno, che appartengono ad un dato intervallo.»

L'idea nasce, come anticipato, sulla scorta della forma fondamentale di Veronese, di cui peraltro Levi-Civita era allievo, ma con alcune importanti differenze. Se da un lato Levi-Civita considera elementi infiniti ed infinitesimi con indice finito, e dunque corrisponde ad una parte della forma di Veronese, dall'altra appare più generale perché non si limita a considerare ordini di infinità con l'insieme di riferimento dei soli numeri interi, ma allargando il concetto ai numeri reali.

Ma è in questa ultima nota dell'articolo che Levi-Civita esprime l'idea più complessa ed interessante, sebbene la stessa caratterizzazione analitica sia di un certo interesse generale. Ovvero la possibilità di non limitarsi alla presente costruzione per considerare elementi infiniti ed infinitesimi, ma di allargarne le possibilità ripetendo lo stesso ragionamento effettuato sui numeri reali per arrivare ai monosemii, stavolta partendo dai numeri monosemii per ottenere altri nuovi numeri con le stesse modalità operative, cioè considerando nuovi monosemii con indici tra i monosemii, per poi poter di nuovo applicare il procedimento tutte le volte che vogliamo. Si tratterebbe di una generalizzazione che però non conserverebbe tutte le proprietà aritmetiche dei reali e dei monosemii. Un'ulteriore generalizzazione che invece rimanga conforme a tali principi è quella che utilizza come caratteristica un monosemio e, come indice, un numero reale ordinario.

L'opera fu oggetto di varie critiche, tra gli altri da parte di Killing, Cantor e Schönflies. Secondo Cantor le quantità infinitamente piccole degli infinitesimali non potevano esistere, ed offrì una prova che la proprietà archimedea era una conseguenza necessaria del concetto di "quantità lineare" e dei suoi teoremi sulla teoria dei numeri transfiniti. Per Cantor, il postulato di Archimede era in realtà un teorema. La prova che questa argomentazione non fosse valida per tutti i sistemi numerici che stavano germogliando fu data da Stolz, che in particolare la provò per le sue quantità infinitesimali e per quelle di Du Bois-Reymond (Dauben 1979). In alcuni casi la critica fu molto accentuata, come nel caso della stroncatura da parte di Peano, che concludeva la sua recensione indicando nella mancanza di precisione e di rigore di Veronese un elemento che toglieva ogni valore allo studio. Le controversie sulla geometria non archimedea durarono a lungo, con numerosi interventi dello stesso Veronese e di numerosi matematici in Italia e all'estero, e terminarono solo con la pubblicazione dei "Grundlagen" di Hilbert, che mostravano la possibilità logica di una tale geometria. La consacrazione definitiva avvenne nel 1908 al congresso internazionale di Roma, dove Veronese tenne una relazione generale dal titolo "La geometria non-Archimedea".

Ad ogni modo in queste due decadi a cavallo del secolo il dibattito è accesso e senza soluzione di continuità. Già nel 1897 Veronese ritorna sulla questione della continuità, in risposta alle critiche. Veronese ribatte su tutta la linea, in particolare asserendo la possibilità della geometria proiettiva per segmenti infiniti ed infinitesimi, ribadendo l'equivalenza dei suoi numeri con quelli di Levi-Civita ed infine evidenziano i contrasti tra gli stessi suoi critici.

Ritorna sul concetto intuitivo di continuo, già evidenziato nel 1891, «[…] il continuo intuitivo non si definisce, ma che pel geometra basta definire il continuo come un gruppo di punti assoggettato a certe proprietà. In qual modo si formi in noi l'intuizione del continuo è un problema che spetta al psicologo risolvere, se pure può essere risolto; come si determini il continuo come un gruppo di punti spetta al geometra». Il continuo intuitivo, la cui genesi ci è oscura dalle profondità del nostro intelletto, è però rappresentabile avvalendosi delle proposizioni fondamentali che vengono dall'esperienza e dall'osservazione, utilizzando fatti semplici su cui vi è unanime convergenza, facendo astrazione dalle qualità particolari degli oggetti, ma facendo sempre attenzione a non creare contraddizioni all'interno dell'edificio teorico.

E Veronese esprime la sua critica al fatto che il continuo rettilineo venga determinato univocamente dai numeri reali, perché a quel punto si introducono inevitabilmente nel continuo geometrico altri concetti che ad esso, in generale, non appartengono. Ed il punto centrale di conflitto, in cui la subordinazione emerge in tutta la sua influenza, è il postulato di Archimede che, seppur valido nei reali, non per questo deve valere nel continuo geometrico, ma con l'identificazione iniziale viene automaticamente trasportato su di esso.

E d'altro canto, ammettendo come elementi i suoi segmenti infiniti ed infinitesimi, non si creano contraddizioni né in senso logico-fondazionale, né per ciò che riguarda l'aspetto empirico della realtà spaziale. Lo stesso Veronese dice (1897: p. 162) «[…] ho fatto vedere che ammettendo gl'infiniti e infinitesimi non si contraddice alle proposizioni ricavate direttamente dall'osservazione e necessarie per dimostrare la proprietà della figura corrispondente allo spazio fisico.» Se di tali segmenti si ammette l'esistenza logica, non è nemmeno necessaria la loro esistenza attuale, in senso strettamente fisico, così come non è necessario nemmeno pensare ad uno spazio con più dimensioni per giustificare la riflessione logica su uno spazio generale con infinite dimensioni.

A far maturare l'idea di una geometria non-archimedea è certamente la concezione generale della geometria che Veronese ha, e che appare chiara nei suoi scritti. In essi, adottando una linea di indagine filosofica, emergono i presupposti espistemologici alla sua concezione, che spaziano dal ricorso all'intuizione per determinare le proprietà geometriche dello spazio, il ruolo degli assiomi nella costruzione delle teorie geometriche e matematiche, dunque un concetto di scienza mista tra l'aspetto empirico-intuitivo e logico-fondazionale, infine le nozioni di infiniti ed infinitesimi attuali, continuo, forma ed iperspazio. Più nel dettaglio, la visione di Veronese per annientare l'identificazione del continuo rettilineo geometrico con quello numerico reale risiede nella concezione filosofico-matematica del continuo come classi contigue, sulla scorta dei lavori di Dedekind e Cantor, piuttosto che come insieme di punti.

Veronese da un lato rivendica l'origine esperienziale della geometria, dall'altro utilizza un atteggiamento razionalistico per giustificare gli enti ideali assiomaticamente introdotti. Nel progresso geometrico, la visione epistemologica non è un discorso a posteriori, come accade spesso negli uomini nell'indagine filosofico-scientifica, ma è pertinente allo stesso sviluppo della scienza geometrica, che emerge e trova linfa nelle pieghe stesse dell'indagine conoscitiva. In tal senso la riflessione non si limita alla legittimazione di risultati già acquisiti, ma indaga la natura degli oggetti concepiti o concepibili per promuovere le idee migliori o quelle che potrebbero ancora emergere. È una riflessione filosofica che è strettamente collegata, potremmo dire fondazionale, come spirito e come approccio, alla possibilità di nuove scoperte geometriche e matematiche.

Ma è tutto il dibattito di quegli anni che in effetti si realizza passo dopo passo sulle conquiste e sulle riflessioni contestuali che arrivano nella scienza dello spazio e in alcune parti della matematica, legati al tentativo di comprendere e formalizzare una parte sempre più consistente del mondo. Sono artefici con Veronese, Peano, Cantor e Vivanti per ciò che riguarda gli infinitesimi attuali; Gauss, Poincaré, Hilbert, Helmholtz e Grassman tra gli altri, per ciò che riguarda la scienza e l'intuizione geometrico-spaziale.

Ai lavori di Veronese e Levi-Civita che fanno da apripista sulla questione, seguono come parti di un unico ideale programma di ricerca, i lavori di Hilbert e Hahn, che reinterpretano e sviluppano le conseguenze algebriche delle strutture ordinate non-archimedee.

4. Altri modelli e classificazione del non-archimedeo

Tra i modelli di geometria non-archimedea più rilevanti, un posto ed un ruolo di primo piano spetta a quello di David Hilbert. La costruzione di Hilbert, che soddisfa tutti gli assiomi euclidei ma non quello di Archimede, ha fatto ritenere chiara e risolta la questione della possibilità logica azzerando, nel contempo, anche le critiche filosofiche rivolte all'uso di infiniti ed infinitesimi attuali. Poincaré, pur riconoscendo a Veronese il ruolo di precursore, riconobbe la priorità ed il merito per la portata innovativa di questa geometria completamente ad Hilbert. L'esposizione di Hilbert, semplicemente, era più chiara e più elegante, perché usava un metodo che Veronese aveva deliberatamente lasciato da parte, per non contaminare, come rimarcò più volte, il processo di acquisizione della conoscenza geometrica. Veronese infatti afferma (1905: pp. 349-350): «[…] io non volli avere a mia disposizione le risorse dell'analisi […] partendo invece da alcuni fatti e operazioni semplicissime del pensiero logico, e scomponendo, più che mi fu possibile, i vari concetti, senza far uso di alcun algoritmo già noto.» E poi, ancora riferendosi a Poincaré ed Hilbert (Veronese 1905: p. 350): «[…] trattando la geometria più con le vedute dell'analisi che con quelle dell'intuizione spaziale, sono portati a dare alla geometria un'estensione maggiore di quella che secondo l'intuizione essa possa e debba avere.»

Hilbert, insomma, sostenuto dalla una visione filosofica più ampia del complesso dei fondamenti geometrici, forse seppe trarre maggior profitto *dall'idea* non-archimedea e ciò servì a fare del non-archimedeo una sua scoperta. È stato lo stesso Veronese, a convenire sul fatto che l'esposizione di Hilbert appare più semplice, proprio per le tecniche analitiche utilizzate per costruire le sue forme matematiche, delle risorse decisamente più potenti che evitano le lungaggini dell'indagine sintetica.

Ad ogni buon conto, Hilbert è stato tra i pochi matematici dell'epoca ad avere una reazione positiva ai lavori di Veronese, così come anche l'algebrista Hans Hahn, con il primo che si diede il problema della consistenza di un tale sistema, il secondo che si diede quello della giustificazione algebrica al "continuo intuitivo" di Veronese.

Nella elegante costruzione di Hilbert (1899) sui fondamenti della scienza geometrica, com'è ampiamente noto, si riformula la struttura logico-deduttiva a partire da cinque gruppi di postulati, che semplificano e chiariscono le strutture che a mano a mano si delineano: postulati di *collegamento* (I), di *ordinamento* (II), di *congruenza* (III), delle *parallele* (IV) e di *continuità* (V). In particolare ci interessa il quinto gruppo, che nella prima edizione dei *Grundlagen* prevedeva un solo assioma, quello appunto archimedeo denominato "assioma di continuità", ma già nella seconda edizione (fatto, questo, rimarcato dallo stesso Veronese per mettere in evidenza il cambiamento di prospettiva del matematico tedesco a seguito dei lavori di Veronese stesso, e dunque per dar credito alla priorità del suo lavoro rispetto a quello di Hilbert) esso viene integrato da un altro postulato. Così, i due postulati che completano il quadro fondazionale, che si dimostrano equivalenti al postulato di Dedekind ed alla coppia di postulati Cantor-Archimede, diventano per Hilbert i seguenti:

> V1 (assioma della misura o archimedeo). Se AB e CD sono due segmenti qualsiasi, c'è un numero n tale che il trasporto del segmento CD reiterato n volte da A sulla semiretta passante per B, porta al di là del punto B.
>
> V2 (assioma di completezza lineare). Il sistema dei punti di una retta con le sue relazioni di ordinamento e congruenza non è suscettibile di un ampliamento per il quale rimangono inalterate le relazioni sussistenti tra gli elementi precedenti come pure le proprietà fondamentali di ordinamento lineare e congruenza che seguono dagli assiomi I-III ed anche V 1.

L'assioma di completezza lineare, non è una conseguenza dell'assioma archimedeo, infatti l'assioma V1 anche quando vale, può essere ancora "completato", ovvero può rendere ancora possibile l'aggiunta di nuovi elementi senza alterare per questo la validità degli assiomi I-III, ma ciò non deve esser fatto necessariamente (l'esempio tipico è la cosiddetta *retta non-cantoriana*, in cui cioè non vale il postulato di Cantor, ben rappresentata dalla retta dei razionali). Se invece vale l'assioma di completezza, esso è comunque condizionato al fatto che tra le proprietà e relazioni da conservare ci sia anche l'assioma archimedeo V1. Ovvero, l'assioma di completezza lineare è sufficiente per l'assioma archimedeo, l'assioma archimedeo è necessario per quello della completezza. Nel caso di validità di entrambi, la geometria hilbertiana «è identica con l'usuale geometria analitica "cartesiana"» (Hilbert 1899: p. 33). Questa citazione proveniente direttamente dal matematico tedesco, vuole anche essere una conferma che gli strumenti da lui adottati sono analitici, ed il confronto viene fatto con la geometria cartesiana, non con quella sintetica, né di Euclide, né per ciò che ci interessa, di Veronese. L'assioma di completezza è una diversa ma equivalente formulazione, nel contesto assiomatico fino a quel punto enucleato, dell'assioma nella veste cantoriana, che prevede l'esistenza del limite nelle sezioni di Dedekind. In tali considerazioni, l'assioma di Archimede ha il ruolo di «preparare l'esigenza della continuità», che dunque rimane delegata all'assioma di completezza.

Hilbert, resosi conto dell'utilità dell'assioma archimedeo, da un lato comprende che la sua indipendenza va analizzata per suo conto; d'altra parte sottintende anche che l'accettazione della geometria non-archimedea si può compiere solo analizzando l'indipendenza dell'assioma V1 dagli altri postulati e chiarendone senza esitazioni i contorni fondazionali e le conseguenze.

Per far ciò Hilbert si avvale di un insieme funzionale. Egli considera il dominio $\Omega(t)$ costituito dalle funzioni algebriche $\omega(t)$ reali di variabile reale, che si ottengono attraverso le quattro operazioni fondamentali – addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione – e con l'ulteriore operazione $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$ (ovvero considerando anche l'estensione pitagorica).

L'insieme $\Omega(t)$ è chiaramente numerabile, e sulle sue funzioni algebriche è possibile un ordinamento, in analogia con quanto Hilbert fa su sistemi complessi di numeri, ad esempio con i reali. L'ordinamento è possibile pensando a come dette funzioni si comportano per valori sufficiente grandi, ovverosia andando idealmente oltre gli zeri delle funzioni per valutare il comportamento asintotico. Essendo algebriche, infatti, queste funzioni si annullano in un numero finito di punti, e dunque da un certo punto in poi hanno valori sempre positivi o sempre negativi e si può pertanto considerare come si comportano da quel punto in poi. Possiamo quindi dire, ad esempio, che $a > b$ (rispettivamente $a < b$) se la funzione differenza $c(t) = a(t) - b(t)$ da quel punto in poi (oltre gli zeri di a e b) risulta sempre positiva (rispettivamente negativa). Fatto l'ordinamento sulle grandezze, in analogia con i reali, e ammettendo la validità dei teoremi sulla conservazione delle disuguaglianze (addizionando o moltiplicando i membri con la stessa quantità), possiamo notare che le funzioni così costruite non soddisfano l'assioma archimedeo. Se consideriamo un qualunque numero reale n e qualunque funzione $\omega(t)$ indefinitamente positiva, ad esempio $\omega(t) = t$, vale sempre che n –

$\omega(t)$ è negativa per t sufficientemente grande. Hilbert enuncia la questione in questo modo (1899, p. 49): «i due numeri 1 e t del dominio $\Omega(t)$, che sono tutti e due > 0, hanno la proprietà che qualsiasi multiplo del primo è sempre minore del secondo numero.»

A questo punto si può fondare coerentemente una geometria non archimedea sui numeri complessi di $\Omega(t)$ che spicca nella sua originale discussione anche per mettere a disposizione del lettore una geometria non solamente rettilinea, anche se i due assiomi della continuità si applicano a sistemi di punti lineari, ma addirittura planare. Infatti si può considerare il punto del piano come un sistema di tre numeri (x, y, z) nel dominio $\Omega(t)^3$, ed il piano come un rapporto di quattro punti $(u : v : w : r)$ con u, v, w non tutti nulli, ovvero con l'insieme di punti che soddisfano l'equazione $ux + vy + wz + r = 0$. In questo piano una retta si identifica con una totalità di punti che appartiene a due piani diversi, ovvero con diversi $u : v : w$. Per l'ordinamento su $\Omega(t)^3$ possiamo ricorrere all'usuale ordinamento lessicografico, ovvero $(x, y, z) < (x', y', z')$ se $x < x'$, oppure $x = x'$ e $y < y'$, oppure $x = x'$ e $y = y'$ e $z < z'$. Ovviamente l'ordinamento può essere scelto anche invertendo la priorità delle componenti. Infine occorre avere uno strumento per la trasportabilità di segmenti ed angoli. Ciò può avvenire usando le convenzionali trasformazioni $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$.

A questo punto è nata una geometria non-archimedea, in cui sono soddisfatti tutti gli assiomi tranne quello di Archimede. Per convincersene basta prendere il segmento 1 ed il segmento t, e notare come, anche trasportando il segmento 1 un numero arbitrario di volte, mai si riesce a superare il segmento t, contraddicendo l'assioma archimedeo.

Hilbert stesso, come suffragato di lì a poco da Poincaré, riconosce a questa geometria un alto status scientifico (Hilbert 1999, p. 49): «Anche la geometria non-archimedea, come la non-euclidea, è importante in linea di principio» e fa particolare riferimento al ruolo che l'assioma di Archimede svolge nella dimostrazione del teorema di Saccheri-Legendre. Su questo punto occorre una riflessione più approfondita, per arrivare alla ricerca di Max Dehn, intrapresa su suggerimento di Hilbert, che chiarisce completamente la questione e delinea il rapporto esistente tra gli assiomi "della continuità" e "delle parallele".

Consideriamo innanzitutto i primi tre gruppi di assiomi dati da Hilbert nel suo classico *Grundlagen*, ovvero il sistema assiomatico che comprende gli assiomi di incidenza, d'ordine e di congruenza. Un modello di questo sistema è denominato *H-piano* (Greenberg 1979: p. 757). Se a questo punto adottiamo l'assioma euclideo delle parallele, allora avremo a che fare con un piano di tipo euclideo, se invece adottiamo l'assioma delle due parallele (come formulato da Bolyai, Lobacevski, Klein, ecc.) ci troveremo ad aver a che fare con un piano di tipo iperbolico.

In realtà questi due modelli risentono del fatto che già implicitamente si sta assumendo la continuità come proprietà dei modelli, ad esempio nella forma unificante di Dedekind, infatti si può dimostrare che un H-piano continuo deve essere necessariamente euclideo o iperbolico. Ma se consideriamo anche la possibilità che l'assioma archimedeo possa non valere allora la prospettiva cambia radicalmente e chiarisce anche meglio le idee sulle mutue relazioni dei postulati e sui possibili modelli di geometria con essi ottenibili.

Che l'assioma archimedeo è assunto implicitamente già nella usuale trattazione sulla sola geometria degli H-piani, emerge dal fatto che esso interviene nella dimostrazione classica del teorema di Saccheri-Legendre, con il quale si afferma che, dato un quadrilatero ABCD con gli angoli in A ed in B retti e con i segmenti AB e CD congruenti, allora si possono presentare tre casi per le coppie di angoli rimanenti: sono entrambi ottusi, retti o acuti. Com'è noto le tre differenti ipotesi corrispondono ai tre conclamati casi non-euclidei, tutti logicamente possibili: l'ipotesi dell'angolo retto corrisponde alla geometria euclidea; l'ipotesi dell'angolo acuto corrisponde alla geometria iperbolica; l'ipotesi dell'angolo ottuso, infine corrisponde ad una terza geometria in una regione limitata dello spazio, qualora si abbandoni l'ipotesi dell'infinità della retta, ovvero la geometria ellittica. Dunque il risultato ottenuto dal teorema di Saccheri-Legendre è indipendente dai postulati dell'H-piano, perché dalle sue premesse rimangono aperte due possibilità, escludendo il caso dell'angolo ottuso perché questa geometria non può essere costruita sugli H-piani, essendo incompatibile con le altre premesse euclidee (gli assiomi di ordinamento sono differenti). La costruzione di Max Dehn (1900), ma anche quella di Bonola (1906), parte innanzitutto con il dimostrare il teorema di Saccheri, nella formulazione per i triangoli, ovvero rispetto alla somma complessiva dei suoi angoli (che può essere maggiore, uguale o minore di due angoli retti), senza far uso del postulato di Archimede. Il risultato di Dehn è che se si ammette il postulato archimedeo, le tre diverse ipotesi che si possono fare sulla somma degli angoli interni di un triangolo sono rispettivamente equivalenti alle ipotesi che si possono dare su un fascio di rette quando si cerchino le parallele (o meglio, quelle non secanti) ad una retta data (che possono essere nessuna, una o infinite), ma se il postulato non si ammette, questa equivalenza viene meno (Fano 1950: p. 506). Nello specifico, in questa situazione, l'ipotesi che due rette su un piano si incontrano sempre implica ancora che la somma degli angoli di un triangolo sia maggiore di due angoli retti, ma non è vero il viceversa, ovvero da questa ultima proprietà non discende la prima. Ancora, l'ipotesi di unicità della retta parallela implica che la somma degli angoli di un triangolo sia di due retti, ma quest'ultima non implica l'unicità della parallela. Infine, sempre ammettendo la non validità del postulato archimedeo, l'ipotesi di infinite rette di un fascio che non incontrano una retta data rimane compatibile con tutte le situazioni, ovvero con le tre diverse ipotesi che si possono considerare per gli angoli di un triangolo.

Dunque ci troviamo di fronte a due nuove geometrie, che Dehn denomina *geometria non-legendriana* e *geometria semi-euclidea* (Fano 1950: p. 506). La geometria non-legendriana, che per Fano sarebbe più giusto chiamare *non-saccheriana*, è una geometria non-archimedea a metrica ellittica, in quanto su di essa non vale il postulato di Archimede, una retta ammette infinite non-secanti passanti per un punto dato e la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di due angoli retti. La geometria semi-euclidea è invece non-archimedea a metrica euclidea, in quanto su di essa non vale il postulato archimedeo, una retta ammette ancora infinite non-secanti passanti per un punto dato ma la somma degli angoli interni di un triangolo è stavolta uguale a due angoli retti. Una completa classificazione in tal senso è stata data in modo diverso anche da Pejas (1961).

Un'ulteriore situazione molto particolare si ha a proposito di uno dei postulati della congruenza, esattamente quello che asserisce l'uguaglianza dei triangoli nel caso siano uguali rispettivamente due coppie di lati e l'angolo compreso e del rapporto tra questo ed il teorema per cui un triangolo isoscele ha uguali gli angoli alla base. Se il postulato viene formulato in maniera "ristretta", ovvero ammettendo l'uguaglianza dei rispettivi lati destri, dei rispettivi lati sinistri e dei rispettivi angoli compresi, se non aggiungiamo il postulato di Archimede, il predetto teorema non è dimostrabile. In questa particolare situazione non-archimedea, valgono ancora il teorema di Talete con le sue proporzioni, nonché i teoremi desarguesiano sui triangoli omologici e pascaliano sull'esagono inscritto, ma si presentano risultati paradossali sconcertanti nelle nostre abitudini, ad esempio: in un triangolo isoscele i due angoli alla base non sono uguali; la somma dei due lati di un triangolo non è sempre maggiore del terzo lato, potendo essere inferiore di un infinitesimo; triangoli con basi ed altezze rispettivamente uguali non sono equivalenti, ma lo sono solo per differenza, analogamente triangoli equivalenti con stessa base non è detto che abbiano la stessa altezza e in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati sui cateti è equivalente solo per differenza al quadrato sull'ipotenusa (Fano 1950: p. 508) perché anche in questi risultati, nell'usuale geometria, si fa uso a fini dimostrativi del postulato archimedeo. Per questa ultima ragione, questa geometria è anche denominata non-pitagorica (non valendo la relazione $a^2 + b^2 = c^2$ per i lati del triangolo rettangolo). Su tutta questa questione, peraltro, Hilbert ha indagato a fondo (1899: pp. 156-157).

In definitiva, tornando ad Hilbert, pur riconoscendo a Veronese di aver trattato la questione della geometria non-archimedea prima di lui in un «profondo lavoro» (Hilbert 1999, p. 48) ne costruisce un nuovo modello di natura prettamente algebrica, e soprattutto preferisce investigare sull'indipendenza dell'assioma rchimedeo e sulle conseguenze della sua non validità, non mettendo a confronto la sua teoria ed il suo modello con quella dell'italiano. Questo fatto, seppur apparentemente banale, non lo è per il riconoscimento attribuito ad Hilbert di fondatore di tale geometria. Infatti, Hilbert prova sì elegantemente l'indipendenza dell'assioma archimedeo dal complesso restante di assiomi, ma oltre a non essere stato il primo ad introdurre la possibilità non-archimedea nell'alveo delle idee e dei modelli geometrici, il modello da lui fornito si colloca in secondo piano rispetto alla retta di Veronese. Il modello geometrico non archimedeo di Veronese, infatti, comprende al suo interno il modello non-archimedeo di Hilbert. Su questo punto la spiegazione viene da Bindoni (1902).

Bindoni considera (1902: pp. 207-209) il campo $\Gamma(x)$ degli elementi espressi nella indeterminata x che assumono la forma

$$\frac{a_1 x^{\omega_n} + a_2 x^{\omega_{n-1}} + \dots + a_n x^{\omega_1}}{b_1 x^{w'_m} + b_2 x^{w'_{m-1}} + \dots + b_m x^{w'_1}}$$

in cui $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ sono numeri reali, mentre $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ e $\omega'_1, \omega'_2, ..., \omega'_m$ sono numeri reali o espressioni ottenute da questa stessa espressione generale. Questo campo, come si può verificare facilmente, è ordinabile, costituisce un corpo rispetto alle quattro operazioni algebriche fondamentali e valgono le proprietà fondamentali del calcolo algebrico. Ma ha anche elementi che sono infiniti ed infinitesimi attuali rispetto ai numeri reali. Ciò appare evidente confrontando, sulla scia di quanto fa Hilbert, gli elementi $x^{-\infty}, \dots, x^{-n}, \dots, x^{-1}, a, x, \dots, x^n, \dots, x^{\infty}$.

Da questi numeri si possono ottenere con opportune limitazioni sia i numeri di Veronese (con $a_1, a_2, \dots, a_n$ interi, e con in particolare a_1 positivo, poi con $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ tutti nulli, ma con $b_m = 1$, ed infine con $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ interi e positivi o espressioni ottenute in precedenza nello stesso modo) che quelli di Hilbert, potendo peraltro dimostrare (Bindoni 1902: p. 209) che «*il campo dei numeri del Sig. Hilbert è compreso nel campo dei numeri del Prof. Veronese*» e dunque potendo affermare che «*il sistema geometrico di Hilbert è compreso in quello di Veronese*» (il corsivo è dello stesso autore).

È rilevante la posizione di Poincaré che nella relazione ai "Grundlagen" di Hilbert esprime giudizi sulla sua teoria e sulla priorità delle geometrie non archimedee. Poincaré ritiene innanzitutto che i numeri di Veronese siano ottenuti semplicemente riprendendo in un contesto geometrico i numeri transfiniti di Cantor, cosa che oggi appare inesatta in tutta la sua evidenza. In secondo luogo il matematico-filosofo francese assegna la priorità della scoperta non-archimedea ad Hilbert, ritenendo che questa sia la scoperta più originale dell'intero suo libro. Ma su questo punto, la visione di Veronese è netta (Veronese 1905: p. 349): «la priorità [...] debbo reclamarla intera.»

Di esempi non-archimedei, ad ogni buon conto ne esistono tanti. Per meglio dire, infiniti. Così come i gruppi archimedei sono relativamente pochi, quelli non-archimedei sono in maggioranza, ed anzi una struttura archimedea può essere vista come una sottostruttura di una struttura non-archimedea. La struttura più semplice è certamente $(R^2,+,\leq)$, con R l'insieme dei reali, e prendendo come ordinamento della struttura quello lessicografico sulle coppie di reali. Prendiamo ad esempio gli elementi (0,1) e (1,0), che sono positivi essendo (0,1) > (0,0) e (1,0) > (0,0). Chiaramente, per l'ordine dato vale anche (0,1) < (1,0), e nessun multiplo di (0,1) riesce a superare (1,0), cioè per qualunque n naturale risulta $n(0,1) = (0,n) < (1,0)$. Un altro esempio semplice da visualizzare di gruppo ordinato non archimedeo è il gruppo additivo sostegno dell'anello dei polinomi $R[x]$, dove ogni elemento è del tipo $f(t) = f_0 + f_1 t + \ldots + f_n t^n$. In questo caso la relazione d'ordine, che chiaramente deve essere compatibile con la struttura algebrica, può essere assegnata ancora una volta in maniera lessicografica sui coefficienti delle potenze, poste in ordine decrescente. In questo modo, tra l'altro, un polinomio è positivo se ha il coefficiente direttore positivo. Chiaramente, anche in questo caso la struttura è non-archimedea. Ad esempio, i polinomi $h(x) = 1$ e $g(x) = x$ sono positivi e vale $h(x) < g(x)$, perché $g(x) - h(x) = x - 1$ è positivo, inoltre ogni multiplo di 1, ovvero qualunque numero naturale n, non potrà mai raggiungere e superare x, perché $g(x) - nh(x) = x - n$ è sempre, ancora, positivo. In realtà abbiamo a disposizione tanti ordini di infinito, quanti ne vogliamo, essendo anche $x < x^2 < x^3 < x^4$ e così via.

Anche considerando il campo R(t) delle funzioni razionali di t, ovvero tutti i quozienti $f(t)/g(t)$ dove f e g sono funzioni polinomiali a coefficienti reali e con $g(t)$ non identicamente nulla. Allora R(t) ha un ordine naturale che lo rende un campo ordinato non-archimedeo. Per convincersene basta considerare che (i) ogni somma, differenza, prodotto e divisione di funzioni razionali è ancora una funzione razionale, (ii) le funzioni sono positive ($f > 0$) o negative ($f < 0$) a seconda se il coefficiente principale è positivo ($f_0 > 0$) o negativo ($f_0 < 0$) e ciò rispecchia il comportamento di f per valori di t sufficientemente grandi, infine (iii) per due elementi di F risulta $f < g$ se esiste un valore di t, diciamo t_0, tale che per valori di t più grandi di t_0 vale sempre $f(t) < g(t)$. A questo punto, prendendo ancora banalmente gli elementi $f(t) = 1$ e $g(t) = t$, entrambi maggiori di zero, risulta $f(t) < g(t)$ e per qualunque multiplo del primo risulta sempre $n < t$.

Un altro esempio di campo euclideo non-archimedeo è ottenibile semplicemente anche a partire da un qualsiasi campo euclideo K_0 (come l'insieme dei reali, oppure l'insieme dei reali costruibili con riga e compasso, e così via) considerando l'unione dei campi delle serie di potenze su $t^{1/2^n}$, cioè

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_0\left\{t^{\frac{1}{2^n}}\right\}.$$

Con la presentazione di questi modelli e con l'idea che si potrebbero considerare molti altri sistemi consistenti, nel rispetto della logica fondazionale geometrica, particolare valore è da assegnare alle ricerche di Hans Hahn. Nel 1907, infatti, Hahn si fa carico del problema della classificazione dei modelli fino ad allora conosciuti e, attraverso una classificazione completa dei gruppo ordinati abeliani, dimostra che il reale è solo un caso particolare all'interno di una struttura più generale e non-archimedea,. Peraltro, questo risultato è stato rivisitato da Ehrlich (1997) e ripreso recentemente anche dall'autore (Eugeni-Mascella 2000a, 2005), partendo da un contesto algebrico ed utilizzando un linguaggio più moderno, ma utilizzando in fondo le stesse idee di base.

Hahn studia (Ehrlich 1997) un gruppo abeliano ordinato G, con notazione additiva. Considerati due elementi a e b in G, con i rispettivi valori assoluti ($|a|$ è il numero più grande dell'insieme $\{a, -a\}$), questi sono *archimedeo-equivalenti* se esistono due numeri positivi n ed m tali che $n|a| > |b|$ e $m|b| > |a|$. Questa relazione di equivalenza permette un partizionamento di G – {0} in *classi archimedee*. Se a e b adesso non sono archimedeo-equivalenti allora a è *infinitesimo* rispetto a b (in valore assoluto) se $|a| < |b|$. In tal modo 0, che non è membro di nessuna classe archimedea, è infinitesimo rispetto ad ogni elemento di G. Dunque si considera il comportamento reciproco degli elementi in funzione del principio archimedeo, e su questa base il dominio di partenza viene partizionato o, se vogliamo, diviso in elementi di "rango" diverso. Questo rango, rappresentato dalle classi di equivalenza, sintetizza i domini di validità della proprietà archimedea. Inoltre, se G è ordinato e non-archimedeo, esistono almeno due classi differenti in G, e la relazione di essere di rango inferiore, se vale per un elemento di una classe rispetto ad un elemento della seconda, vale nello stesso modo per tutti gli altri elementi della prima classe con rispetto a quelli della seconda classe, dunque possiamo anche parlare di ordinamento delle classi. Le classi di G, in tal modo formano un insieme semplicemente ordinato, l'insieme delle classi di G e viceversa Hahn prova che se abbiamo un insieme semplicemente ordinato I, allora esiste sempre un gruppo abeliano G semplicemente ordinato tale che le il tipo delle sue classi è uguale al tipo di ordine dell'insieme di partenza I.

Ma dato un gruppo abeliano, possiamo anche ragionare sulla sua estendibilità con la preservazione della proprietà archimedea, o meglio, senza alterare le classi di equivalenza o i ranghi disponibili con G. Dati due gruppi abeliani G e G', con G $\subseteq$ G', G' è un'*estensione archimedea* di G se e soltanto se per ogni y in G' – {0} esiste un x in G – {0} tale che x ed y sono archimedeo-equivalenti. Se G non ammette alcuna estensione archimedea propria, cioè con G' diverso da G, allora G è *archimedeo-completo*. Un campo ordinato F avente la struttura additiva archimedea–completa, si dice *campo ordinato archimedeo-completo*. Naturalmente l'essere archimedeo-completo per un campo non vuol dire essere complessivamente archimedeo.

Hahn scopre che tali strutture esistono, ma introduce anche una costruzione che permette di isolarle a meno di isomorfismi (Ehrlich 1997: p. 59). Se R è il campo ordinato dei reali, e G è un gruppo abeliano ordinato, denotiamo con R(G) l'insieme di tutte le serie formali del tipo

$$\sum_{\alpha<\beta} r_\alpha \omega^{y_\alpha}$$

dove β è un ordinale, $\{y_\alpha : \alpha < \beta\}$ è una sequenza discendente di elementi di G, e gli r_α sono elementi di R – {0}. Il campo di Hahn ha dunque R(G) come dominio, è ordinato lessicograficamente, e le operazioni di addizione e moltiplicazione sono definite dalle regole

$$\sum_{y\in G} a_y \omega^y + \sum_{y\in G} b_y \omega^y = \sum_{y\in G} (a_y + b_y)\omega^y$$

$$\sum_{y\in G} a_y \omega^y \cdot \sum_{y\in G} b_y \omega^y = \sum_{y\in G} \left[\sum_{\mu+\nu=y} a_\mu b_\nu \right] \omega^y$$

Si può notare facilmente che R(G) è isomorfo ad R soltanto quando G è identicamente {0}.

Le classi archimedee $[a]$ formate sul campo ordinato F formano un gruppo abeliano ordinato A, prendendo l'ordinamento e la moltiplicazione con le seguenti definizioni: (i) $[a] < [b]$ se $[a]$ è infinitesimo rispetto a $[b]$, e (ii) $[a][b] = [ab]$.

In virtù di ciò, possiamo dire che F è un campo ordinato di *tipo archimedeo G* se il gruppo abeliano A delle classi archimedee di F è isomorfo ad un qualche gruppo abeliano G. A questo punto valgono i seguenti teoremi sui numeri reali:

- (teorema *di immersione*) Se F è un campo ordinato di tipo archimedeo G, allora R(G) è un'estensione archimedea di una campo isomorfo a F.
- (teorema *di completezza*) A meno di isomorfismi, R(G) è l'unico campo ordinato archimedeo-completo di tipo archimedeo G.

In definitiva il Teorema di Hahn, che occupava 27 pagine, senza contare i preliminari (Clifford 1954), asserisce che ogni gruppo abeliano ordinato (se è ordinato, il gruppo è necessariamente infinito) è isomorfo ad un sottogruppo di un prodotto cartesiano ristretto di fattori tutti uguali a (R, +, ≤), cioè il gruppo additivo dei reali con l'ordinamento naturale. Se infatti l'assioma di Archimede non vale sul dominio generale, consideriamo la sua validità locale e, guardando alle classi di equivalenza che ne derivano, si può ottenere una partizione per cui in ciascuna classe vale Archimede. Ogni gruppo ordinato può essere incluso in questa categorizzazione, dando anche luogo ad una serie di modelli diversi, a seconda della classe del gruppo in questione.

È particolarmente interessante il caso in cui il gruppo abeliano si riduce ad una sola componente, perché in tal caso abbiamo a che fare con gruppi archimedei. Ma vi è di più. Per il teorema di Holder vale anche il viceversa, ovvero la validità del principio archimedeo è sufficiente per dimostrare che un gruppo ordinato (e dunque archimedeo, con la commutatività che ne segue automaticamente a posteriori) è isomorfo ad un sottogruppo di (R, +, ≤).

Ultimamente questi risultati sono stati riscoperti da Herlich ed altri autori. In particolare, in articoli recenti (Eugeni-Mascella 2002°, 2005) la classificazione assume forma e linguaggio diversi nel caso specifico della geometria uno-dimensionale. In particolare sono stati provati due risultati. Con il primo, ovvero (teorema 1) Sia $(L, \leq, \equiv)$ una retta soddisfacente agli assiomi A1, …, A8, A10, ma non soddisfacente al postulato di Eudosso-Archimede. Allora esiste un gruppo abeliano ordinato G tale che $(L, \leq, \equiv)$ risulta isomorfa alla struttura $(G \times R, \leq, \cong)$.

si determina l'esistenza di strutture non-archimedee e se ne stabilisce forma e costruzione, per il fatto che detto postulato non viene incluso tra gli assiomi della retta e di una struttura così delineata si fornisce un isomorfismo con un prodotto cartesiano tra un opportuno gruppo G ed i reali (gli assiomi A1, …, A10 sono una rivisitazione di quelli hilbertiani nella chiave indicata da Peano). Con il secondo, cioè

(teorema 2) Siano $(G_1 \times R, \leq, \cong)$ e $(G' \times R, \leq, \cong)$ due rette non archimedee. Queste rette sono isomorfe se, e solo se$(G, +, \leq)$ e $(G', +, \leq)$ sono isomorfe.

si stabilisce l'esistenza di molteplici modelli non-archimedei non isomorfi, che vengono generati a partire semplicemente da gruppi G non isomorfi. Dunque un'infinità di modelli, uno per ogni gruppo abeliano ordinato G che possiamo prendere in considerazione. Esempi di rette non-archimedee non isomorfe sono: $Z \times R$, $Q \times R$, $R \times R$, $(Z \times R) \times R$, $(Q \times R) \times R$, $(R \times R) \times R$, $(Z \times Q \times R) \times R$, e così via (dove Z è il gruppo additivo degli interi, Q il gruppo additivo dei razionali ed R è il consueto gruppo dei reali).

Infine possiamo considerare tra queste strutture le estensioni non-archimedee di Hahn. Dati i campi R × R, Q × R e Z × R, si può facilmente notare come il gruppo additivo di Q × R è un'estensione archimedea di Z × R, il gruppo additivo di R × R è un'estensione archimedea di Q × R, il gruppo R × R è archimedeo-completo e dunque la struttura di campo su R × R rende tale dominio un campo ordinato archimedeo-completo.

5. Conclusioni.

L'infinitesimo e l'infinito hanno da sempre avuto uno statuto filosofico controverso, e le ricerche delle attività pionieristiche in tali direzioni, come quelle di Veronese e Levi-Civita, hanno avuto riscontri altalenanti e suscitato dibattiti anche feroci. Ma alla fine, con la sistemazione più accurata ed elegante di tali studi, anche le comunità dei ricercatori hanno finito con l'avallare ed accettare ricerche apparentemente fantasiose, ma con enormi risvolti di natura filosofica ed epistemologica. In tal senso ha certamente contribuito anche l'intervento di voci autorevoli. Ma soprattutto, sembra che il concetto di infinitesimo nelle descrizioni formali sia diventata una concezione matura, tendenzialmente svincolata dall'ipotesi metafisica che nella riduzione di ciò che appare come continuo si arrivi a "monadi", ad "atomi" o ad "ultimi elementi" (Giorello 1972: p. 153).

Gli studi su tali argomenti che si sono succedute nei secoli, fino alle teorie di Cantor ancora basilari nei fondamenti della matematica, appaiono oggi come piccole rivelazioni di una teoria del continuo molto più ricca, in cui sono ammessi gli infinitesimali e delle generalizzazioni della teoria cantoriana dell'infinito. Una serie di ricerche portate avanti da Conway e Robinson in particolare ha fatto emergere una nuova realtà oltre quella classica dei numeri reali, e proposto nuove entità numeriche in tali sistemi che non soddisfano la proprietà archimedea. Dunque, facendo un parallelo tra i modelli analitici e quelli geometrici, appare evidente che tale caratteristica, oltre ad essere vicendevolmente influenzata, così come d'altronde sempre è stato, apre le porte a indagini più profonde e fantasiose. In tal senso, la geometria non-archimedea di Veronese ed i monosemii di Levi-Civita appaiono entità pionieristiche

In questo senso appaiono centrali una serie di teorie numeriche che estendono i numeri reali in varie direzioni. Tra queste, le teorie analitiche non-standard, che includono i numeri iperreali, i numeri surreali ottenuti con una generalizzazione dell'idea alla base della concezione di sezione di Dedekind, nonché i numeri complessi ed ipercomplessi. Nei numeri surreali, ad esempio, rappresentati da coppie di insiemi $x = \{ L \mid R \}$, con la sola restrizione che ogni numero in L deve essere inferiore ad ogni numero in R, i numeri si ottengono con una regola costruttiva ripetuta iterativamente. Ciò porta a considerare tra i numeri surreali anche veri e propri numeri infiniti ed infinitesimi. Ed anche in questo caso, per classificare gli ordini dei numeri surreali infiniti, si fa ricorso alle classi archimedee. Infatti si può parlare di numeri *infinitamente vicini* qualora due numeri differiscano di un infinitesimo e, con questa relazione d'equivalenza, si possono considerare tanto le cosiddette *monadi*, ovvero gli intorni infinitesimi del numeri reali, quanto i numeri infiniti, anch'essi comunque raggruppati all'interno di monadi. Per i numeri iperreali abbiamo invece rappresentazioni della forma $a+\varepsilon$ dove a è un numero reale ed ε un infinitesimo.

Le estensioni non-standard dei reali nella cornice dell'analisi non-standard sono un tipico esempio di campi non-archimedeo. Ricordiamo che un'estensione non-standard *R di R è un'estensione propria cioè con $R \subseteq {}^*R$ ma $R \neq {}^*R$, in cui esiste una funzione * dalla superstruttura (la superstruttura su R è ottenuta partendo da R e iternado l'operazione di aggiunta dell'insieme potenza di R, e prendendo l'unione della sequenza risultante) V(R) nell'altra V(*R) che mappa R in *R (il principio di estensione) e che mantiene inalterata la validità delle formule tra sottoinsiemi di R e le loro superstrutture (il principio del transfert). Ed anzi sembra che «[…] la considerazione di alcune idee fondamentali della analisi non-standard dia utili direttive per una valutazione del problema storico degli infinitesimi» (Giorello 1972: p. 153) Ma queste estensioni non-standard, proprio perché racchiudono numeri di tali particolari specie, sono esempi di ulteriori campi non-archimedei.

Ma il loro limite è chiaro. A. Robinson, riferendosi ai fondamenti storici dell'analisi non standard, dice: «Leibniz intuì che la teoria degli infinitesimi implica l'introduzione di numeri ideali che possono essere infinitamente piccoli [...] Questi numeri ideali, governati dalle stesse leggi dei numeri ordinari, sono solo una comoda finzione, adottata per abbreviare l'argomentazione e per facilitare l'invenzione o la scoperta matematica» (Robinson, 1974).

Rimane aperta un'ultima questione. Se i nostri sensi ci consentono di cogliere ed osservare una parte del mondo, una parte che per definizione è raggiungibile e controllabile, siamo altresì sicuri che tutto il resto del mondo, la parte oltre la porzione osservabile, lo sia altrettanto? A tal proposito Hartshorne (2000: p. 161) scrive: «Per aiutare a visualizzare la geometria non-archimedea, immaginiamo per un momento di vivere in un universo non-archimedeo. Ciò che percepiamo con i nostri telescopi sono distanze molto grandi, ma ancora finite; ciò che osserviamo con i nostri ciclotroni ed acceleratori di particelle sono quantità molto piccole, ma ancora finite. Ed ancora al di là della stella più lontana ci sono altri universi paralleli, e dentro ogni particella elementare ci sono mondi infinitesimali a noi sconosciuti. Forse essi esercitano influenze subliminali sulle nostre vite? Come possiamo determinare se il nostro universo è infatti non-archimedeo se vediamo solo la sua parte finita?»

Bibliografia

Abeles F. F. (2001), The Enigma of the Infinitesimal toward Charles L. Dodgson's Theory of Infinitesimals, Modern Logic, vol. 8, n. 3-4, pp. 7-19.

Arrigo G. e D'Amore B.(1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.

Baer R. (1927), Über nicht-archimedisch geordnete Körper, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, vol. 8, pp. 3-13.

Bindoni A. (1902), Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XI, II sem., pp. 205-209.

Bonola R. (1906), La geometria non-euclidea, Zanichelli, Bologna. Edizione elettronica su <www.liberliber.it>

Boyer C. B. (1968), *A History of Mathematics*; trad. it. (1980), *Storia della Matematica*, Arnoldo Mondadori, Milano.

Clifford A. H. (1954), Note on Hahn's Theorem on Ordered abelian Groups, Poceedings of the American Mathematical Society, vol. 5, n. 6, pp. 860-863.

Dauben J. (1990), *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton.

Dehn M. (1900), Die Legendreschen Satze uber die Winkelsumme in Dreieck, Mathematische Annalen, vol. 53, pp. 404-439.

Ehrlich P. (1987), The Absolute Arithmetic and Geometric Continua, in Fine A. E Machamer P. (a cura di), PSA 19986, vol. 2, Philosophy of Science Association, Lansing MI.

Ehrlich P. (1994), *Real numbers, Generalizations of the reals, and theorems of continua*, (a cura di), Kluwer Academic Publisher, coll. Synthese Library: Studies in epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, vol. 242.

Ehrlich P. (1997), From Completeness to Archimedean Completeness: An Essay in the Foundations of Euclidean geometry, in Tauber A. e Kanamori A. (a cura di), *A Symposium on David Hilbert*, Synthese, vol. 110, n. 1, pp. 57-76.

Ehrlich P. (2006), The Arithmetic Continuum and its Peircean Counterparts, in Moore M. (a cura di) *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy*, Open Court Press, LaSalle IL.

Enriques, F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982).

Eugeni F., Furneri S. e Mercanti F. (1999), Una presentazione delle Geometrie non Archimedee, in *Atti del Congresso Nazionale Mathesis*, Teramo, pp. 101-111.

Eugeni F. e Mascella R. (2001), La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine, *Periodico di Matematiche*, vol. 3, pp. 45-56.

Eugeni F. e Mascella R. (2002a), Su alcuni modelli geometrici non archimedei, in *Critica dei fondamenti*, coll. I quaderni di Ratio Mathematica, Teramo, 2002.

Eugeni F. e Mascella R. (2002b), Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano, in *Critica dei fondamenti*, coll. I quaderni di Ratio Mathematica, Teramo, 2002.

Eugeni F. e Mascella R. (2005), A complete characterization of non-Archimedean lines, *Memoriile Sectiilor Stiintifice,* Editura Academiei Romane, Bucarest 2005, pp. 257-270.
Fano G. (1950), Geometrie non euclidee e non archimedee; in Berzolari L., Vivanti G. e Gigli D. (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Complementari e Complementi,* vol. II, p. II, Hoepli, Milano, pp. 437-511
Freguglia P. (1977), Osservazioni inerenti alla Geometria sulla retta di G. Peano, *Archimede,* vol. 2, pp. 95-103.
Geymonat L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.
Giorello G. (1972), Strutture non-standard della teoria dei numeri reali, *Archimede,* vol. XXIV, n. 3-4, pp. 152-163.
Greenberg M. J. (1979), Euclidean ana Non-Euclidean Geometries Without Continuity, *The American Mathematical Monthly,* vol. 86, n. 9, pp. 757-764.
Hahn H. (1907), Uber die nichtarchimedischen Grossensysteme, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse, vol. 116, pp. 601-655.
Hartshorne R. (2000), *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York.
Hilbert D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*; trad. it. P. Canetta (1970), *Fondamenti della Geometria*, Feltrinelli, Milano.
Krull W. (1932), Allgemeine Bewertungstheorie, *Journal für die Reine and Angewandt Mathematik*, vol. 167, pp. 160-196.
Laugwitz D. (1975), Tullio Levi-Civita's work on non-Archimedean structures, in *Atti dei Convegni Lincei 8: Atti del Convegno Internazionale Celebrativo del Centenario della nascita de Tullio Levi-Civita*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, pp. 297-312.
Levi-Civita T. (1893), Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, *Atti Ist. Veneto di Sc. lett. ed arti*, t. IV, sez. VII, pp. 1765-1815.
Levi-Civita T. (1898), Sui numeri transfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem., pp. 113-121.
Luminet J. P. e Lachièze-Rey M. (2005), *De l'infini... Mystères et limites de l'Univers*; trad. it. S. Moriggi (2006), *Finito o infinito? Limiti ed enigmi dell'Universo*, Raffaello Cortina, Milano.
Manara C. F. (1991), Giuseppe Peano ed i Fondamenti della Geometria, in *Atti del Convegno "Peano e i Fondamenti della Matematica"*, Modena, pp. 171-184.
Peano G. (1889), I Principii di Geometria logicamente esposti, in *Opere scelte* (1958), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. 11, pp. 59-78.
Peano G. (1894), Sui Fondamenti della Geometria, in *Opere scelte* (1959), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. III, pp. 115-157.
Pejas W. (1961), Die Modelle des Hilbertschen Axiomensustems der Absoluten Geometrie, Math. Annalen, 143, pp. 212-235.
Poincaré J.H. (1902), *La science et l'Hypothèse,* Flammarion, Paris; trad. it. *La scienza e l'ipotesi,* Dedalo, Bari 1989.
Robinson, A. (1974), *Non-standard analysis,* North-Holland, Amsterdam- London.
Russell B. (1897), *An Essay on the Foundations of Geometry,* Cambridge University Press, Cambridge-London; trad. it. *I Fondamenti della Geometria*, Newton Compton, Roma 1975.
Russell B. (1938), Principles of Mathematics, ed. 2, W.W. Norton & Company, New York.

Veronese G. (1891), *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Tipografia del Seminario, Padova.
Veronese G. (1897), Sul postulato della continuità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VI, II sem., pp. 161-167.
Veronese G. (1898), Segmenti e numeri trasfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem., pp. 79-87.
Veronese G. (1905), La geometria non archimedea. Una questione di priorità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XIV, I sem., 347-351.
Veronese G. (1909), La geometria non archimedea, *Proceedings of IV Mathematicians International Congress*, vol. I, 197-208.