Ratio Mathematica 11
(1996), 59 - 62

UNA CARATTERIZZAZIONE DELLE CONICHE DI PG(2,q)

Stefania Ferri *

SUNTO - Si prova che un k-insieme K di PG(2,q), con $k \leq q+1$, di classe $[0, m, n]_1$, rispetto alle rette, tale che per ogni punto di K passi, al più, una retta m-secante K, è una conica.

ABSTRACT - We prove that a k-set K of PG(2,q), with $k \leq q+1$, of class $[0, m, n]_1$, with respect to the lines, such that for each point of K meets, at the most, a m-secant line, is a conic.

INTRODUZIONE

0. Ricordiamo, cfr.[5], che un k-insieme K di uno spazio di Galois di dimensione r e ordine q, PG(r,q), si dice di classe $[s, m, n]_1$, rispetto alle rette, $0 \leq s < m < n \leq q+1$, se le rette di PG(r, q) possono intersecare K solo in s, m, n punti; K è di tipo $(s, m, n)_1$, rispetto alle rette, se è di classe $[s, m, n]_1$ ed esistono effettivamente rette di PG(r,q) che intersecano K in s, m, n punti.

E' noto che una conica di PG(2,q) è un (q+1)- insieme, costituito da punti a tre a tre non allineati di tipo $(0, 1, 2)_1$, rispetto alle rette.
In questo lavoro proviamo che un k-insieme K di PG(2,q), soddisfacente certe condizioni, è una conica.

* Dipartimento di Matematica, Università de L'Aquila

CARATTERIZZAZIONE DELLE CONICHE DI PG(2,q).

1. Vogliamo dimostrare il seguente
2.

TEOREMA 1 - *Un k - insieme K di PG(2,q), con $k \leq q+1$, di classe $[0, m, n]_1$, rispetto alle rette, tale che per ogni punto di K passi, al più, una retta m-secante K, è una conica di PG(2,q).*

DIMOSTRAZIONE: Detti t_0, t_m, t_n i *caratteri* di K rispetto alle rette, cioè i numeri delle rette di PG(2,q) che intersecano K rispettivamente in 0, m, n punti, si ha, cfr.[6]:

$$\begin{cases} t_0 + t_m + t_n = q^2 + q + 1 \\ m\, t_m + n\, t_n = k\,(q+1) \\ m\,(m-1)\, t_m + n\,(n-1)\, t_n = k\,(k-1) \end{cases} \tag{1.1}$$

in cui :

$$1 \leq m \leq q \qquad 2 \leq n \leq q+1 \tag{1.2}$$

Dalla seconda e terza equazione di (1.1) si ricava:

$$t_m = \frac{k\,[n\,(q+1) - k - q]}{m\,(n-m)} \qquad t_n = \frac{k\,[k + q - m\,(q+1)]}{n\,(n-m)} \tag{1.3}$$

Dovendo essere $t_m \geq 0$, dalla prima delle (1.3), si ha $k+q-m(q+1) \geq 0$, cioè $m \leq (k+q)/(q+1)$ e poiché, per ipotesi, $k \leq q+1$, risulta $m \leq (q+1+q)/(q+1) = 2 - 1/(q+1)$ e quindi, dovendo essere m intero, $m \leq 1$. Poiché per la (1.2) è $m \geq 1$, sarà necessariamente *m = 1*.

Dimostriamo ora che *per ogni punto P di K deve passare almeno una retta m-secante, cioè una 1-secante K.*

Preso infatti un punto qualsiasi P di K, se le rette per P fossero tutte n-secanti, poiché i punti di K si distribuiscono sulle q+1 rette per P n-secanti, si avrebbe $(n-1)(q+1)+1 = k$. Poiché, per ipotesi, $k \leq q+1$, dovrebbe essere $(n-1)(q+1)+1 \leq q+1$, cioè $n\,(q+1) \leq 2q+1$ da cui $n \leq 2 - 1/(q+1)$ ed essendo n un numero intero sarebbe $n \leq 1$ contro la (1.2). Ne segue l'asserto.

Poiché per ogni punto P di K passa, per ipotesi, al più, una 1-secante, ne segue che per ogni P passa esattamente una 1-secante K. Allora il numero

t_1 delle rette di PG(2,q) 1-secanti K, sarà uguale a k. Quindi dalla prima delle (1.1) in cui si ponga m=1 si ha:

$$t_1 = k = k\,[\,n\,(q+1) - k - q\,] / (n-1)$$

cioè $n\,(q+1) - k - q = n - 1$, da cui

$$k = (n - 1)\,q + 1 \qquad (1.4)$$

Però, per ipotesi, $k \le q+1$; ne segue che $(n - 1)\,q + 1 \le q+1 \Rightarrow n \le 2$. Avendo supposto per la (1.2) $n \ge 2$, dovrà essere $n = 2$.

Sostituendo $n = 2$ nella (1.4), si ha che $k = q+1$.

Dalle (1.3) in cui $m=1$, $n=2$, $k=q+1$ si ha:

$$t_1 = q + 1 \qquad\qquad t_2 = q\,(q + 1)/2 \qquad (1.5)$$

e dalla prima delle (1.1) per $m=1$ ed $n=2$, in cui si sostituiscano le (1.5) si ha

$$t_0 = q\,(q-1) / 2 \qquad (1.6)$$

Dunque K è un (q+1)-insieme costituito da punti a tre a tre non allineati (cioè un (q+1)-arco) in quanto una retta qualsiasi di PG(2,q) interseca K solo in 0, 1, 2 punti. Esistono effettivamente tali rette perché, per le (1.5) ed (1.6), i numeri t_0 , t_1 , t_2 sono tutti diversi da 0. Dunque K è un (q+1)-arco di PG(2,q) di tipo $(0, 1, 2)_1$ rispetto alle rette e quindi è una conica.

Il teorema 1 resta così provato.

BIBLIOGRAFIA

1. O. FERRI, *Una caratterizzazione grafica dell'insieme dei punti esterni ad una ovale in un π_q (q dispari)*. Rend. Mat. Univ. Roma Vol.14, Serie VI (1) (1981).
2. O. FERRI, *On type ((q-3)/2, (q-1)/2, q-1) k- sets in a affine plane AG(2,q)*. Annals of Discrete Mathematics, 14 (1982) 211-218.
3. B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*. Edizioni Cremonese, Roma (1961).
4. B. SEGRE, *Istituzioni di Geometria Superiore*. Istituto Mat. Univ. Roma (1966).
5. G. TALLINI, *Problemi e Risultati sulle geometrie di Galois*. Relaz. n.30 Ist. Mat. Univ. Napoli (1973) 1-30.
6. G. TALLINI, *Teoria dei k-insiemi in uno spazio di Galois, Teoria dei codici correttori*. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. Univ. Roma "La Sapienza", quad.n.64 (1985).