Ratio Mathematica 11
(1996), 121 - 130

SULLE CURVE CHE CONTENGONO TUTTI I PUNTI DI UN PIANO DI FANO

Osvaldo Ferri[*], Raffaella Iafisco[**]

SUNTO - Si dimostra che esiste una sola curva irriducibile di ordine minimo che contiene tutti i punti del piano di Fano, e se ne determina l'equazione.

ABSTRACT - The existence of only one irreducible curve, of minimum order, containing each point of Fano's plane, is proved and its equation is determined.

INTRODUZIONE

0. Ricordiamo (cfr.2) che il piano di Fano $S_{2,2}$ è un piano proiettivo finito costruito su γ_2 (campo dei resti modulo 2).Tale piano è quindi costituito da sette punti e da sette rette che, in un riferimento proiettivo $O(x_0, x_1, x_2)$, (ove $x_2 = 0$ è l'equazione della retta impropria), sono rispettivamente O(0,0,1), I(1,0,0), J(0,1,0), A(0,1,1), B(1,0,1), C(1,1,0), U(1,1,1) e $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_0 + x_1 = 0$, $x_0 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e ognuna di tali rette contiene esattamente tre punti di $S_{2,2}$.
Precisamente la prima retta, $x_0 = 0$, contiene i punti O, J, A, la seconda $x_1 = 0$, i punti O, I, B, la terza I, J, C, la quarta i punti O, C, U, la quinta J, B, U, la sesta I, A, U ed infine l'ultima contiene i punti A, B, C.

[*] Università degli studi de L'Aquila, Dipartimento di Matematica
[**] Università degli studi de L'Aquila, Dipartimento di Matematica

In questo lavoro si vogliono determinare le equazioni delle C^n curve algebriche di ordine n, invadenti $S_{2,2}$, cioè contenenti tutti i punti di $S_{2,2}$, irriducibili in Γ_2 (chiusura algebrica di γ_2), e di ordine minimo.
Si prova che deve risultare $n = 4$ e che esiste una sola C^4 di cui si determina l'equazione.

PROPRIETA' DELLE C^n INVADENTI $S_{2,2}$.

1. Iniziamo a dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 1 - *L'ordine di una C^n di $S_{2,2}$, contenente tutti i punti di $S_{2,2}$, e irriducibile in Γ_2 è $n \geq 4$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia *r* una generica retta di $S_{2,2}$; essa ha tre punti in γ_2 i quali, essendo per ipotesi C^n invadente $S_{2,2}$, giacciono su C^n. Ne segue che:

$$n = | C^n \cap r \ | \geq 3.$$

Una C^3 invadente $S_{2,2}$ è però riducibile, essa si spezza nelle tre rette di un fascio (in γ_2). Infatti l'equazione di una C^3 di $S_{2,2}$ è data da .

$$\begin{aligned} a\, x_0^3 + b\, x_1^3 + c\, x_0^2 x_1 + d\, x_0 x_1^2 + e\, x_0^2 x_2 + f\, x_1^2 x_2 + \\ + g\ x_0 x_1 x_2 + h\, x_0 x_2^2 + i\, x_1 x_2^2 + l\, x_2^3 = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove a, b, c, d, e, f, g, h, i, $l \in \gamma_2$.
Dovendo contenere tutti i punti di $S_{2,2}$, deve aversi (sostituendo nella (1.1) le coordinate di tali punti):

$$l = 0,\ a = 0,\ b = 0,\ b + f + i + l = 0,\ a + e + h + l = 0,\ a + b + c + d = 0,$$
$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + l = 0$$

da cui segue

$$a = b = g = l = 0,\ f = i,\ e = h,\ c = d = 1 \tag{1.2}$$

Sostituendo le (1.2) nella (1.1) si ha :

$$\left(x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2\right) \cdot 1 + \left(x_0^2 x_2 + x_0 x_2^2\right) \cdot h + \left(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2\right) \cdot i = 0 \tag{1.3}$$

e questa è proprio l'equazione complessiva delle tre rette di $S_{2,2}$ di centro: C(h, i, 1). Ne segue che deve essere $n \geq 4$.

Consideriamo allora quelle di ordine minimo $n = 4$, cioè le C^4 di $S_{2,2}$; proviamo preliminarmente le seguenti :

PROPOSIZIONE 2 - *Una C^4 invadente l' $S_{2,2}$ se è irriducibile in Γ_2, non può avere punti multipli in γ_2.*

DIMOSTRAZIONE. Una tale C^4 può avere al più un punto doppio in γ_2. Se avesse infatti un punto triplo (in γ_2), ogni retta di $S_{2,2}$ per esso, dovendo contenere tre punti, avrebbe cinque intersezioni (in γ_2) con la C^4 che risulterebbe così riducibile in γ_2.

Supponiamo allora che abbia un punto doppio D in γ_2. La tangente ad essa in un punto P diverso da D sarebbe una retta di $S_{2,2}$ che non può passare per D, altrimenti tale retta avrebbe con la C^4 almeno cinque intersezioni (due in D, due in P e almeno una nell'altro punto che la retta ha in γ_2).
Ripetendo il ragionamento per tutti i punti della C^4 in γ_2, distinti da D, si ha che devono esistere tante rette distinte di $S_{2,2}$ non passanti per D quanti sonoi punti di $S_{2,2}$ distinti da D, cioè sei, ma ciò non può verificarsi in quanto le rette di $S_{2,2}$ non passanti per D sono quattro.

PROPOSIZIONE 3 - *Una C^4 invadente $S_{2,2}$, se è riducibile in Γ_2, allora deve avere come componente una retta di γ_2.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti se una tale C^4 non contiene rette in γ_2 deve necessariamente spezzarsi in due coniche irriducibili, ognuna delle quali, come è noto (cfr. 3), contiene tre punti di $S_{2,2}$ e quindi la C^4 non invaderebbe $S_{2,2}$.

DETERMINAZIONE DELLE C^4 INVADENTI $S_{2,2}$ E IRRIDUCIBILI IN Γ_2.

2. L'equazione di una C^4 di $S_{2,2}$ passante per i punti O (0,0,1), I (1,0,0) e J(0,1,0) è data da :

$$a\,x_0^3x_1 + b\,x_0x_1^3 + c\,x_0^2x_1^2 + d\,x_0^3x_2 + e\,x_1^3x_2 + f\,x_0^2x_1x_2 + \tag{2.1}$$
$$+ g\,x_0x_1^2x_2 + h\,x_0^2x_2^2 + i\,x_1^2x_2^2 + l\,x_0x_1x_2^2 + m\,x_0x_2^3 + n\,x_1x_2^3 = 0$$

con a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n $\in \gamma_2$.
Affinchè la C^4 contenga anche i punti A, B, C, U di $S_{2,2}$ devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f+g+l=0 \\ a+b+c=0 \\ d+h+m=0 \\ e+i+n=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Essendo i coefficienti della (2.1) omogenei non è restrittivo supporre <u>a = 1.</u>
Dalla seconda equazione del sistema (2.2) segue che :

$$b=0 \quad c=1 \tag{2.3}$$

oppure

$$b=1 \quad c=0 \tag{2.4}$$

Esaminiamo dapprima il caso (2.3).
Dalla (2.1) si ha, in tal caso, che non può essere e = 0 altrimenti J (0,1,0) risulterebbe doppio, contro la proposizione 2; ne segue che

$$e=1 \tag{2.3$_1$}$$

Inoltre dalla quarta equazione della (2.2) risulta :

$$i = 0 \quad n = 1 \qquad (2.3)_2$$

$$i = 1 \quad n = 0 \qquad (2.3)_3$$

Dalla terza e dalla prima equazione di (2.2) risulta che :

$$\begin{aligned} &d = h = m = 0 \\ &d = 0 \quad h = m = 1 \\ &m = 0 \quad d = h = 1 \\ &h = 0 \quad d = m = 1 \end{aligned} \qquad (2.3)_4$$

$$\begin{aligned} &f = g = l = 0 \\ &f = 0 \quad g = l = 1 \\ &l = 0 \quad f = g = 1 \\ &g = 0 \quad f = l = 0 \end{aligned} \qquad (2.3)_5$$

Tenendo conto delle (2.3), $(2.3)_1$, $(2.3)_2$, $(2.3)_4$, $(2.3)_5$ si ha che le equazioni delle rispettive C^4 in $S_{2,2}$ sono le seguenti

1- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0$
[$b = i = d = h = m = f = g = l = 0$; $a = c = e = n = 1$]

2- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = i = d = h = m = f = 0$; $a = c = e = n = g = l = 1$]

3- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$b = i = d = h = m = l = 0$; $a = c = e = n = f = g = 1$]

4- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = i = d = h = m = g = 0$; $a = c = e = n = f = l = 1$]

5- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_2^3 = 0$
[$b = i = d = f = g = l = 0$; $a = c = e = n = h = m = 1$]

6- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = i = d = f = 0$; $a = c = e = n = h = m = g = l = 1$]

7- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$b = i = d = l = 0$; $a = c = e = n = h = m = f = g = 1$]

8- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = i = d = g = 0$; $a = c = e = n = h = m = f = l = 1$]

9- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 = 0$
[$b = i = m = f = g = l = 0$; $a = c = e = n = d = h = 1$]

10- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = i = m = f = 0$; $a = c = e = n = d = h = g = l = 1$]

11- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$b = i = m = l = 0$; $a = c = e = n = d = h = f = g = 1$]

12- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = i = m = g = 0$; $a = c = e = n = d = h = f = l = 1$]

13- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 = 0$
[$b = i = h = f = g = l = 0$; $a = c = e = n = d = m = 1$]

14- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = i = h = f = 0$; $a = c = e = n = d = m = g = l = 1$]

15- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$b = i = h = l = 0$; $a = c = e = n = d = m = f = g = 1$]

16- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = i = h = g = 0$; $a = c = e = n = d = m = f = l = 1$]

Si esamini ora il caso (2.3), $(2.3)_1$, $(2.3)_3$.
Dalla (2.1), per la $(2.3)_3$ si ha che non può essere $m = 0$, altrimenti il punto $O(0,0,1)$ risulterebbe doppio (contro la proposizione 2).
Ne segue:

$$m = 1 \qquad (2.3)_6$$

Dalla terza equazione della (2.2) si ha che

$$d = 1 \quad h = 0 \qquad (2.3)_7$$
$$d = 0 \quad h = 1 \qquad (2.3)_8$$

Tenendo conto delle (2.3), $(2.3)_1$, $(2.3)_3$, $(2.3)_5$, $(2.3)_6$, $(2.3)_7$ si ha che le equazioni delle rispettive C^4 sono le seguenti :

17- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^3x_2 = 0$
[$b = h = n = f = g = l = 0$; $a = c = d = e = i = m = 1$]

18- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = h = n = f = 0$; $a = c = d = e = i = m = g = l = 1$]

19- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$b = h = n = l = 0$; $a = c = d = e = i = m = f = g = 1$]

20- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = h = n = g = 0$; $a = c = d = e = i = m = f = g = 1$]

Nell'ipotesi (2.3), $(2.3)_1$, $(2.3)_3$, $(2.3)_5$, $(2.3)_6$, $(2.3)_8$ le equazioni delle rispettive C^4 sono date da :

21- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 = 0$
[$b = d = n = f = g = l = 0$; $a = c = e = h = i = m = 1$]

22- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = d = n = f = 0$; $a = c = e = h = i = m = g = l = 1$]

23- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$b = d = n = l = 0$; $a = c = e = h = i = m = f = g = 1$]

24- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$b = d = n = g = 0$; $a = c = e = h = i = m = f = l = 1$]

Consideriamo ora il caso (2.4). Dalla terza equazione di (2.2) si ha:

$$d = h = m = 0 \tag{2.4$_1$}$$
$$m = 0,\ \ d = h = 1 \tag{2.4$_2$}$$
$$h = 0,\ \ d = m = 1 \tag{2.4$_3$}$$
$$d = 0,\ \ h = m = 1 \tag{2.4$_4$}$$

Si osservi che dalla (2.1) nel caso $(2.4)_1$ e $(2.4)_2$ non può essere $n = 0$, altrimenti il punto O (0,0,1) risulterebbe doppio, quindi

$$n = 1 \tag{2.4$_5$}$$

Ciò implica, dalla quarta equazione di (2.2) :

$$\begin{matrix} e = 0 & i = 1 \\ e = 1 & i = 0 \end{matrix} \tag{2.4$_6$}$$

Nel caso $(2.3)_5$, (2.4), $(2.4)_1$, $(2.4)_5$, $(2.4)_6$, e nel caso $(2.3)_5$, (2.4), $(2.4)_2$, $(2.4)_5$, $(2.4)_6$ le equazioni sono :

25- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2 = 0$
[$c = d = e = h = m = f = g = l = 0;\ \ a = b = i = n = 1$]

26- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$c = d = e = h = m = f = 0;\ \ a = b = i = n = g = l = 1$]

27- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$c = d = e = h = m = l = 0;\ \ a = b = i = n = f = g = 1$]

28- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$c = d = e = h = m = g = 0;\ \ a = b = i = n = f = l = 1$]

29- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_1^3x_2 = 0$
[$c = d = h = m = i = f = g = l = 0;\ \ a = b = e = n = 1$]

30- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$c = d = h = m = i = f = 0;\ \ a = b = e = n = g = l = 1$]

31- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$c = d = h = m = i = l = 0;\ \ a = b = e = n = f = g = 1$]

32- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$c = d = h = m = i = g = 0;\ \ a = b = e = n = f = l = 1$]

33- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2 = 0$
[$c = e = m = f = g = l = 0;\ \ a = b = d = h = i = n = 1$]

34- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$c = e = m = f = 0; a = b = d = h = i = n = g = l = 1$]

35- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$c = e = m = l = 0; a = b = d = h = i = n = f = g = 1$]

36- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$c = e = m = g = 0; a = b = d = h = i = n = f = l = 1$]

37- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0$
$[c = i = m = f = g = l = 0;\ a = b = d = e = h = n = 1]$

38- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = i = m = f = 0;\ a = b = d = e = h = n = g = l = 1]$

39- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
$[c = i = m = l = 0;\ a = b = d = e = h = n = f = g = 1]$

40- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = i = m = g = 0;\ a = b = d = e = h = n = f = l = 1]$

Dalla quarta equazione della (2.2) si ha:

$$\left.\begin{array}{l} e = i = n = 0 \\ e = 0 \quad i = n = 1 \\ n = 0 \quad e = i = 1 \\ i = 0 \quad e = n = 1 \end{array}\right. \qquad (2.4)_7$$

e allora nei casi $(2.3)_5$, (2.4), $(2.4)_3$, $(2.4)_7$ e $(2.3)_5$, (2.4), $(2.4)_4$, $(2.4)_7$, si ottengono:

41- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 = 0$
$[c = e = h = i = n = f = g = l = 0;\ a = b = d = m = 1]$

42- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = e = h = i = n = f = 0;\ a = b = d = m = g = l = 1]$

43- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
$[c = e = h = i = n = l = 0;\ a = b = d = m = f = g = 1]$

44- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = e = h = i = n = g = 0;\ a = b = d = m = f = l = 1]$

45- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 = 0$
$[c = e = h = f = g = l = 0;\ a = b = d = i = m = n = 1]$

46- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = e = h = f = 0;\ a = b = d = i = m = n = g = l = 1]$

47- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
$[c = e = h = l = 0;\ a = b = d = i = m = n = f = g = 1]$

48- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = e = h = g = 0;\ a = b = d = i = m = n = f = l = 1]$

49- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 = 0$
$[c = h = n = f = g = l = 0;\ a = b = d = e = i = m = 1]$

50- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = h = n = f = 0;\ a = b = d = e = i = m = g = l = 1]$

51- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
$[c = h = n = l = 0;\ a = b = d = e = i = m = f = g = 1]$

52- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = h = n = g = 0;\ a = b = d = e = i = m = f = l = 1]$

53- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0$
$[c = h = i = f = g = l = 0;\ a = b = d = e = m = n = 1]$

54- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = h = i = f = 0;\ a = b = d = e = m = n = g = l = 1]$

55- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
$[c = h = i = l = 0;\ a = b = d = e = m = n = f = g = 1]$

56- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = h = i = g = 0;\ a = b = d = e = m = n = f = l = 1]$

57- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 = 0$
$[c = d = e = i = n = f = g = l = 0;\ a = b = h = m = 1]$

58- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = d = e = i = n = f = 0;\ a = b = h = m = g = l = 1]$

59- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
$[c = d = e = i = n = l = 0;\ a = b = h = m = f = g = 1]$

60- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = d = e = i = n = g = 0;\ a = b = h = m = f = l = 1]$

61- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 = 0$
$[c = d = e = f = g = l = 0;\ a = b = h = i = m = n = 1]$

62- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = d = e = f = 0;\ a = b = h = i = m = n = g = l = 1]$

63- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
$[c = d = e = l = 0;\ \ a = b = h = i = m = n = f = g = 1]$

64- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = d = e = g = 0;\ \ a = b = h = i = m = f = l = 1]$

65- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2 = 0$
$[c = d = n = f = g = l = 0;\ \ a = b = e = h = i = m = 1]$

66- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = d = n = f = 0;\ \ a = b = e = h = i = m = g = l = 1]$

67- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
$[c = d = n = l = 0;\ \ a = b = e = h = i = m = f = g = 1]$

68- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
$[c = d = n = g = 0;\ \ a = b = e = h = i = m = f = l = 1]$

69- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0$
$[c = d = i = f = g = l = 0;\ \ a = b = e = h = m = n = 1]$

70- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$c = d = i = f = 0$; $a = b = e = h = m = n = g = l = 1$]

71- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
[$c = d = i = l = 0$; $a = b = e = h = m = n = f = g = 1$]

72- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
[$c = d = i = g = 0$; $a = b = e = h = m = n = f = l = 1$]

Si verifica facilmente che tra tutte le C^4 trovate, le seguenti contengono almeno una retta in γ_2 e precisamente :

le 41, 42, 43, 44, 57, 58, 59, 60, contengono la retta $x_0 = 0$,

le 1, 2, 3, 4, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, la retta $x_1 = 0$,

le 6, 8, 13, 15, 38, 45, 46, 48, 53, 55, 61, 63, 70, 72, la $x_0 + x_1 = 0$,

le 36, 37, 40, 50, 56, 66, 67, 69, la retta $x_0 + x_2 = 0$,

le 10, 19, 20, 35, 49, 54, contengono la retta $x_1 + x_2 = 0$,

le 5, 7, 9, 16, 18, 21, 34, 39, 51, 68, la retta $x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

In virtù della proposizione 3 segue che le rimanenti C^4, e cioè le 11, 12, 14, 17, 22, 23, 24, 33, 47, 52, 62, 64, 65, 71, sono tutte irriducibili in Γ_2.

Sussiste però il seguente teorema:

TEOREMA - *Le C^4 invadenti $S_{2,2}$, , irriducibile in Γ_2 sono tutte proiettivamente identiche, in quanto, pur di scegliere opportunamente il riferimento proiettivo, esse si riducono tutte alla 33.*

DIMOSTRAZIONE. Si verifica facilmente che :

la 11 mediante l'omografia data da $x_0 = X_0 + X_1$; $x_1 = X_1$; $x_2 = X_2$,

la 12 tramite la $x_0 = X_1$; $x_1 = X_0 + X_2$; $x_2 = X_0$,

la 14 con la $x_0 = X_0 + X_1 + X_2$; $x_1 = X_1$; $x_2 = X_2$,

la 17 con la $x_0 = X_0$; $x_1 = X_2$; $x_2 = X_1$,

la 22 mediante la $x_0 = X_0 + X_1 + X_2$; $x_1 = X_0 + X_2$; $x_2 = X_0$,

la 23 con la $x_0 = X_0$; $x_1 = X_2$; $x_2 = X_0 + X_1$,

la 24 con la $x_0 = X_1 + X_2$; $x_1 = X_0 + X_2$; $x_2 = X_0$,

la 47 tramite la $x_0 = X_0 + X_1$; $x_1 = X_2$; $x_2 = X_1$,

la 52 con la $x_0 = X_0 + X_1 + X_2$; $x_1 = X_2$; $x_2 = X_0$,

la 62 con la $x_0 = X_1$; $x_1 = X_0 + X_1$; $x_2 = X_1 + X_2$,

la 64 con la $x_0 = X_2$; $x_1 = X_1$; $x_2 = X_0 + X_1 + X_2$,

la 65 con la $x_0 = X_1$; $x_1 = X_0$; $x_2 = X_2$,

la 71 tramite la $x_0 = X_0$; $x_1 = X_0 + X_1$; $x_2 = X_0 + X_1 + X_2$,
si riducono tutte alla 33, cioè :

$$X_0^3X_1 + X_0X_1^3 + X_0^3X_2 + X_0^2X_2^2 + X_1X_2^3 + X_1^2X_2^2 = 0$$

BIBLIOGRAFIA

1. O. FERRI, " *Intorno alle curve C^{q+3} irriducibili con un punto triplo che invadono un piano di Galois $S_{2,q}$*". Rend. Accad. Sci. Lettere Art. Napoli (4) Vol. XXXVI (1969))
2. B. SEGRE, "*Lectures on modern geometry*". Roma, Cremonese, 1961
3. B. SEGRE, "*Istituzioni di geometria superiore*". App. di parte del corso A.A 1965-66 Univ. di Roma
4. G. TALLINI, " *Le ipersuperfici irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois*". Rend. Mat. Univ. Roma Serie V, vol.XX
5. G. TALLINI, "Intorno alle forme di uno spazio di Galois e agli spazi subordinati giacenti su esse". Rend. Acc. Naz. Lincei (8), 33, (1962), pp. 421-428