

RATIO MATH. 1.

(1990), 139-161

**SULLA INTEGRAZIONE
DELLA EQUAZIONE SEMPLIFICATA
DEL MOTO VARIO DI UNA FALDA FREATICA.**

Aniello Russo Spena e Maria Teresa Todisco

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, delle Acque e del Terreno
Università di L'Aquila

1. - INTRODUZIONE.

Per caratterizzare il regime idraulico di una falda acquifera, usualmente, vengono assunte le variazioni cui sono soggette, in ciascun luogo, le quote della superficie libera (o di quella piezometrica) della falda stessa.

Tuttavia, nelle situazioni più frequenti, stabilire per via diretta le connessioni tra tali quote e i fattori che ne determinano le variazioni è praticamente impossibile poichè, in genere, non si riesce a precisare in modo sicuro, sia l'entità e le modalità degli afflussi alla falda, sia le minute condizioni fisico-geologiche dell'ammasso sede della circolazione idrica.

Di fronte a queste difficoltà, gli studi di carattere generico sulle falde vengono limitati alla ricerca, per semplice raffronto, delle connessioni tra il regime dei livelli della falda e quello degli afflussi di maggiore importanza e più facilmente osservabili (piogge e irrigazioni).

Per questa via si giunge, effettivamente, a porre in evidenza le manifestazioni globali dei caratteri fondamentali dei regimi delle falde e, in particolare, il loro "potere regolatore" [1].

Quando però sia necessario prevedere gli effetti indotti sul regime delle falde da opere particolari (opere di ravvenamento o di captazione, ad esempio), non è sufficiente limitarsi ad individuare i legami di connessione poco sopra richiamati: in questi casi, infatti, è necessario valutare la efficacia, la estensione e la prontezza di risposta del sistema filtrante al particolare provvedimento adottato.

Tale valutazione, quando le velocità in gioco sono sufficientemente piccole, una volta definito il sistema liquido-mezzo poroso, può essere conseguita basandosi sulla relazione lineare di Darcy:

$$\vec{v} = k \nabla \varphi \quad (1)$$

In essa, \vec{v} e k rappresentano rispettivamente, la velocità (apparente) di filtrazione e la conducibilità idraulica ⁽¹⁾; φ è una funzione scalare detta potenziale del campo del vettore \vec{v} e, al pari di questo, è definito anche nei punti interni alla struttura solida del sistema.

Per un mezzo poroso saturo, interessato dal flusso di un liquido omogeneo pesante, il potenziale φ è costituito dalla somma del potenziale gravitazionale φ_g e del potenziale delle pressioni φ_p : espresso in termini di energia per unità di peso, esso assume le dimensioni di una lunghezza e viene a coincidere con il carico piezometrico apparente $(z + p/\gamma)$.

Nei punti interni al dominio spaziale Ω occupato dal liquido (incomprimibile) in moto molto lento, la (1), unitamente alla equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

(scritta per un mezzo poroso caratterizzato da microstruttura geometrica interna rigida), fornisce

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3)$$

⁽¹⁾ Se il mezzo poroso è isotropo, k è uno scalare; in presenza di anisotropia, k è un tensore doppio simmetrico e il vettore \vec{v} è dato dal prodotto del tensore k per il vettore $\nabla \varphi$ [6]. Nel seguito verranno considerati solo mezzi porosi isotropi.

La (3) indica che i moti dei liquidi filtranti rientrano nella vasta categoria dei fenomeni retti dalla equazione di Laplace e che la determinazione delle caratteristiche dinamiche (velocità e pressioni) nei diversi punti del dominio può essere ricondotta alla determinazione del potenziale φ compatibile con le condizioni vigenti sul contorno del dominio stesso.

Per individuare, dunque, un'unica soluzione della (3) è necessario associare ad essa le condizioni imposte lungo il contorno dell'ammasso filtrante.

In regime stazionario sulla parte di contorno costituita da linee di flusso, queste ultime si riducono a porre uguali a zero le componenti normali delle velocità (ovvero, equivalentemente, ad annullare la derivata normale di φ); lungo le superfici limite attraverso cui si perfeziona l'alimentazione del sistema, il potenziale φ deve assumere valore costante; lungo la superficie di sbocco, infine, occorre tener conto del fenomeno denominato dal De Marchi [3],[9] "sorgente sospesa".

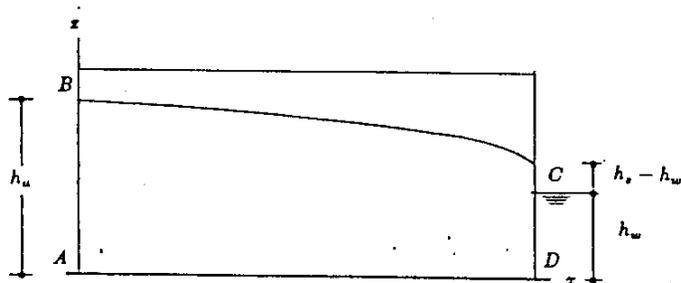


Fig.1 - Moto stazionario di filtrazione.

Con riferimento al caso di moto stazionario di filtrazione nel piano (x, z) - fig.1 - di una falda freatica delimitata inferiormente da un piano impermeabile orizzontale e da fronti estremi (di alimentazione e di sbocco) verticali, con i simboli di figura, le condizioni al contorno richiamate sono espresse analiticamente dalle seguenti relazioni:

• lungo il paramento di imbocco AB, per il tratto di altezza h_a :

$$\varphi = h_a \quad \text{ovvero :} \quad p = \gamma(h_a - z) \quad (4a)$$

• lungo il paramento di sbocco DC, per il tratto di altezza h_w :

$$\varphi = h_w \quad \text{ovvero :} \quad p = \gamma(h_w - z) \quad (4b)$$

e, per il tratto $(h_s - h_w)$ sede della sorgente sospesa:

$$\varphi = z \quad \text{ovvero :} \quad p = 0 \quad (4c)$$

lungo la linea di fondo (orizzontale) AD:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{ovvero :} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \quad (4d)$$

Più complessa è la condizione da imporre sulla superficie libera della falda: la sua posizione, infatti, non è nota a priori sicchè sarà necessario preliminarmente individuare ulteriori condizioni indipendenti atte a determinarla. Queste vengono definite, in genere, prescindendo dalla presenza della cosiddetta "frangia capillare" (immaginando cioè che un netto contorno separi lo spazio occupato dal liquido in movimento da quello soprastante), e ammettendo che, in ogni punto di tale contorno (coincidente peraltro con una linea di flusso, essendo il moto permanente), la pressione relativa sia nulla e che, in nessun punto esso possa essere attraversato da fluido.

Nel caso che si esamina (falda freatica poggiate su un letto impermeabile orizzontale) la prima condizione dà:

$$p = 0 \quad \text{ovvero :} \quad \varphi = h(x) \quad (4e)$$

(essendo $h(x)$ la quota del generico punto della superficie libera misurata a partire dal piano orizzontale impermeabile di sostegno della falda); la seconda condizione si traduce invece [8] nella:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \sin^2(nx) \quad (4f)$$

ovvero, equivalentemente, nella:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma \sin(nx) \cos(nx) \quad (4g)$$

avendo denotato con n la normale "esterna" (orientata, cioè, verso l'esterno del dominio occupato dal liquido in movimento) in ogni punto della linea libera.

In condizioni di moto vario il potenziale φ è funzione anche del tempo sicchè la sua determinazione, in ogni istante $t > t_0$ (con

t_0 istante da cui si inizia a contare il tempo) e in ogni punto del campo, richiede che siano definiti i confini geometrici del dominio Ω - e, in particolare, della linea libera - nonché le condizioni cui deve soddisfare φ su tali confini.

Tali condizioni possono essere definite agevolmente, in base a considerazioni fisiche analoghe a quelle esposte per il caso stazionario, sulle superfici impermeabili ed equipotenziali; sulla linea libera invece - la cui posizione varia continuamente nel tempo e non coincide pertanto con una linea di flusso - la (4f) - o la (4g) - andranno sostituite con la relazione (dedotta mediante l'equazione di continuità [12]):

$$\frac{\epsilon}{k} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (4h)$$

che rappresenta la equazione differenziale del moto della superficie libera della falda; in essa ϵ denota la porosità del mezzo assunta costante in Ω e indipendente dal tempo.

Soluzioni rigorose e complete per via analitica della (3), con le condizioni al contorno (e iniziali, per regime non stazionario) descritte, nella maggior parte dei casi di interesse applicativo, sono praticamente da escludere: si presenta, di conseguenza, come inevitabile il ricorso a metodi di calcolo approssimati basati, ordinariamente, sulla discretizzazione della equazione di campo o del dominio fisico.

Nell'applicazione di questi metodi, sia in regime stazionario che vario, la definizione della posizione della superficie libera della falda potrà essere determinata per approssimazioni successive [7].

Una semplificazione consistente del problema può essere ottenuta quando le variazioni di φ lungo la verticale sono modestissime (e conseguentemente modestissimo è il valore della componente verticale della velocità in ogni punto di Ω) e si possono considerare praticamente indipendenti dalla quota del punto considerato le componenti orizzontali della velocità di filtrazione (ipotesi di Dupuit-Forchheimer).

Con queste assunzioni la posizione:

$$\varphi(x, z, t) = h(x, t) \quad (5)$$

riuscendo valida non solo sulla superficie libera ma in tutti i punti del dominio Ω , consente di ricondurre il problema alla determinazione della sola funzione $h(x, t)$.

Infatti, dalla (3), si ha:

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz = - \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz$$

ma:

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad ; \quad \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz = h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

onde:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (6)$$

Introdotta la (6) nella (4h) otteniamo, in definitiva:

$$\frac{\epsilon}{k} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (7)$$

La (7) rappresenta non solo la condizione da imporre sulla superficie libera della falda bensì, come anticipato, anche l'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive il processo di moto vario allo studio; essa può essere facilmente generalizzata per il caso di moto vario di una falda freatica poggiante su un piano impermeabile inclinato dell'angolo α sull'orizzontale (fig.2).

Posto infatti:

$$\varphi(x, z, t) = z_f(x) + h(x; t) \quad (8)$$

(essendo $z_f(x)$ la quota del generico punto appartenente al piano di sostegno e $h(x, t)$ la quota del pelo libero della falda misurata verticalmente a partire dallo stesso piano) dalla (3) discende

$$\int_{z_f}^{z_f+h} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz = - \int_{z_f}^{z_f+h} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dz$$

e quindi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (9)$$

Introdotta la (9) nella (4h), posto $i_f = -\frac{dz_f}{dx}$, si ha:

$$\frac{\epsilon}{k} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) - i_f \frac{\partial h}{\partial x} \quad (10)$$

La (10) è la nota equazione di Boussinesq [2]: essa implica che le sezioni trasversali della falda possono essere considerate piane e che i filetti liquidi, in cui è possibile scomporre la massa fluida in movimento, sono sensibilmente paralleli alla retta di fondo.

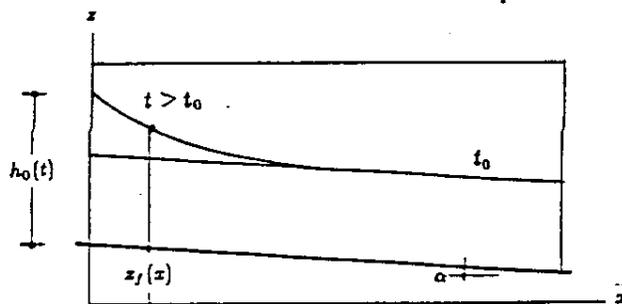


Fig.2 - Falda su piano di sostegno inclinato.

Per valori della pendenza $i_f \neq 0$, lo spessore effettivo della falda, misurato secondo la normale al fondo stesso, differisce dal valore di h misurato secondo la verticale della quantità $\Delta h = h\sqrt{1 - i_f^2}$; lo scostamento percentuale $\Delta h/h$ assume valori dell'ordine di 0.001 quando $i_f = 4.5\%$ e valori dello 1% quando i_f è pari al 14% [4]: pendenza questa non frequente nelle situazioni pratiche.

Ciò comporta, come ulteriore semplificazione, la possibilità di considerare le sezioni trasversali della falda, oltre che piane, verticali e di esprimere la portata q , in un generico istante e in una generica sezione trasversale, nella forma ⁽²⁾ :

$$q = -kh \left(\frac{\partial h}{\partial x} - i_f \right) \quad (10a)$$

Alla (10) conviene dare una forma diversa, più comoda ai fini dell'esame e della discussione di alcuni fenomeni cui faremo cenno

⁽²⁾ Nella (10a) la quantità $i_f - \partial h/\partial x$ rappresenta la "cadente piezometrica": essa, per piccoli valori di i_f , coincide con l'inclinazione della superficie freatica sull'orizzontale.

nel seguito: posto, allo scopo, genericamente in essa:

$$D(h) = \frac{k}{\epsilon} h \quad ; \quad K(h) = i_f \frac{k}{\epsilon} h \quad (11a)$$

e osservato che:

$$\frac{dK(h)}{dh} = i_f \frac{k}{\epsilon} = C_0 \quad (11b)$$

la (10) viene formalmente a coincidere con la "equazione della diffusione":

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] - C_0 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (12)$$

a sua volta, completamente analoga alla "equazione della conduzione termica" ⁽³⁾.

La (12) è un'equazione differenziale, quasi lineare, di tipo parabolico - con coefficiente $D(h)$ funzione lineare di h e coefficiente $C_0 = i_f k/\epsilon$ costante per il caso di processi di filtrazione in mezzi porosi saturi - la cui soluzione, per fissate condizioni iniziali e al contorno, può essere ottenuta solo con l'ausilio del calcolo numerico.

Le condizioni iniziali (all'istante t_0 assunto come origine dei tempi) per la funzione $h(x, t)$ vengono usualmente assegnate nella forma:

$$h(x, t_0) = f(x)$$

con $x \in [0, l]$ e $f(x)$ funzione nota generalmente continua; le condizioni agli estremi $x = 0$ e $x = l$, ordinariamente, vengono assegnate in relazione ai regimi temporali ivi imposti alla funzione $h(x, t)$, o alla sua derivata, o alla relazione tra la funzione stessa e la sua derivata. Naturalmente agli estremi del dominio possono prevedersi combinazioni diverse di queste condizioni sicchè, anche limitando ad esse lo studio dei processi di moto vario retti dalla (12), il numero di casi di esaminare diviene notevolmente grande.

Le condizioni richiamate si riferiscono a domini "limitati" di lunghezza l ; quando l assume valori tali che gli effetti indotti dalle condizioni imposte ad un estremo (per esempio l'estremo $x = 0$) non si risentono in misura apprezzabile - almeno per tutti gli istanti t compresi nell'intervallo di tempo durante il quale si studia il processo

⁽³⁾ Allorchè il coefficiente k non è costante ma, come avviene nei processi di filtrazione nei mezzi non saturi, è funzione della pressione della fase liquida, il termine C_0 diviene funzione di h .

di moto - nelle zone in cui la funzione h è determinata dalle sole condizioni iniziali, sarà lecito supporre il dominio "illimitato da un lato" ed ammettere che la variabile spaziale possa assumere tutti i valori $x \in [0, \infty[$.

Questa situazione rappresenta un caso "degenere" dei problemi ai limiti; un altro caso degenere, di notevole portata applicativa, si ha quando possono essere trascurate, ai fini dello studio, le condizioni iniziali ("problemi ai limiti senza condizioni iniziali"): questa circostanza si verifica ogni volta che l'istante t in corrispondenza del quale interessa conoscere la funzione $h(x, t)$ è tanto lontano da quella iniziale t_0 da poter ritenere che la distribuzione delle h sia determinata dalle sole condizioni al contorno.

Per superare gli ostacoli analitici che si frappongono alla soluzione in termini finiti della (12), basterà sostituire in essa, alla funzione $D(h)$ un valore D_0 costante opportunamente scelto: con tale posizione, infatti, essa si semplifica nella equazione linearizzata (a coefficienti costanti):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - C_0 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (13)$$

ovvero, nel caso di falda poggiate su piano di sostegno orizzontale ($i_f = 0$ e quindi $C_0 = 0$), nella

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (14)$$

per le cui soluzioni è possibile avvalersi di metodi noti nel campo della fisica matematica.

E' evidente che la (13) e la (14) sono aderenti alla realtà del fenomeno di moto vario che si studia solo se possono ritenersi verificate le ipotesi poste a base del procedimento di linearizzazione: quando ciò non avviene, le approssimazioni introdotte possono conferire ai risultati dei calcoli significato di semplice orientamento. Tuttavia, anche per questi casi, le soluzioni analitiche delle (13) e (14) si presentano come un mezzo prezioso - e, sovente, insostituibile - per la messa a punto di procedimenti numerici e per il controllo delle relative soluzioni.

2. - PROCEDIMENTI DI CALCOLO.

I procedimenti di calcolo per la risoluzione delle equazioni richiamate, quando la $h(x, t)$ è definita nel dominio limitato $x \in [0, l]$, sono sufficientemente noti; per domini illimitati da un lato - $x \in [0, \infty[$ - o per domini illimitati da entrambi i lati - $x \in]-\infty, +\infty[$ -, tali schemi di risoluzione devono essere opportunamente modificati anche in relazione alle condizioni iniziali e al contorno assegnate.

Per inquadrare questi schemi è comodo riferirsi al caso semplice di una falda freatica (*fig.3*) in quiete entro un ammasso poroso omogeneo ed isotropo nei riguardi della conducibilità k , poggiante su un piano di sostegno impermeabile, orizzontale, limitato da un lato da una parete verticale permeabile per tutta l'altezza ("fronte di alimentazione").

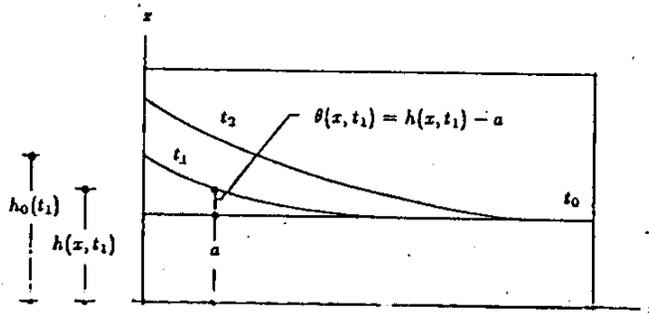


Fig.3 - Andamento a carattere qualitativo dei profili superficiali della falda in istanti diversi.

Si riferisca il sistema ad una coppia di assi cartesiani ortogonali avente l'asse x orizzontale e l'asse z verticale e diretto verso l'alto; la lunghezza dell'ammasso sia indefinita nel campo delle ascisse x positive; si indichi altresì con "a" lo spessore iniziale della falda e si assuma infine unitaria la larghezza dello strato permeabile nella direzione perpendicolare al piano x, z .

Si supponga ora che, nel sistema così definito e all'istante $t_0 = 0$ assunto come origine dei tempi, in corrispondenza del fronte di alimentazione ($x = 0$) venga immessa una portata q costante.

In tale situazione, al trascorrere del tempo, il livello idrico all'ascissa $x = 0$ si innalza progressivamente e, contemporaneamente, il

profilo superficiale si solleva e tende asintoticamente al profilo orizzontale della falda.

Nella *fig.3*, a titolo d'esempio, sono riportati i profili di pelo libero della falda nei due istanti t_1 e t_2 successivi; dalla stessa figura è immediato evincere la condizione iniziale:

$$h(x, 0) = h_0 = a \quad (15)$$

e la condizione all'ascissa $x \rightarrow \infty, \forall t > 0$:

$$h(\infty, t) = a \quad (16)$$

Più complessa è la condizione da imporre all'ascissa $x = 0$: qui infatti, è assegnato il valore della portata q immessa: a norma della legge di Darcy, tenuto conto delle ipotesi di Dupuit-Forchheimer, tale portata, è data da:

$$q(0, t) = -kh(0, t) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (17)$$

La (17) è non lineare; tuttavia, se nello spirito delle approssimazioni fino ad ora adottate, si ammette che i sopraelevamenti $\theta = [h(x, t) - a]$ del pelo libero siano in ogni istante t e per ogni x (e in particolare per $x = 0$) piccoli in confronto ad a , posto $q_0 = q(0, t)$, sarà lecito approssimare la (17) con la:

$$q_0 = -ka \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_0 \quad (18)$$

Con questa posizione il problema si riporta a trovare una funzione $h(x, t)$ tale che la sua derivata nella direzione della normale al contorno $x = 0$ si riduca, ivi, ad una funzione (in particolare, ad una costante) assegnata (problema di Neumann).

Un semplice artificio consente peraltro di ricondurre il problema posto alla determinazione di una nuova funzione nel dominio $[0, \infty[$ che, al contorno $x = 0$ assume un valore prefissato (problema di Dirichlet).

Infatti, se si derivano il primo e secondo membro della (14) rispetto a x , tenuto conto della approssimazione $q(x, t) = -ka\partial h/\partial x$, con passaggi immediati si deduce:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad (19)$$

Per essa le condizioni iniziali e al contorno si scrivono:

$$q(x, 0) = 0 \quad (20)$$

$$q(\infty, t) = 0 \quad (21)$$

$$q(0, t) = q_0 \quad (22)$$

La soluzione della (19) con le (20), (21) e (22), può essere trovata agevolmente avvalendosi del cambiamento di variabile (trasformazione di Boltzmann):

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad (23)$$

Infatti, introdotta la (23) nella (19), questa si trasforma nella equazione differenziale ordinaria, del secondo ordine, omogenea a coefficienti variabili:

$$\frac{d^2 q}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2D_0} \frac{dq}{d\xi} = 0 \quad (24)$$

che con le condizioni iniziali e al contorno, a loro volta specializzate nelle:

$$q(\xi = 0) = q_0$$

$$q(\xi \rightarrow \infty) = 0$$

ammette l'integrale particolare:

$$q(\xi) = q_0 \operatorname{erfc} \frac{\xi}{2\sqrt{D_0}} \quad (25)$$

in cui $\operatorname{erfc}(\cdot)$ è la funzione complementare di Gauss.

La (25), scritta in termini di x e t diviene:

$$q(x, t) = q_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{D_0 t}} \quad (26)$$

ovvero, quando la condizione in $x = 0$ è fissata all'istante $t_0 \neq 0$:

$$q(x, t) = q_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{D_0(t - t_0)}} \quad (27)$$

Quest'ultima, tenuto conto che è anche : $q(x, t) = -ka\partial h/\partial x$ consente la determinazione della funzione cercata $h(x, t)$. Indicata, infatti, al solito, con $\theta(x, t)$ la differenza $h(x, t) - a$, risulta:

$$\theta(x, t) = 2\sqrt{D_0 t} \frac{q_0}{ka} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{D_0 t}} \quad (28)$$

dove

$$\operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{D_0 t}} = \int_{\frac{x}{2\sqrt{D_0 t}}}^{\infty} \operatorname{erfc} \alpha d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} - \alpha \operatorname{erfc} \alpha$$

è l'integrale della funzione complementare degli errori.

Della soluzione (26) ci si può avvalere anche per la ricerca dell'andamento della funzione $h(x, t)$ determinata dall'immissione, in $x = 0$, di una portata $q(0, t)$ variabile in modo generico con il tempo.

Per illustrare le modalità della sua utilizzazione è conveniente riferirsi al caso in cui la funzione $q(0, t)$, in $x = 0$, abbia l'andamento di un "impulso rettangolare", ossia:

$$q(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t_0 \\ q_0 & \text{per } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{per } t > t_1 \end{cases}$$

Posto, per semplicità di scrittura:

$$g(x, t - t_0) = \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{D_0(t - t_0)}}$$

tenuto conto della (27) risulta, $\forall t \geq t_1$:

$$q(x, t) = q_0 [g(x, t - t_0) - g(x, t - t_1)] \quad (29)$$

e

$$\theta(x, t) = 2\sqrt{D_0} \frac{q_0}{ka} [\sqrt{t - t_0} \operatorname{ierfc} \alpha_0 - \sqrt{t - t_1} \operatorname{ierfc} \alpha_1] \quad (30)$$

Allorchè la $q(0, t)$ è assegnata in forma generica, sarà lecito scomporla nella seguente serie di impulsi rettangolari:

$$q(0, t) = \begin{cases} q_0 & \text{per } t_0 < t \leq t_1 \\ q_1 & \text{per } t_1 < t \leq t_2 \\ \vdots & \\ q_{n-1} & \text{per } t_{n-1} < t \leq t_n \end{cases}$$

sicchè, in analogia a quanto esposto per il caso di un impulso rettangolare unico, si ha, per il primo impulso:

$$q(x, t) = q_0 [g(x, t - t_0) - g(x, t - t_1)]$$

per il secondo impulso:

$$q(x, t) = q_0 [g(x, t - t_0) - g(x, t - t_1)] + q_1 [g(x, t - t_1) - g(x, t - t_2)]$$

e quindi, generalizzando:

$$q(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} q_i [g(x, t - t_i) - g(x, t - t_{i+1})] \quad (31)$$

da cui, infine:

$$\theta(x, t) = \frac{2}{ka} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{D_0} q_i [\sqrt{t - t_i} \operatorname{ierfc} \alpha_i - \sqrt{t - t_{i+1}} \operatorname{ierfc} \alpha_{i+1}] \quad (32)$$

Il procedimento descritto può essere generalizzato per lo studio dei processi di moto retti dalla (13).

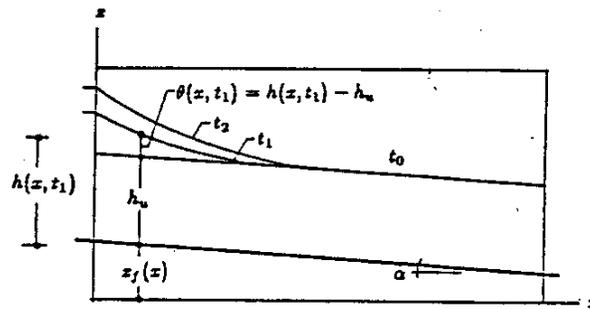


Fig.4 - Andamento a carattere qualitativo dei profili superficiali della falda in istanti diversi.

A tale scopo si prenda in esame, per fissare le idee, il caso semplice di una falda freatica (fig.4) in moto uniforme (caratterizzato

da altezza idrica h_u e portata q_u costanti) entro un ammasso poroso omogeneo ed isotropo nei riguardi della conducibilità k , poggiante su un piano di sostegno impermeabile, inclinato di i_f sull'orizzontale, limitato da un lato da un fronte di alimentazione".

Si riferisca il sistema ad una coppia di assi cartesiani ortogonali avente l'asse x orizzontale e l'asse z verticale e diretto verso l'alto; la lunghezza dell'ammasso sia indefinita nel campo delle ascisse x positive.

Si assuma infine unitaria la larghezza dello strato permeabile nella direzione perpendicolare al piano x, z

Con riferimento ai simboli riportati in figura è immediato evincere la condizione iniziale:

$$h(x, 0) = h_u \quad (33)$$

e la condizione all'ascissa $x \rightarrow \infty, \forall t > 0$:

$$h(\infty, t) = h_u \quad (34)$$

All'ascissa $x = 0$ è assegnato il valore della portata q_0 immessa: a norma della legge di Darcy, tenuto conto delle ipotesi di Dupuit-Forchheimer, tale portata è data da:

$$q(0, t) = kh(0, t) \left(i_f - \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=0}$$

ovvero, nello spirito delle approssimazioni fino ad ora adottate, da:

$$q_0 = kh_u \left(i_f - \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (35)$$

In perfetta analogia a come operato per il caso di falda orizzontale, la (13) si trasforma nella:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - C_0 \frac{\partial q}{\partial x} \quad (36)$$

per la quale le condizioni iniziali e al contorno si scrivono:

$$q(x, 0) = q_u \quad (37)$$

$$q(\infty, t) = q_u \quad (38)$$

$$q(0, t) = q_0 \quad (39)$$

Per la risoluzione della (36) con le (37), (38) e (39) poniamo:

$$q(x, t) = w(x, t) \exp \left[\frac{C_0 x}{2D_0} - \frac{C_0^2 t}{4D_0} \right] \quad (40)$$

in cui $w(x, t)$ è funzione incognita da determinare.

In base ad essa la (36) si riduce all'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di tipo parabolico:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (41)$$

mentre le condizioni iniziali e al contorno fissate per la $q(x, t)$ risultano modificate. In particolare, la condizione iniziale, sarà espressa da :

$$w(x, 0) = C_0 \exp \left(-\frac{C_0 x}{2D_0} \right) = f(x) \quad (42)$$

la condizione all'estremo $x \rightarrow \infty$, - espressa dalla (38) - e quella all'estremo $x = 0$ - espressa dalla (39) - , diventeranno rispettivamente, $\forall t > 0$:

$$w(\infty, t) = 0 \quad (43)$$

$$w(0, t) = q_0 \exp \left(\frac{C_0^2 t}{4D_0} \right) = p(t) \quad (44)$$

La (44) mostra che, la condizione per la $w(x, t)$ all'estremo $x = 0$ diviene funzione del tempo anche quando il valore q_0 che figura nella (39) è costante.

La soluzione dell'equazione lineare (41), con le condizioni (42), (43) e (44) potrà essere ricercata spezzando la funzione incognita nella somma:

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t) \quad (45)$$

in cui $w_1(x, t)$ è soluzione della:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad (46)$$

soggetta alle condizioni:

$$w_1(x, 0) = f(x) \quad (47)$$

$$w_1(0, t) = 0 \quad ; \quad w_1(\infty, t) = 0 \quad (48)$$

mentre la $w_2(x, t)$ è soluzione della

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad (49)$$

soggetta alle condizioni:

$$w_2(x, 0) = 0 \quad (50)$$

$$w_2(0, t) = p(t) \quad ; \quad w_2(\infty, t) = 0 \quad (51)$$

La soluzione della (46) con le condizioni iniziali e al contorno assegnate, è nota [5],[11] ed è fornita dall'integrale:

$$w_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_0 t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D_0 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D_0 t}} \right) f(\xi) d\xi \quad (52)$$

La soluzione della (49) è invece, come già mostrato, fornita da:

$$w_2(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} p[g(x, t-t_i) - g(x, t-t_{i+1})] + p_{n-1}g(x, t_n - t_{n-1}) \quad (53)$$

(in cui $g(x, t - t_i) = \text{erfc}(x/(2\sqrt{D_0(t - t_i)}))$) ottenuta schematizzando la $p(t)$ con la funzione a gradini:

$$p(t) = \begin{cases} p_0 & \text{per } t_0 < t \leq t_1 = t_0 + \Delta t \\ p_1 & \text{per } t_1 < t \leq t_2 = t_1 + \Delta t \\ \vdots & \\ p_{n-1} & \text{per } t_{n-1} < t \leq t_n = t_{n-1} + \Delta t \end{cases}$$

dove si è indicato, al solito, con $\Delta t = (t_n - t_0)/n$ - essendo n il numero di parti in cui è diviso l'intervallo $(t_n - t_0)$ - l'ampiezza del gradino.

Tenuto conto della posizione (57) si ha:

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_0 t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D_0 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4D_0 t}} \right) f(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-2} p_i [g(x, t - t_i) - g(x, t - t_{i+1})] + p_{n-1} g(x, t_n - t_{n-1}) \quad (54)$$

Questa, in base alla (40), consente la definizione della $q(x, t)$, da cui si risale per integrazione alla $h(x, t)$.

Naturalmente nulla muta nel procedimento descritto se l'ammasso filtrante si estende indefinitamente nella direzione delle x negative: basterà, in tal caso, introdurre nelle relazioni trovate la trasformazione di variabili $x_1 = -x$.

3. - ESEMPI DI APPLICAZIONI E CONCLUSIONI.

La (54) è stata applicata ⁽⁴⁾ per lo studio delle situazioni illustrate nelle figg. 5a, b, c, d.

Nella fig. 5a. in particolare, sono diagrammati i valori assunti dalla funzione $\theta(x, t)$ - relativi ad una falda freatica defluente entro un ammasso poroso caratterizzato dai coefficienti $k = 3.6m/ora$ e $\epsilon = 0.15$, che poggia su un piano di sostegno impermeabile declive nel senso del moto ($i_f = .004$) e indefinitamente esteso nel dominio $x \in [0, \infty[$ - per effetto della immissione della portata costante $q_0 = 3.6m^3/ora/m$ in corrispondenza del fronte di alimentazione posto all'ascissa $x = 0$.

In condizioni di regime la falda è sede di un moto uniforme di portata $q_u = ki_f h_u = 1.44m^3/ora/m$ e altezza $h_u = 100m$.

Dall'esame della fig. 5a si rileva che, in ogni istante $t > 0$, la $\partial\theta/\partial x$ è sempre negativa, e tende a zero per $x \rightarrow \infty$; corrispondentemente l'altezza h è sempre maggiore dell'altezza di moto uniforme e tende ad essa per $x \rightarrow \infty$: ciò indica che, in ogni sezione della falda, in regime di moto vario, defluisce una portata - sempre superiore a quella corrispondente al regime di moto uniforme - che

⁽⁴⁾ Nei calcoli è stato scelto, per D_0 il valore kh_u/ϵ .

tende ad assumere il valore q_u all'ascissa $x \rightarrow \infty$ ove $\partial\theta/\partial x \rightarrow 0$ e $\partial h/\partial x \rightarrow i_f$.

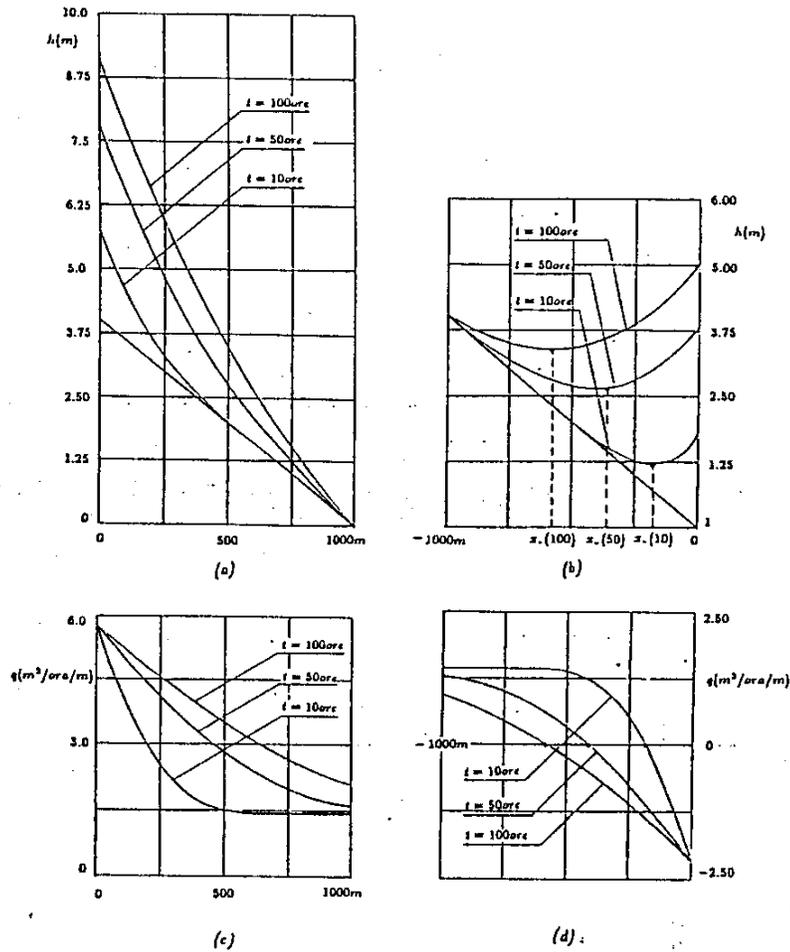


Fig.5- (a,b) -Escursioni del profilo superficiale della falda in istanti successivi per immissione di portata costante all'ascissa $x=0$.
 (c,d) - Valori della portata $q(x)$ in istanti successivi.

Quest'ultima circostanza è posta espressivamente in evidenza

nella fig.5c dove sono riportati i valori assunti dalla portata lungo la direzione del moto, durante la fase di ravvenamento.

Nella fig.5b sono invece illustrate le situazioni che vengono a determinarsi nella stessa falda quando questa si estende nel dominio $]-\infty, 0]$ ed è alimentata dalla portata $q_0 = 3.6m^3/ora/m$ all'ascissa $x = 0$.

Da essa si evince che che la $\partial\theta/\partial x$ a monte del fronte di alimentazione è positiva e, almeno per il caso che si esamina, in prossimità di detto fronte risulta maggiore di i_f : ciò sta ad indicare la esistenza di un moto retrogrado rispetto a quello corrispondente alle condizioni di moto uniforme; procedendo verso monte la $\partial\theta/\partial x$ diminuisce fino ad assumere il valore $\partial\theta/\partial x = i_f$ nella sezione di ascissa x_* dove la portata q della falda si annulla; a monte di x_* il moto è diretto verso valle ($i_f > \partial\theta/\partial x$) e la portata q , corrispondentemente, cresce fino ad assumere il valore q_u all'ascissa $x \rightarrow -\infty$ in cui è $\partial\theta/\partial x \rightarrow 0$ e $\partial h/\partial x \rightarrow i_f$.

Anche queste circostanze risultano chiaramente evidenziate nella fig.6b dove sono riportati i valori della $q(x)$ in diversi istanti $t > 0$.

La validità dei risultati ottenuti può essere accertata confrontando i profili istantanei della falda dedotti per via teorica con quelli ottenuti sperimentalmente su modelli di filtri realizzati con una apparecchiatura alla "Hele-Shaw", che si presta particolarmente bene per lo studio dei moti vari nelle falde [10].

Il dispositivo sperimentale, in dotazione presso il Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, delle Acque e del Terreno della Università di L'Aquila, consiste essenzialmente di quattro vetri a specchio a facce perfettamente piane e trasparenti che delimitano tre intercapedini parallele e verticali, ciascuna di spessore costante.

La presenza delle due intercapedini laterali evita che, durante le prove, si verifichino apprezzabili deformazioni dei vetri che delimitano la intercapedine centrale costituente il "campo di misura".

Quale liquido filtrante viene impiegato olio minerale non additivato di viscosità tale che il regime del moto si mantenga regolare anche in intercapedini il cui spessore consente di ridurre a entità trascurabile l'influenza delle forze capillari.

Nel corso di ogni prova si procede alla registrazione fotografica

dei profili assunti dal contorno superiore della falda in istanti successivi.

Prove sull'apparecchiatura descritta sono attualmente in corso. A titolo di esempio nella *fig.6a* sono consegnati i risultati relativi al caso di moto vario indotto in una falda freatica - caratterizzata da coefficiente $k=0.867$ cm/s e $\epsilon = 1$, poggiante su un piano impermeabile inclinato di $i_f = 0.03511$ sull'orizzontale, inizialmente animata di moto uniforme ($h_u = 16$ cm) - quando questa viene alimentata, in corrispondenza del fronte di alimentazione, con una portata q_0 variabile con legge assegnata (*fig.6b*).

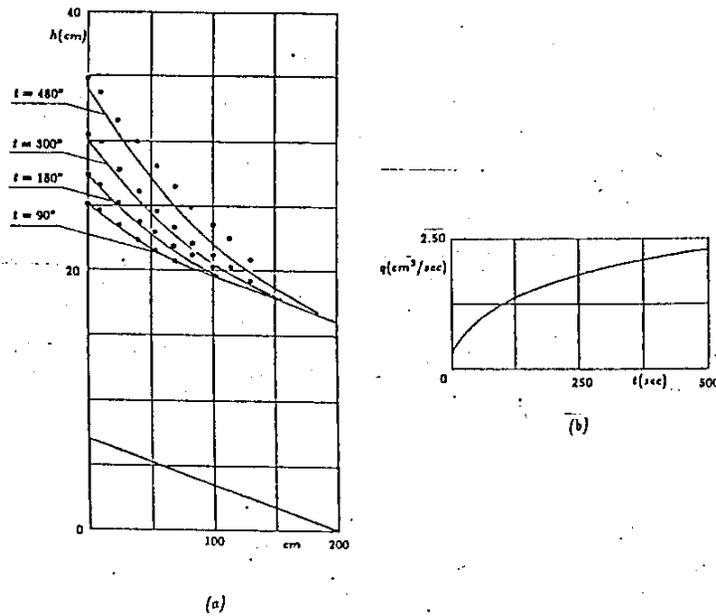


Fig.6 - (a) Profili superficiali relativi ad istanti successivi.
 (b) Valori della portata q all'ascissa $x=0$ in istanti successivi.

Nella figura sono riportati i profili teorici (linea a tratto con-

tinuo) e i punti sperimentali (contrassegnati con un cerchietto annerito).

Dall'esame dei risultati sperimentali si rileva che, per valori dell'altezza $h(0,t)$ della falda in corrispondenza del fronte di alimentazione minori di $1.45h_u$, gli scarti tra i valori teorici e quelli sperimentali raggiungono al più l'ordine del 2.5%.

Gli scarti via via più accentuati che si evidenziano a maggiori valori di $h(0,t)$ derivano, in larga misura, dal contemporaneo venir meno sia delle ipotesi di Dupuit-Forchheimer che della validità delle approssimazioni poste a base del procedimento di linearizzazione della (12) e della condizione (17): in particolare, per $h(0,t) = 1.73h_u$, lo scarto all'ascissa $x = 0$ risulta dell'ordine del 6%.

Almeno per il campo dei valori indagati, dunque, il procedimento esposto può essere giudicato di concreta utilità anche per valutazioni quantitative circa la efficacia, la estensione e la prontezza di risposta del sistema filtrante ad interventi di ravvenamento di falde.

SOMMARIO.- Viene esaminato il fenomeno di moto vario che si instaura in una falda freatica per effetto della immissione, con modalità assegnate, di volumi idrici in una trincea che interessa tutto lo spessore della falda fino al piano impermeabile di sostegno.

Vengono dedotte soluzioni analitiche dell'equazione linearizzata del moto gradualmente vario la cui validità viene accertata confrontando i profili istantanei della falda dedotti per via teorica con quelli ottenuti sperimentalmente su modelli di filtri realizzati con apparecchiature alla "Hele-Shaw".

BIBLIOGRAFIA

- [1] Arredi F., *Costruzioni e impianti idraulici*, Vol.I, Principato Ed., 1947.
- [2] Boussinesq M.J., *Essai sur la theorie des eaux courantes*, Mem.Acad.Sci., 1877.
- [3] De Marchi G., *Idraulica*, Hoepli Ed..
- [4] De Marchi G., *Sul cambiamento di regime di una corrente lineare a pelo libero in un alveo di sezione costante*, L'Energia Elettrica, Vol.XXVII, 1950.
- [5] Eckert E.R.G., *Analysis of heat and mass transfer*, McGraw-Hill International Book Company.
- [6] Marchi E., Rubatta A., *Meccanica dei fluidi*, UTET.
- [7] Nosedà G., *Applicazione del metodo di "relaxation", a un caso di moto vario di filtrazione*, Atti del Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Palermo,

1961.

- [8] Remson I., Hornemberg G.M., Moltz F.I. Numerical Methods in Subsurface Hydrology, J.Wiley and S.in.
- [9] Russo Spena Andrea, Su alcune caratteristiche del fenomeno di sbocco da falde freatiche, Atti dell'Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Napoli, 1956.
- [10] Russo Spena Andrea, Moti filtranti a superficie libera in presenza di capillarità, L'Energia Elettrica, n.12, 1954.
- [11] Russo Spena A., Processi di moto vario di correnti a superficie libera, Appunti delle lezioni del Corso di Tecnica della bonifica, L'Aquila, 1987.
- [12] Schneebely G., Hydraulique Souterraine, Eyrolles ed. Paris.

Indice del fascicolo

- Funzioni di costo minimo e di ricavo massimo come coniugate
parziali della funzione di profitto e conseguenze.
(Ilio Adorisio e Luigia Berardi) pag. 1
- Il problema della protezione dell'informazione, I :
cenni storici e metodi statistici per la decrittazione
di sistemi di cifratura classici.
(Emilio Ambrisi e Franco Eugeni) pag. 15
- Geometric Authentication Systems.
(Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum) pag. 39
- Qualche riflessione sull'utilità attesa
(Erio Castagnoli) pag. 51
- Interpretazione dei risultati di un campionamento statistico
con approccio bayesiano: simulazione su calcolatore.
(Vittorio Colagrande e Giuseppe Di Biase) pag. 61
- Studio analitico di un modello matematico per le strutture
in muratura.
(Giuseppe Di Biase e Antonio Maturo) pag. 73
- Un'indagine sull'uso dei sistemi di lettura (codici a barre)
nel settore del commercio.
(Giovanni Ippoliti, Domenico Marconi e Giovanni Mataloni) pag. 83
- Numeri pseudocasuali ottenuti a partire da successioni in
algebre finite su Z_m .
(Antonio Maturo) pag. 103
- Analisi crittografica e ricerca scientifica.
(Giovanni Moro) pag. 121
- Di tassi e di tasse.
(Lorenzo Peccati) pag. 133
- Sulla integrazione della equazione semplificata del moto
vario di una falda freatica.
(Aniello Russo Spena e Maria Teresa Todisco) pag. 139

**Finito di stampare il 18.07.1990 presso il
Dipartimento di Scienze e Storia dell'Architettura
della Facoltà di Architettura
dell'Università "G. D'Annunzio" di Chieti.**

L'uso della testata è stato concesso dal prof. Franco Eugeni.

Copia adibita a scopi scientifici e fuori commercio.