Ratio Mathematica 11
(1996), 115-119

SUL CONCETTO DI LATERALIZZAZIONE NELLE IPERSTRUTTURE

Fabio Mercanti , Luigi Cerritelli

SUNTO - Dato un ipergruppo (G,φ) si introduce il concetto di *iperlaterale* di A (sottoinsieme non vuoto di G), avente g∈G come *rappresentante*. Si introduce anche la nozione di *γ-ipergruppo,* mediante la quale è possibile caratterizzare certi iperlaterali come sostegni di *sottoipergruppi* del γ-ipergruppo stesso.

ABSTRACT -Given an hypergroup (G,φ), we introduce the concept of *hyperlateral* of A (non empty subset of G), having g∈G as *representative.* We introduce also the notion of *γ-hypergroup* which characterize some hyperlaterals as supports of *subhypergroups* of the γ-hypergroup itself.

1. Dato un ipergruppo (G,φ), sia A un sottoinsieme non vuoto di G. Si ricorda rapidamente (CORSINI [4],7) che

1.1. Il sottoinsieme A si dice *moltiplicativamente chiuso* rispetto alla iperoperazione φ se

---

Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca MPI 60% del Politecnico di Milano

$$\forall a, b \in A \Rightarrow a\varphi b \subset A \; ; \tag{1}$$

in tal caso (A,φ) prende il nome di sottoipergruppoide di (G,φ);

1.2. Il sottoipergruppoide (A,φ) è, in particolare, un *sottoipergruppo* di (G,φ) se

$$\forall a \in A \Rightarrow \bigcup_{x\in A} a\varphi x = \bigcup_{x\in A} x\varphi a = A \, . \tag{2}$$

2. Se si considerano ora un ipergruppo (G,φ), un suo sottoipergruppo (A,φ) e un elemento g∈G, è possibile dare la seguente

DEFINIZIONE 1. *Gli insiemi D e S seguenti,*

$$D = A\varphi g = \bigcup_{x\in A} x\varphi g \, , \tag{3}$$

$$S = g\varphi A = \bigcup_{x\in A} g\varphi x \, , \tag{4}$$

vengono chiamati, rispettivamente, iperlaterale destro e iperlaterale sinistro di A, aventi g come rappresentante.

2.1. Se l'ipergruppo (G,φ) è *commutativo*, allora gli insiemi D e S dati, rispettivamente, dalla (3) e dalla (4) coincidono. In tal caso un iperlaterale destro o sinistro di A viene, semplicemente, detto *iperlaterale* di A e indicato indifferentemente con L, valendo l'ovvia uguaglianza

$$D = S = L \, . \tag{5}$$

2.2. Si introducono ora i concetti di *iperlaterali interno ed esterno* di A.

DEFINIZIONE 2. *Se* g∈A, *l'iperlaterale L di* A (cfr.(5)) *viene detto iperlaterale interno di* A *ed indicato con I.*

DEFINIZIONE 3. *Se* g∉A, *l'iperlaterale L di* A (cfr.(5)) *viene detto iperlaterale esterno di* A *ed indicato con E.*

2.3. Dalla definizione 2 e dalla (2) segue immediatamente che A e I coincidono. Dunque (I, φ) è banalmente sottoipergruppo di (G,φ).

3. Nulla si può, in generale, affermare sul fatto che (E,φ) sia o non sia sottoipergruppo di (G,φ), essendo E l'iperlaterale esterno dato dalla definizione 3. Si formuli allora la seguente

***DEFINIZIONE** 4. Un ipergruppo (Γ,φ) per il quale l'iperoperazione φ soddisfi la condizione*

$$\forall a,b \in \Gamma, a \in a\varphi b \wedge b \in a\varphi b, \tag{6}$$

viene chiamato γ-ipergruppo.

In virtù della (5) nel seguito si considerano solamente γ-ipergruppi commutativi (cfr.2.1.), essendo ora A sottoinsieme non vuoto di Γ.

3.1. Per i γ-ipergruppi vale il seguente

***TEOREMA** 1. In un γ-ipergruppo ogni sottoipergruppoide è sottoipergruppo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (A,φ) un sottoipergruppoide di (Γ,φ). Dalla (1) e dalla (6) segue immediatamente che

$$\begin{aligned} &\forall a,b \in A; a\varphi b \subset A, a \in a\varphi b, b \in a\varphi b \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigcup_{x,y\in A} x\varphi y = \bigcup_{y\in A} A\varphi y = \bigcup_{x\in A} x\varphi A = A. \end{aligned} \tag{7}$$

Dalla (7) si deduce che per (A,φ) vale la (2) e che, pertanto, (A,φ) è un sottoipergruppo di (Γ,φ).

3.2.Per gli iperlaterali esterni di A valgono i seguenti

***TEOREMA** 2. Ogni iperlaterale esterno E di* A *contiene propriamente* A.

DIMOSTRAZIONE. Poiché l'operazione φ gode, per ipotesi (cfr. definizione 4), della proprietà (6), tenendo conto delle (3) e (5) si conclude che ogni elemento di A è anche elemento di E.

***TEOREMA* 3.** *Ogni iperlaterale* E *di* A *è sostegno di un sottoipergruppoide* (E,φ) *di* (Γ,φ).

DIMOSTRAZIONE. Presi $e_1, e_2 \in E$ e $c \in \Gamma$ (ma non ad A (cfr. definizione 3)) si ottiene, successivamente, tenendo conto della (3) e della associatività di φ,

$$e_1\varphi\ e_2 = (a_j\varphi c)\varphi(a_k\varphi c) = [(a_j\varphi a_k)\varphi c]\varphi c = (a_r\varphi c)\varphi c \tag{8}$$

essendo a_j, a_k, a_r elementi di A. Valendo per ipotesi la (6), l'ultimo membro della (8) diventa

$$(a_r\varphi c)\varphi c = e_s\varphi c \subset E, \tag{9}$$

essendo e_s elemento di E. Dalla (9) segue, immediatamente, che per l'iperlaterale E vale la (1). Pertanto (E,φ) è un sottoipergruppoide di (Γ,φ).

COROLLARIO. *Ogni iperlaterale esterno* E *di* A *è sostegno di un sottoipergruppo* (E,φ) *di* (Γ,φ).

DIMOSTRAZIONE. L'asserto segue immediatamente dai teoremi 3 e 1 precedenti.

4. Si osserva infine quanto segue. Si indichi con L_i la generica coppia (E_i,φ), avente $g_i \notin A$ come rappresentante (cfr. definizione 3), e con L* la classe di tali coppie. Poiché ogni iperlaterale E_i è caratterizzato dal suo rappresentante g_i, la classe L* potrà essere strutturata con opportune iperoperazioni che agiscano direttamente sui rappresentanti. In tal senso è attualmente allo studio una teoria degli iperlaterali negli ipergruppi.

5. Il concetto di iperlaterale in un ipergruppo è banalmente applicabile alle iperstrutture più *deboli*. In generale , in altre iperstruttture (cfr. ad esempio BERARDI-EUGENI-INNAMORATI [1], CORSINI[3], TALLINI[5]), sarà possibile introdurre definizioni di iperlaterali e teoremi sui medesimi in maniera del tutto simile a quella usata, nei paragrafi precedenti, per gli ipergruppi.

BIBLIOGRAFIA

1. L.BERARDI, F.EUGENI, S.INNAMORATI, *Generalized designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic cryptography*, Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, World Scientific,(1990), 55-65.
2. L. CERRITELLI e F. MERCANTI, *Algebra astratta e insegnamento,* Ratio Math., 10 (1996), 85-89.
3. P. CORSINI, *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi,*. B.U.M.I. 2-A, (1983), 133-138.
4. P. CORSINI, *Prolegomena of Hypergroup Theory*, 2nd ed., Aviani Editore, 1992.
5. G. TALLINI, *Geometric Hyperquasigroups and Line Spaces*, Acta Univ. Carolinae, Math. Phys., vol. 25, 1 (1984), 69-73.