

ISSN 2282-7765

ISSN 2282-7757

[online]

[printed]

Volume 6, Number 2, December 2018

Science & Philosophy

Journal of Epistemology, Science and Philosophy

Chief Editors

Franco Eugeni

Fabrizio Maturo

Managing Editor

Fabio Manuppella

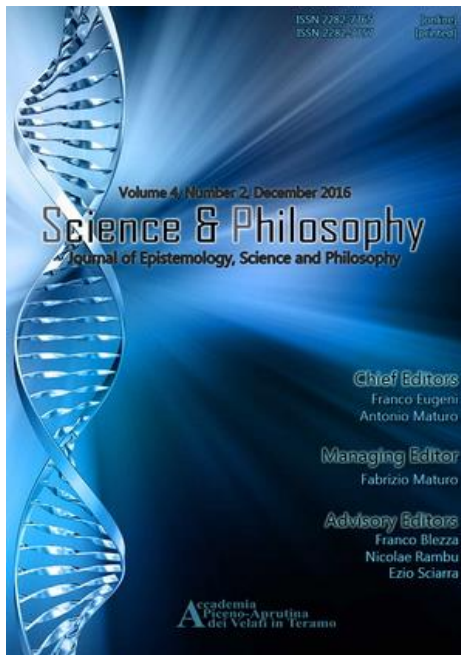
Advisory Editors

Franco Blezza

Nicolae Rambu

Ezio Sciarra

Accademia
Piceno-Aprutina
dei Velati in Teramo



Chief Editors

Eugeni Franco, Teramo, Italy
Maturo Antonio, Pescara, Italy

Advisory Editors

Bleza Franco, Chieti, Italy
Râmbu Nicolae, Iasi, Romania
Sciarra Ezio, Chieti, Italy

Managing Editor

Maturo Fabrizio, Pescara, Italy

Editorial Board

Ambrisi Emilio, Caserta, Italy
Anatriello Giuseppina, Naples, Italy
Arribas Jose Maria, Madrid, Spain
Bleza Franco, Chieti, Italy
Callejo Gallego Manuel Javier, Madrid, Spain
Casolaro Ferdinando, Naples, Italy
Chitoiu Dan, Iasi, Romania
Cimagalli Folco, Rome, Italy
Ciprian Alecu, Iasi, Romania
Corsi Vincenzo, Pescara, Italy
Corsini Piergiulio, Udine, Italy
Cruz Rambaud Salvador, Almeria, Spain
Daniela-Tatiana Soitu, Iasi, Romania
Deriu Fiorenza, Rome, Italy
Di Francesco Gabriele, Pescara, Italy
Figueiredo Elisabete, Vila Real, Portugal
Gardaphe Frederick, NY, USA
Gatto Romano, Potenza, Italy
Gavrilă Mihaela, Rome, Italy
Gerla Giangiacomo, Salerno, Italy
Hošková-Mayerová Šárka, Brno, Czech Republic
Kalanov, Temur, Tashkent, Uzbekistan
Innamorati Stefano, L'Aquila, Italy
Ispas Cristina, Resita, Romania
Lissner Jonah, Athens, Greece
Madureira Livia, Portugal

Malizia Pierfranco, Rome, Italy
Marconi Domenico, Teramo, Italy
Markovic Ljiljana, Belgrade, Serbia
Marradi Alberto, Florence, Italy
Maturo Antonio, Pescara, Italy
Maturo Fabrizio, Pescara, Italy
Migliorato Renato, Messina, Italy
Montesperelli Paolo, Rome, Italy
Nicotra Luca, Rome, Italy
Paone Fiorella, Chieti, Italy
Petrovic Mina, Belgrade, Serbia
Râmbu Nicolae, Iasi, Romania
Rosati Norton Delfico Mauro, London-Florence, UK-Italy
Rotondo Paolo, Pescara, Italy
Ruggiero Christian, Rome, Italy
Savarese Elisa, Castellammare, Italy
Sciarra Ezio, Chieti, Italy
Sessa Salvatore, Naples, Italy
Sideri Daniela, Pescara, Italy
Squillante Massimo, Benevento, Italy
Tofan Ioan Alexandru, Iasi, Romania
Ventre Aldo Giuseppe Saverio, Naples, Italy
Veraldi Roberto, Pescara, Italy
Viglioglia Maria Teresa, Melfi, Italy
Vincenzi Giovanni, Salerno, Italy
Vougiuklis Thomas, Alexandroupolis, Greece
Vranes Aleksandra, Belgrade, Serbia
Yalap Hakan, Nevsehir, Turkey

Editorial Manager and Webmaster

Manuppella Giuseppe

Graphic project (Progetto grafico)

Manuppella Fabio

Legal Manager

Di Domenico Bruna

Publisher

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo
(A.P.A.V.)

Note

All manuscripts are subjected to a blind review process. The reviewers are mainly selected from the editorial board. The journal's policies are described at: <http://eiris.it/ojs/index.php/scienceandphilosophy/about/submissions#authorGuidelines>

Understanding Scientific Inquiry

Peter J. Veazie¹

Received: 14-11-2018. Accepted: 16-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.437

©Peter Veazie



Abstract

Science is a process of inquiry: a process of asking and answering questions. However, a good question is more than an interrogatory, and a good answer is more than information: there are logical constraints that dictate when a question is answerable and what qualifies as an answer. This paper will provide an understanding of (1) when a question is answerable, (2) when a question is not ready to be asked, (3) when a question is trivial, (4) what is required for a response to be an answer, and (5) what sequence of inquiry is required to identify an answer. Equipped with this understanding, a scientist can better determine an appropriate sequence of study for a research program as well as identify the necessary arguments to warrant claims of understanding, funding, and the publication of research findings.

Keywords: Erotetics; research questions; research philosophy.

¹ University of Rochester, Rochester New York, USA
peter_veazie@urmc.rochester.edu

1 Introduction

A scientist answers questions. To do this well requires an understanding of what is a good question and a good answer, which in turn requires understanding the logic of inquiry. This paper will explain key properties of questions and answers that constrain research and guide research programs thereby clarifying requirements for questions, answers, necessary preliminary work, and possible future research. Note, this article regards applied philosophical issues, it does not address the psychology or empirical requirements of scientific inquiry.

There are various approaches to the logic of questions and answers in the linguistics and philosophy literatures (formally called erotetics). For information on some approaches see the references by Scha and Wiśniewski (Scha, 1983, Wiśniewski, 1995). However, Rescher's book *Inquiry Dynamics* (Rescher, 2000), which underlies this presentation, may be more directly applicable.

2 The basics of questions and answers

Questions are requests for specific information. If I ask 'Can stress cause depression?' and receive the response 'Stress can cause high blood pressure', this response may be informative but it does not satisfy the question. If a response does not satisfy the question, then it is not a possible answer to that question. A response satisfies a question, right or wrong, if given it were understood it would not be reasonable to repeat the question. Consider the question 'Is it raining outside?' being followed by the response 'Yes, it is raining outside', it would not be reasonable to repeat the question: we would not say 'But is it raining outside?'. The response satisfied the question. Alternatively, consider if the question 'Is it raining outside?' was responded to by 'Green is my favourite color', it would be reasonable to say 'But is it raining outside?'. If the response to 'Can stress cause depression?' is 'Stress can cause high blood pressure', it would be reasonable to reply with 'But can stress cause depression?'. Assuming the response is understood, the need to repeat the question is an indicator that the response was not a possible answer. A possible answer need not be correct to satisfy a question in this sense.

Although an answer resolves the question-specific inquiry, not all questions are answerable: those that presuppose propositions taken to be false are not answerable. Consider the question 'Has Fred stopped petting his dog?'. This question presupposes, among other things, that Fred has or had a dog. If this is taken to be false (i.e. Fred is believed to never have had a dog), then the question is not answerable. Neither yes nor no suffices. It would not make

sense to say 'Fred does not have nor has ever had a dog, but has Fred stopped petting his dog?'. To be answerable there must be at least one response that satisfies the question. Here is another example: 'How does stress cause depression?'. This question presupposes that stress causes depression; if the proposition *stress causes depression* is taken to be false, then the question of how it does so is not answerable. It would be nonsensical to say 'Stress does not cause depression, but tell me how stress causes depression?' A question that is not answerable is an *illegitimate* question.

If, on the other hand, the truth of a question's presuppositions is unknown (I do not know whether Fred has or ever has had a dog or whether stress causes depression), then the legitimacy of the question is unknown. In this case the question is *premature*. Premature questions lead to new questions regarding the unknown presuppositions that must be answered before legitimacy can be determined. If the truth of the proposition *stress causes depression* is unknown, then the question 'How does stress cause depression?', which presupposes this proposition, is premature. Legitimacy depends first on answering the question 'Does stress cause depression?' If the answer is 'Yes, stress causes depression', then the question regarding *how* stress causes depression is legitimate. If the answer is 'No, stress does not cause depression', then the *how* question is illegitimate.

A question that is not an inquiry is *trivial*. A trivial question is one for which the answer is taken to be known. Consequently, a question is trivial once it is determined there is only one possible answer since this possible answer must be *the* answer; no inquiry is required. Also, a question is trivial once the actual answer from a complete set of possible answers is taken to be determined; again, no further inquiry is required. To claim a question is trivial, however, is not to claim its answer is unimportant, it is only to say that since we presume to know the answer, the question itself does not require inquiry.

It should be clear that inquiry leads to a sequence of questions that can be tracked backward or forward. A premature question requires answers to questions regarding its presuppositions. This type of reasoning allows the scientist to identify work that must be completed before the target question is legitimate. Since the answer to a question can be the presupposition for other questions, inquiry is a forward-oriented process as well. If the question 'How does stress cause depression?' is legitimate and we take its answer to be 'Stress causes depression via mechanism M1.', then based on this answer we might ask 'How does M1 cause depression?' or 'Why does stress cause depression by M1 rather than mechanism M2?' (which also presupposes M2 does not explain). And so, our research program regarding stress and depression continues.

Understanding Scientific Inquiry

Responses also have presuppositions. For example, the question ‘Does stress cause depression?’ has a response of ‘Yes, stress causes depression’, but this response cannot be true unless both stress and depression exist. If one of these presuppositions is taken to be false, then the response is considered false and thereby cannot be an answer to the question. The response ‘No, stress does not cause depression’, however, does not presuppose stress and depression exist; indeed, this response may be offered for the very reason that stress or depression are taken not to exist. Consequently, if the presuppositions of each response are taken to be true, the set of possible answers to the question ‘Does stress cause depression?’ is {‘Yes, stress causes depression’; ‘No, stress does not cause depression’}. However, if the presupposition that depression exists is taken to be false, then the set of possible answers is {‘No, stress does not cause depression’}, which comprises only one response and is thereby trivial—we have what we take to be the answer.

Propositions can also presuppose the truth of other propositions. For example, the proposition *stress causes depression* is true only if the propositions *stress exists* and *depression exists* are true; consequently the first proposition presupposes the other two. Presuppositions are also transitive: if one statement or proposition, say *s*, presupposes another proposition *p*, and the proposition *p* presupposes the proposition *q*, then *s* also presupposes *q*. For example, the question ‘How does stress cause depression?’ presupposes *stress causes depression*, and *stress causes depression* presupposes *stress exists* and *depression exists*; therefore, the initial question not only presupposes *stress causes depression* but also *stress exists* and *depression exists*. This transitivity generates a hierarchy of presuppositions. In the preceding example, the initial question is premature until the proposition *stress causes depression* is confirmed. This requires answering the implied question ‘Does stress cause depression?’, but this question is itself premature until its presuppositions are established. So, before these questions are legitimate, the questions ‘Does stress exist?’ and ‘Does depression exist?’ must be affirmatively answered. A legitimate line of inquiry must respect the presupposition hierarchy.

For notational purposes, I will indicate a set of responses by $\{r_1 \dots r_k\}$, and set of possible answers by $\{a_1 \dots a_n\}$, and the list of presuppositions by $\langle p_1 \dots p_m \rangle$ (however, I will not include all presuppositions, only those being discussed). A question *Q* that has a response set with *k* responses $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ may be written as $Q\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$. A question *Q* that presupposes a proposition *p* is indicated as $Q\langle p \rangle$. A response *r* that presupposes proposition *p* is indicated as $r\langle p \rangle$. And, a proposition *p* that presupposes *q* is written as $p\langle q \rangle$. We can nest the presupposition delimiter to represent a presupposition hierarchy. For example, we can denote the case in which *Q* has response *r* that presupposes *p*, and *p* presupposes *q*, as $Q\{r\langle p\langle q \rangle \rangle\}$; moreover, for greater clarity we can

provide subscripts to the presupposition delimiters to facilitate tracking the nested lists: for example, $Q\{_R r_{<1} p_a <_2 q_a, q_b >_2, p_b >_1\}$ indicates presupposition list 1 includes p_a and p_b , and presupposition list 2 (which are presuppositions of p_a) includes q_a and q_b . Although $r\langle p\langle q\rangle\rangle$ implies $r\langle p, q\rangle$, I will use the former notation to represent the latter. In other words, I will leave the implication of the transitive property of presuppositions implicit: writing that r presupposes p , which presupposes q , as $r\langle p\langle q\rangle\rangle$ will be taken to imply that r also presupposes q . If I wish to denote a question, its answer set, and the question's presuppositions but not response-specific presuppositions, it would be indicated as $Q\{_A r_1, r_2, \dots, r_k\}\langle p\langle q\rangle\rangle$. I indicate all presuppositions at the answer level as $Q\{_A r_1\langle p, p_1\rangle, r_2\langle p, p_2\rangle, \dots, r_k\langle p, p_k\rangle\}$, noting that p , being common across all answers is therefore a presupposition for the question itself, whereas the p_i denote response-specific presuppositions. The question-specific presuppositions can be "factored" out of the last notation so that $Q\{_A r_1\langle p_1\rangle, r_2\langle p_2\rangle, \dots, r_k\langle p_k\rangle\}\langle p\rangle$ means the same as $Q\{_A r_1\langle p, p_1\rangle, r_2\langle p, p_2\rangle, \dots, r_k\langle p, p_k\rangle\}$.

A presupposition of a question, as opposed to a presupposition of a response, is a proposition that all possible answers presuppose. Consider the example 'How does stress cause depression?' $\{_R \text{'Stress causes depression via a cortisol mechanism'}\langle \text{stress causes depression, cortisol exists}\rangle; \text{'Stress causes depression via an anxiety mechanism'}\langle \text{stress causes depression, anxiety exists}\rangle\}$. Each response presupposes the existence of a different mechanism (cortisol or anxiety), and both responses presuppose stress causes depression. There is no way to answer the question without presupposing the common proposition that stress causes depression; therefore, if this proposition is false, the question cannot be answered and is thereby illegitimate. The question and its presupposition are 'How does stress cause depression?' $\langle \text{stress causes depression}\rangle$, which also presupposes that stress exists and depression exists. If a scientist submits an application for funding proposing to answer the question 'How does stress cause depression?' but has not established *that* stress causes depression, then reviewers may deem the question to be premature and request the proposition *stress causes depression* be established first.

What happens if a response-specific presupposition is taken to be false? That response cannot be a possible answer and should be excluded from the set of possible answers: stress cannot possibly cause depression via anxiety if anxiety does not exist. Consider the following example and whether the response set is also the set of possible answers.

'Is it raining outside?' $\{_R \text{'Yes, it is raining outside'}; \text{'No, it is not raining outside'}\}$

To determine the set of possible answers we need to consider each response and its presuppositions. The response 'Yes, it is raining outside'

Understanding Scientific Inquiry

presupposes *rain exists*, *outside exists*, and *rain is the type of thing that can occur outside*. 'No, it is not raining outside' has no such presuppositions. So, indicating the presupposed propositions related to each response gives

'Is it raining outside?'_R 'Yes, it is raining outside' <*rain exists*, *outside exists*, *rain can occur outside*>; 'No, it is not raining outside' <>}

If all presuppositions are taken to be true, then each response is a possible answer and the set of possible answers is the same as the indicated response set:

'Is it raining outside?'_A 'Yes, it is raining outside'; 'No, it is not raining outside'}.

Does the set of possible answers to all 'Is X the case?'-type questions always contain both Yes and No? Consider the following example.

'Is there a Unicorn in the kitchen?'_R 'Yes, there is a unicorn in the kitchen'; 'No, there is not a unicorn in the kitchen'}

The response 'Yes, there is a unicorn in the kitchen' presupposes unicorns and kitchens exist as well as unicorns are the type of thing that can be in kitchens. 'No, there is not a unicorn in the kitchen' has no such presuppositions. So, including the presupposed propositions gives:

'Is there a Unicorn in the kitchen?'_R 'Yes, there is a unicorn in the kitchen' <*unicorns exist*, *kitchens exist*, *unicorns can be in kitchens*>; 'No, there is not a unicorn in the kitchen' <>}

If the presupposition that unicorns exist is not taken to be true, then the 'Yes...' response is not a possible answer and the set of possible answers does not include this response:

'Is there a Unicorn in the kitchen?'_A 'No, there is not a unicorn in the kitchen'}

This is a case in which the set of possible answers contains only one response. A question with a singleton as a set of possible answers is trivial, which is to say when we have only one possible answer, we have the answer; no further inquiry is required (i.e. there is no need to look for unicorns in the kitchen). Ultimately, the goal of scientific inquiry is typically to identify the actual answers, but if we start with only one possible answer, then there is no need for inquiry.

3 The logic of inquiry applies to beliefs

I have been stating whether propositions have been taken to be true or taken to be false rather than stating whether they are in fact true or in fact false. This is because the logic of inquiry is dependent on a given set of beliefs. Consequently, a question may be legitimate, premature, or trivial according to one set of beliefs and not so according to another; and, a response may be a possible answer in one set of beliefs and not a possible answer in another. Therefore legitimacy, prematurity, triviality, and the status of responses can differ across people. If Lisa believes depression exists, Fred believes that depression does not exist, and I am unsure then (assuming all other presuppositions are believed by all) the question regarding how stress causes depression is legitimate for Lisa, illegitimate for Fred, and premature for me. If Lisa were to pose the question to Fred and me, Fred may well say 'Your question presupposes something that does not exist and is therefore not answerable', and I may reply 'I cannot answer your question because I do not know whether it is answerable.' Of course, Lisa may seek answers for herself since to her the question is legitimate. If all three of us were reviewing an application for funding to address the question, then Lisa may be willing to consider the substantive and methodological merits of the proposal (it is after all a legitimate question), Fred would reject the proposal out of hand (no point in considering the merit of research to answer an unanswerable question), and I would recommend that the question of depression's existence must be answered first (no point in considering the merit of research to answer a question that may not be answerable).

4 From possible answers to actual answers

Having a legitimate question and corresponding set of possible answers is necessary but not sufficient for successful inquiry. Successful inquiry requires culling what we take to be *the* answer from the set of possible answers. Understanding this step requires understanding why in the preceding sections answers are demarked with single quotes but propositions are indicated using italics and no quotes. What is being differentiated here is a statement from its content, an assertion from the content of that assertion. For example, 'There is a unicorn in the kitchen' is a statement that asserts the proposition *there is a unicorn in the kitchen*; 'The kitchen has a unicorn in it' is another statement that asserts the same proposition that *there is a unicorn in the kitchen*. It is in virtue of this distinction between an assertion and its content that we can reduce a set of possible answers to the set of actual answers by addressing the hierarchy of presuppositions.

Understanding Scientific Inquiry

An assertion always presupposes its content. Not only does the assertion 'Stress causes depression' presuppose *stress exists* and *depression exists*, but also that *stress causes depression*. In fact, the assertion is first and foremost presupposing its content, and then the presupposed content itself presupposes more elementary propositions. So, a more accurate representation of the structure for this example is 'Stress causes depression' <*stress causes depression* <*stress exists*, *depression exists*>>. If we apply this hierarchical structure to a question we get, for example:

'Does stress cause depression?' {_R'Yes, stress causes depression'<*stress causes depression* <*stress exists*, *depression exists*>>; 'No, stress does not cause depression'<*stress does not cause depression*>}

This hierarchy dictates the necessary sequence of inquiry. The response 'Yes, stress causes depression' presupposes its content *stress causes depression*, which in turn presupposes that stress and depression exist; consequently, we need to first address the deepest presuppositions that *stress exists* and *depression exists* before we can address the higher-level presupposition of the content proposition *stress causes depression*. Ultimately if we confirm or disconfirm the content proposition, we will in this case have only one answer remaining in the response set. Notice that if 'Yes...' is the answer, then 'No...' cannot be the answer: one answer logically precludes all others, which is not generally true of all sets of possible answers.

Consider the sequence of inquiry required for the question 'How does stress cause depression?', delineated below by indentation for clarity.

'How does stress cause depression?'
{_R'Stress causes depression via cortisol'
 <₁ *stress causes depression via cortisol*
 <₂ *stress causes depression*
 <₃ *stress exists*, *depression exists* >₃>,
 cortisol exists >₂>₁>;
'Stress causes depression via anxiety'
 <₄ *stress causes depression via anxiety*
 <₅ *stress causes depression*
 <₆ *stress exists*, *depression exists* >₆>,
 anxiety exists >₅> >₄>}

The first response to the question regards cortisol. This response presupposes its content *stress causes depression via cortisol*. Note that the first list of presuppositions for any response always contains only one proposition, the content proposition. In this example, we can address this proposition by answering its related question 'Does stress cause depression via

cortisol?', but this is a premature question if its presuppositions are not already established. The content proposition of the response presupposes *stress causes depression* and *cortisol exists* (presupposition list 2). We can address these presuppositions by asking their related questions 'Does stress cause depression?' and 'Does cortisol exist?'. However, the first of these questions, 'Does stress cause depression?', presupposes *stress exists* and *depression exists* (presupposition list 3) and is premature if these propositions are not taken to be true. Therefore, we need to start by establishing whether stress and depression exist, as well as whether cortisol exists before the higher order presuppositions that depend on them can be addressed and ultimately the content proposition, presupposition list 1, can be used to determine whether the response can be taken as an answer to the question. The same logic applies to the second response. Once a complete set of answers is culled from the set of all possible answers, the question becomes trivial.

From this perspective, the set of possible answers are the responses that can resolve the question-specific inquiry and for which all presuppositions of the content propositions are presumed true, leaving the content propositions themselves undetermined. The final answers from this set of possible answers are determined by investigating which of the content propositions are taken to be true. This set of answers need not be a singleton: there may be more than one answer, in which case their conjunction can be considered a single answer.

Do we need the full set of possible answers to engage inquiry into a legitimate question? No. We can focus on whether a given response provides an answer without knowing all possible responses. For example, 'How does stress cause depression?' may have a very large, even unknown, set of possible answers, but we can focus on the response 'Stress causes depression via cortisol' without knowing the other possible answers by asking 'Does stress cause depression via cortisol?'. If the answer is yes to this question, then we have an answer to the *how* question. However, this answer is incomplete. Knowing that cortisol answers the *how* question does not mean that there are no other answers as well (perhaps anxiety also causes depression). If instead we take the answer to be that cortisol does not answer the *how* question, this does not tell us what does. So, we can inquire into a question without knowing the complete set of possible answers, but we may not be able to provide a complete answer to the question by doing so.

5 Inquiry as a process of belief change

Inquiry is a process by which beliefs are changed. Any given set of beliefs comprise propositions that can be presupposed in questions. For example, the proposition *stress causes depression*, if taken to be true, can be a presupposition for asking 'How does stress cause depression?'. Also, each proposition itself can be reconsidered. For example, the proposition *stress causes depression* can be reconsidered by the question 'Does stress cause depression?'. Reconsideration is a process of opening up a previously closed question: going from a set of answers to an expanded set of possible answers: for example, going from 'Does stress cause depression?' {_A 'Yes, stress causes depression'}, which is trivial, to 'Does stress cause depression?' {_A 'Yes, stress causes depression'; 'No, stress does not cause depression'}, which is not trivial.

Consequently, we can think of a set of all legitimate questions allowed by a given belief set as including all questions that the belief set can support as presuppositions having answers that produce new beliefs and questions that reconsider existing beliefs. Together these questions allow for changes in a belief set. The answer to a new legitimate question increases the set of believed propositions (and thereby expands the set of possible legitimate questions), whereas reconsideration can change the existing belief set by substituting the proposition of a new answer for the old answer. This should be clear from the discussion above: if 'Does stress cause depression?' is legitimate and not a reconsideration, then its answer will constitute a new proposition taken to be true—the belief set is thereby expanded. If on the other hand the proposition that *stress causes depression* is a current belief, the question 'Does stress cause depression?' is a reconsideration, which if it is subsequently answered 'No, stress does not cause depression' will constitute a change in belief by replacing *stress causes depression* with *stress does not cause depression*.

A change in belief due to a reconsidered proposition has ripple effects. For example, all propositions in the belief set that presupposed a reconsidered proposition now taken to be false are no longer valid. Any proposition that is recognized as no longer valid is no longer logically in the belief set. For example, suppose we reconsider the belief in the proposition that *stress exists*: 'Does stress exist?' {_A 'Yes, stress exists' <*stress exists*>, 'No, stress does not exist' <*stress does not exist*>}. Suppose further that the result of our reconsideration is 'No, stress does not exist', then not only does the belief set replace *stress exists* with *stress does not exist*, but all beliefs that presuppose *stress exists* are no longer valid.

6 Conclusion

The logic of inquiry presented above provides an understanding of questions and answers to guide scientists in identifying when a question is premature, when a question is legitimate, when a question is trivial, and how to identify when a response is a possible answer and when it is indeed the answer. There are five main points to remember:

1. A question that presupposes a proposition taken to be false is not answerable and is thereby illegitimate. For example, the question ‘How does Regulatory Focus Theory explain variation in risk tolerance?’ is illegitimate if it is believed that risk tolerance does not vary. Such a question, with a presupposition taken to be false, should not be posed.
2. A question that presupposes a proposition the truth of which is unknown is premature. Belief regarding the truth or falsity of the presupposition must be determined before the question can be identified as legitimate or illegitimate. For example, the question ‘How does Regulatory Focus Theory explain variation in risk tolerance?’ is premature if variation in risk tolerance is not established. Such a question requires additional work to establish the requisite presupposition before it can legitimately be posed.
3. A response is a possible answer if it can satisfy the question and if all the propositions presupposed by the content of the response are taken to be true. If a presupposition of a response’s content proposition is taken to be false, the response is not a possible answer.
4. Actual answers are the subset of possible answers for which their presupposed content is taken to be true.
5. A question is trivial if its set of possible answers contains only one response or only responses with content propositions all taken to be true. For example, the question ‘Does Regulatory Focus Theory explain age disparities in communication strategies?’ is trivial if the phenomenon of age disparities in communication strategies does not exist. The ‘Yes...’ response presupposes the phenomenon; therefore, if the phenomenon is taken not to exist, it is not a possible answer. In this case the ‘No...’ answer is the only possible answer and is therefore *the* answer, taken to be known *a priori*. Consequently, the question is trivial. As another example, consider ‘How does stress cause depression?’ {_A ‘Stress causes depression via cortisol’; ‘Stress causes depression via anxiety’}. If we take this to be the complete set of actual answers (i.e. we take it that all answers in the set are in fact answers and that there are no other actual answers not included in the set), then the question is trivial. Explanation-seeking questions (why

Understanding Scientific Inquiry

and how questions) are often never formally trivial because a complete answer is often not achieved.

Understanding the logic of inquiry will help in formulating research programs by identifying the presupposition hierarchy underlying their ultimate goals. This understanding will also assist in writing applications for research funding and writing scientific papers. The background for such an application or paper should provide compelling arguments for all contestable presuppositions lest the question be deemed illegitimate or premature by the reader. Similarly, presuppositions of any proposed answer need to be established before it can be considered a possible answer.

Although the preceding has been framed in terms of the overall research question, the same logic applies to any question or assertion (to assert a proposition is to affirmatively answer the question regarding the proposition's truth). For example, to claim that a particular data set provides evidence for a hypothesis presupposes that the measurement and methods underlying the evidential claim are valid and reliable thereby requiring affirmative answers to methodological questions prior to making the evidential claim. These answers can be essential background for successful funding applications and research papers.

The process of scientific inquiry requires nuanced considerations of credibility and belief. In its actual application, we would say that the degree to which a question is legitimate depends on the degree to which its presuppositions are taken to be true or taken to be false. Similarly, for any proposition, its credibility is dependent upon the credibility of its presuppositions. The better evidence and argument that can be amassed in support of a proposition, the more credible is that proposition and the more confident we can be in using it as a presupposition for questions, assertions, and other propositions.

In general, a careful consideration of the presupposition hierarchy for inquiry provides guidance regarding both the sequence of study underlying a research program as well as highlighting the background required for compelling funding applications and manuscript submissions.

References

- RESCHER, N. 2000. *Inquiry dynamics*, New Brunswick, N.J., Transaction Publishers.
- SCHA, R. J. H. 1983. *Logical Foundations for Question Answering*, Eindhoven, the Netherlands, Philips Research Laboratories.
- WIŚNIEWSKI, A. 1995. *The posing of questions : logical foundations of erotetic inferences*, Dordrecht ; Boston, Kluwer Academic Publishers.

Internet and Greek Pontian Associations in Thrace

Chrysi Tellidou¹

Received: 11-09-2018. Accepted: 02-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.435

© Chrysi Tellidou



Abstract

Greeks of Pontian ancestry migrated, forcibly, from Pontus to Greece where they founded Pontian Greek communities, mainly in northern Greece. The rapid increase in usage of the Internet during the past years appears to be significantly affecting the activity of cultural associations in general. The Greek Pontian associations of Thrace have begun taking advantage of the Internet and social networks for their diversified activities, a “modernization” which has not been studied extensively thus far. In this paper a corresponding analysis is performed, concluding that the activity of the associations on the Internet reflects an upward trend, while an increasing number of them seek to maintain an active presence on the Internet through web sites and social networks. This activity includes primarily press conferences and informative announcements.

Keywords: Greek Pontian associations; Thrace; Internet; social networks.

1 Introduction

The Historic Pontus is the geographic area of the northeastern part of Asia Minor. Greeks of Pontian ancestry migrated from Pontus to the Greek state (either directly or via the former Soviet Union) by violent means. The largest

¹ School of Science of Education, Democritus University of Thrace, Alexandroupolis, Greece; xrisatel@gmail.com.

number of these refugees arrived within the 1912-1924 period, where the culmination was observed during the years between 1921 and 1924, totaling an unparalleled 1.221.849 people. The main cause of this was the Greco-Turkish War in Asia Minor, especially the Catastrophe of Smyrna. Greeks originating in Pontus belong to the ethno-regional group category and upon arriving in Greece they founded associations initially for livelihood purposes.

The objective of this paper is to examine the Greek Pontian associations of Thrace and their organization with regard to their cultural and educational contribution. In specific, it argues that the cultural associations significantly influence the rescue and spread of the Pontian culture, judging by the characteristics of their function and activity. For the purpose of emphasizing this matter, a few sociology terms and concepts are cited initially, with reference to social, collective and ethno-regional Pontian identity coupled with a presentation of the region of Thrace. Afterwards, a selection of general historical facts on the foundation, contribution and activities of Greek Pontian associations are quoted. In a second stage, a tracing of their benefaction to education and culture is attempted, by utilizing the presence of Greek Pontian associations on the Internet and social networks. In parallel, a study of the potential evolution of their presence with the passage of time is pursued. In this context, a research was conducted in two steps-phases (the first in 2016 and the second in 2018). Following the description of the data collection method, the statistical results of the comparative study between the two years are analyzed, demonstrating the particularities of the activity of the Greek Pontian associations of Thrace on cultural and educational level while employing modern technology.

2 Social, Collective and Greek Pontian “ethno-regional” identity and the region of Thrace in Greece

During the last few years, the concept of social identity is continuously gaining ground in research related to social psychology, even though the two are not absolutely relevant. According to H. Taifel and J. Turner (2004), social identity consists of aspects of the self-image of a person. Those aspects originate from the social categories or groups where the person believes he/she belongs to.

K. Woodward (2004) claims that personality describes qualitative characteristics of self, while identity contains elements which are chosen by the person himself/herself. Identities correspond to features and traits, to social relationships, to roles undertaken by social group members, which define who we are (D. Oyserman, K. Elmore and G. Smith, 2014).

The social identity of a person affects both his/her self-image and the way he/she perceives others (W. Arts and L. Halman, 2006).

N. Ellemers, R. Spears and B. Doosje (2002) state that the degree of commitment or identification towards a group determines how the characteristics, the norms and the luck or overall course of that group shall affect the perceptual (cognitive), emotional and behavioral responses or reactions of the people who belong to it.

In contemporary societies, identity is a declaration of the person's necessity of self-determination in a social circle which is under constant social alterations (J. Howard, 2000). Engagement with one's identity constitutes a testimony of the person's hesitancy to define who he/she is in comparison with others (M. Vergeti and F. Charalampidou, 2015). Collective identity is the social group's identity.

M. Vergeti (2003) defines collective identity as the sense of belonging to a specific group. Collective identity is delineated from two dimensions; the first one is in regard to the emotion of positive identification of the group members and the second pertains to the integration with the group and to the forms of activity that the person performs as a member. These two dimensions contribute to the determination of the group members (M. Vergeti, 2000).

A. Melucci (1982) considers collective identity a form of collective action. Actions are the means by which both people and groups give shape to their identity. P. Schlesinger (1987) supports A. Melucci by further stating that A. Melucci's point of view is applicable even for identities pertinent to social bodies which are considerably firmer, such as national identity.

M. Hogg relies on the collaborative essence of social life and the sociability of humanity. It is in the nature of human to identify with numerous groups, which may differ in size, time duration and function. Groups provide collective identity to their members. Collective identity grants cohesion to the group. It operates as a means of resolving conflicts and disputes, for collaborative efforts, as well as for pursuit of the common good. These powerful beliefs encompassing the identity originate from important similarities between the members of the group (M. Hogg and S. Reid, 2006).

Culture is the core determinant in designating the collective identity's essence. According to M. Vergeti, collective identity is defined by culture, social delimitation or both (M. Vergeti and F. Charalampidou, 2015).

Culture occupies a prominent position and constitutes a vital element of the Pontian Hellenism's identity, which settled into the Greek state in the 1920s and earlier. An overview of the related bibliography indicates that this culture dictates and influences the way of life of the Pontian Greeks in addition to contributing to their overall presence in the historical, social and cultural becoming of the Greek nation, by bestowing it with a *sui generis* complexion and identity even to this day.

M. Vergeti (2000) has taken extended interest in studying the Greek Pontian identity. She has inspected narrations from Greeks of the first, second and third generation of migrants from Pontus and the first generation of Greeks who settled in Greece originating in the former Soviet Union. Greeks from the Greek Pontian communities of Athens participated in the corresponding research. According to the conclusions reached by M. Vergeti (2000), the migration of first generation Greek Pontians to Greece is the cause of the Greek Pontian identity's appearance in the area of Greece. They acquire conscience of their Greek, as well as their Pontian, identity which is gradually restructured due to the predominant historical context and ideology, aside from the identity's social limits. She introduces the term "ethno-regional identity" with the objective to denote the identity of the social group which migrates from its place of origin without the opportunity to return. The identity of such a group can neither be characterized as purely ethnic or national since it comprises part of a nation in its wider interpretation, nor as regional since the region which used to serve as a reference point ceased to exist (M. Vergeti, 1993).

Thrace was the entry point for most Greek refugees of Pontian ancestry upon arriving in Greece and thus constitutes one of the most highly populated settlement areas. It is a historic region of the country and forms its northernmost and easternmost geographical region. Geographically it is designated by the Thracian Sea to the south, by the Rhodope Mountains to the north, by the Nestos river to the west and by the Evros river to the east.

The region is divided into three regional units; Evros (whose total area is 4.242 km² and its capital is Alexandroupoli), Rhodope (whose total area is 2.543 km² and its capital is Komotini) and Xanthi (whose total area is 1.793 km² and its capital is Xanthi). Their population is 146.378, 108.566 and 110.887, respectively, according to the 2011 census. The region is located east of the Macedonia geographical region and is bordered by Bulgaria to the north and by Turkey to the east. It has been named Western Thrace, on historical and geographical basis, to be distinguished from Eastern and Northern Thrace which are part of Turkey and Bulgaria, respectively, since the three of them form the greater geographical area of Thrace.

3 Foundation and activity of Greek Pontian associations

A brief citation to historical facts is provided in this chapter, which may aid in better understanding of the Greek Pontian associations' identity.

Greek Pontian refugees of 1922 founded communities under adverse survival conditions. Apart from undergoing a massive expatriation, the

unfavorable reception that these refugees (both those coming directly from Pontus and those coming through Russia) received from the local Greeks necessitated these foundations. In the absence of associations, communities and solicitude for anything which empowered the solidarity between them, Greek Pontian refugees would have been forced to cope with Greek society utterly defenseless. Therefore, communities were a matter of survival during this initial phase of their deracination (M. Vergeti, 1998) (M. Vergeti, 2000).

The first Greek Pontian associations were founded in Greece between 1922 and 1933 upon the arrival of the Pontian Greeks.

The standard of living for a considerable amount of people who have been members of the communities since then, has improved gradually. The most urgent concerns of existence receded, thereby allowing refugees originating in Pontus to occupy themselves with the reinforcement of their collective identity, which would lead to social cohesion. The defensive disposition of the communities yielded to an assertive dynamic. Greek Pontians started an effort to gain recognition for their real position within the Greek society (M. Vergeti, 2000). Consequently, the second generation of Greek Pontians founded their own communities or enhanced the existing ones from the first generation, due to their need for expressing their ethno-regional identity through various demonstrations. Taking into account the historical-political conjuncture (starting from the Treaty of Lausanne and population exchange in 1922, up to the period succeeding the fall of the military junta of 1967–74 in Greece), Greek Pontian communities show interest in rescuing and spreading their cultural heritage, in academic terms, quite belatedly (M. Vergeti, 2000).

Third generation Greek Pontian associations have become the spearhead of protestations, due to their efficiency and legal support, in pursuit of a broad acceptance of historic truth and advocacy of culture and customs regarding the Pontian Greeks. They perform studies, research and every possible attempt to preserve and highlight the historic, linguistic and folklore monuments of Pontus. They support development of every form of art, in addition to emphasizing the importance of the holy shrines of Pontian Hellenism. Furthermore, they attend to the coordination of all kinds of cultural, recreational, social, rustic, philosophical, philanthropic, athletic, artistic and musical-dance events and the preservation of heirlooms and documents connected to Pontus. They never cease to accentuate the augmentation of the spirit of love, family bonding, solidarity, mutual assistance, material and moral support (C. Tellidou, 2017).

The forthcoming of the third generation of Greek Pontians marks a broad shift in favor of Greek Pontian associations, leading to a massive enlargement of the ranks of either existing or newly-founded ones. During the two decades between 1970 and 1990, there is an upsurge in foundation and operation of new associations, largely due to the appropriate historical, political, economic

and social conditions that had developed within the country. Their purpose is to rescue, promote and disseminate the cultural elements and exemplars of the Pontian Greeks. The third generation is the one which is no longer experiencing social exclusion and can, without hesitation, highlight and promote its Pontian identity, having joined and incorporated into Greece as an indisputable and integral member of the nation (C. Tellidou, 2017). Greek Pontian associations are gradually ceasing to accept solely Pontian members. Their main concern is their receptiveness towards the wider society.

After 1990 and up to the beginning of the 21st century, when the fourth generation of Greek Pontians appears, the activity of the previous generation is resumed with equally vigorous zeal. By exploiting technology, the Internet and social networks, through various approaches, to promote and communicate their activities, attract new members, publish photographic material and communicate with other associations, members and any other interested party (C. Tellidou, 2017).

Communities contributed to the incorporation of Pontian Greeks into the Greek society. Nowadays they constitute educational institutions and through them the collective identity of the Greek Pontians is being recovered, preserved and augmented both on and off the Internet (M. Vergeti, 2000) (M. Vergeti and F. Charalampidou, 2015).

4 Research methodology for the presence of Greek Pontian associations on the Internet

With the objective to trace, in depth, the manner in which the Greek Pontian associations of Thrace endorse education and culture, a survey was carried out with focus on the use of contemporary technology. Granted the wide and frequent usage of the Internet by young people, a search was conducted on the presence of associations within this pattern.

In specific, the first step of the survey lasted a few days over a month and was completed on July 2016. It included a search on the Internet aimed at exploring the presence of the Greek Pontian associations of Thrace in social networks and on cultural or other content websites which referred to these associations. The ownership of a web site and/or a blog, published (recurring or not) digital press releases, ability of direct online communication and presence on social networks were recorded. As an indicative sample, the Facebook social network was chosen, since it is considered the most widespread among users of the World Wide Web, judging by the number of its registered members.

In December 2018, the second step of the survey was carried out, which employed an identical search regarding these associations on the Internet, in order to trace their potential evolution due to the adoption and integration of

the Internet in their activities. Videlicet, an attempt was performed to determine whether these associations adhere to the developing tendency of the wider society to use contemporary technology, as well as whether they adopt it as a method to promote their actions to a broad audience and, conceivably, to attract new members.

The sources where all Greek Pontian associations of Thrace were retrieved from to be recorded are the statutes of the existing associations in that area, which were retrieved after communication via telephone or e-mail with the prefecture and municipality offices of Thrace and especially with the appointed persons responsible for cultural matters. Subsequently, the cultural associations themselves were located and an examination was conducted on which of them are occupied with the preservation, promotion, publicizing and spreading of the Greek Pontian identity, through the Internet or direct phone communication with the associations' chairpersons.

The following map indicates the location of every Greek Pontian association in Thrace, as registered in the official records of the corresponding prefectures and municipalities.



Figure 1 – Map depicting the locations of the Greek Pontian associations in Thrace

5 Statistical results from Internet searches for Greek Pontian associations of Thrace

The following remarkable data have emerged posterior to a comprehensive analysis of the results of the survey described in chapter 4:

- A. A total of 38 Greek Pontian associations were located in Thrace, 10 of which reside in the prefecture of Xanthi, 17 in the prefecture of Rhodope and 11 in the prefecture of Evros. These associations demonstrate variable activity and/or longevity.
- B. According to the results of the first step of the survey in 2016, 34 out of 38 associations are listed on search results from the most widespread Internet search engines where they appear due to a linked press conference or informational report in case of events. For the rest four no noteworthy presence on the Internet was detected. On the second step in 2018, these percentages remain unaltered. Taking into consideration the statistical results it becomes clear that quite a vast percentage (almost 90%) of the associations adopts the practice of publicizing their cultural and educational activities via online press conferences. In such a manner, they are able to highlight the value of their actions globally on any matter; on culture, for instance.
- C. During the initial step of the survey in 2016, results indicated that 26% of the associations operate their own web site. In the 2018 step, this percentage increased to 29%. Ostensibly, a major percentage of 74% had not, initially, opted for promotion through web sites or blogs. The short decline of this number to 71% in 2018 could be a sign of reluctant progression in this area.

Nonetheless, it was observed that 4 associations in Thrace are effectively inactive while 12 others prove negligible activity. Should we exclude these 16 associations from the 38 in total, then the presented percentages are expanded; on that account 50% of the associations operate a web site or blog, thus leading to a noteworthy observation given the nature of these associations and/or the distribution of generations their members belong to. It's plausible that specific associations have a majority of elderly members, resulting in less familiarity with usage of the Internet. Furthermore, it is reasonable that the bonding and interaction between members on physical level is in superb standing, therefore rendering digital communication purposeless.

- D. Out of the 11 associations which maintain their own web site, two provide functionality for direct online communication. It is worth noting that utilization of these direct communication tools has been observed at a mediocre level, which essentially indicates that

investment in state-of-the-art web sites does not constitute a high priority item, despite leveraging it could introduce in straightforward communication with web site visitors. It follows that, out of the total of 38 associations, these two comprise an insignificant percentage, moreover lacking any noteworthy upward trend since it remained constant between 2016 and 2018. It is presumed that the cause behind this observation is the growing popularity of social networks in contemporary society which prompts the Greek Pontian associations to adopt them as a means to provide their visitor – friends with the ability to directly contact them, since this could lead to impact on a broader audience.

- E. In 2016, 16 associations out of 38 were identified in possession of a social network account (primarily on Facebook). In 2018, 22 out of 38 associations operate an account on Facebook. Videlicet, six more associations created a Facebook account within a two-year period. Furthermore, if we exclude the 16 inactive associations mentioned in C above, the result indicates that all Greek Pontian associations of Thrace operate a social network account. Therefore, in contrast to the less preferred direct communication via web site, this evident inclination to utilizing Facebook's platform suggests that Greek Pontian associations focus on promoting their activities and profile via this ubiquitous route.
 - F. In 2016, three out of the 16 associations described in E above had 4.000 or more "friends". In 2018, this percentage has not fluctuated. Additionally, 12 out of the 16 in 2016 and 11 out of the 22 in 2018 have more than 1.000 "friends". This percentage may be deemed as quite substantial, in view of the fact that the management of a Facebook account requires due interest, knowledge, time and feedback. As a consequence, we may imply that associations indeed impact their audience, keep pace with contemporary technology and hence disseminate knowledge, ideas, memories and culture. In specific, out of the 16 associations in 2016:
 - a. four had 1.000 or less "friends",
 - b. five had 1.001 to 2.000 "friends",
 - c. one had 2.001 to 3.000 "friends",
 - d. three had 3.001 to 4.000 "friends" and
 - e. three had more than 4.000 "friends", as stated before.
- Correspondingly, out of the 22 associations in 2018:
- a. ten have 1.000 or less "friends",
 - b. five have 1.001 to 2.000 "friends",
 - c. one has 2.001 to 3.000 "friends",
 - d. three have 3.001 to 4.000 friends and
 - e. two have more than 4.000 "friends".

The number of “friends” was not available for one of the associations.

The aforementioned statistics denote that these associations demonstrate an outstanding number of visitors on their social network profiles, taking into account their location since Western Thrace is a minor geographical region of Greece with relatively sparse population.

6 Conclusions

Greek Pontian associations have personal web sites and blogs at their disposal and participate in social networks, primarily Facebook. Furthermore, the percentage of these associations has been observed to constantly increase while their participation rate in social networks has reached 100%. Their regular activity via press conferences on the Internet “puts the seal” on their universal dynamic presence, in the process of promoting the events they organize in context of cultural and educational actions.

In parallel, it was observed that the use of tools such as direct communication forms is minimal on the web sites of these Greek Pontian associations. This may be interpreted as a consequence of the developing tendency of our era in favor of social networks, where instant communication is offered over and above numerous convenient features.

Based on the above, it may be suggested that Greek Pontian associations consider social networks and the Internet as their allies in their prevalent effort to promote and communicate their activities, highlight photographic material, connect with other associations, members and interested parties as well as attract new members.

Universally, the existence of these actively registered associations constitutes an indispensable fact of the intense activeness of citizens originating in Pontus besides their devotion to Pontian tradition and identity. Every implemented activity of the associations has an objective regarding the rescue, preservation, promotion and bequest of their collective ethno-regional Greek Pontian identity. Technology is one of their critical supporters in the process. The contribution of Greeks originating in Pontus to the region of Thrace is most significant within the contemporary society context, since they observe its progress (social networking, information exchange, interaction through activities) and maintain communication (mutual acquaintanceship, collectivity, exchange of views, et cetera).

References

- [1] Arts, W. and Halman, L. (2006). Identity: The Case of the European Union. *Journal of Civil Society*, 2(3).
- [2] Ellemers, N., Spears, R. and Doosje, B. (2002). Self and Social Identity. *Annual Review of Psychology*, 53(1). [print] Available at: <https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135228> [Accessed 14 Oct. 2018].
- [3] Hellenic Statistical Authority Census Task Force (2011). *The De Jure (registered) population*. 2011 Population-Housing Census. [online] Hellenic Statistical Authority. Available at: http://www.statistics.gr/documents/20181/1215267/dejure_population_census2011rev_en.xls/b37b6207-639f-4a32-931c-d0e592aa4d88 [Accessed 14 Oct. 2018].
- [4] Hogg, M. and Reid, S. (2006). Social Identity, Self-Categorization, and the Communication of Group Norms. *Communication Theory*, 16(1). [print] Available at: <https://doi.org/10.1111/j.1468-2885.2006.00003.x> [Accessed 14 Oct. 2018].
- [5] Howard, J. (2000). Social Psychology of Identities. *Annual Review of Sociology*, [print] 26(2000). Available at: <https://www.jstor.org/stable/223449> [Accessed 14 Oct. 2018].
- [6] Melucci, A. (1982). *L'invenzione del presente: movimenti, identità, bisogni individuali*. Bologna: Il Mulino.
- [7] Oyserman, D., Elmore, K. and Smith, G. (2014). Self, self-concept, and identity. In: M. Leary and J. Tangney, ed., *Handbook of self and identity*, 2nd ed. [print] New York: The Guilford Press. Available at: <https://www.guilford.com/books/Handbook-of-Self-and-Identity/Leary-Tangney/9781462515370> [Accessed 14 Oct. 2018].
- [8] Schlesinger, P. (1987). On national identity: some conceptions and misconceptions criticized. *Social Science Information*, [print] 26(2). Available at: <https://doi.org/10.1177/053901887026002001> [Accessed 14 Oct. 2018].
- [9] Tajfel, H. and Turner, J. (2004). The Social Identity Theory of Intergroup Behavior. In: J. Jost and J. Sidanius, ed., *Key readings in social psychology. Political psychology: Key readings*. [print] New York: Psychology Press. Available at: <http://psycnet.apa.org/record/2004-13697-016> [Accessed 14 Oct. 2018].

- [10] Tellidou, C. (2017). Cultural standards of the Pontian Hellenism in the Greek state (in Greek). In: *1st International Science Conference: Art & Education*. [unpublished presentation] Democritus University of Thrace.
- [11] Vergeti, M. (1993). *Ethno-regional Identity: The Case of Pontian Greeks*. Panteion University of Social and Political Sciences. [print] Available at: <http://dx.doi.org/10.12681/eadd/2548> [Accessed 14 Oct. 2018].
- [12] Vergeti, M. (1998). *Expatriates from the Former Soviet Union 1985-1995 – Issues of housing, employment, identity* (in Greek). Thessaloniki: Kyriakidis Bros.
- [13] Vergeti, M. (2000). *From Pontus to Greece – Figuration procedure of an ethno-regional identity* (in Greek). 2nd ed. Thessaloniki: Kyriakidis Bros.
- [14] Vergeti, M. (2003). *Repatriation and social exclusion* (in Greek). 2nd ed. Thessaloniki: Kyriakidis Bros.
- [15] Vergeti, M. and Charalampidou, F. (2015). Children, collective identity and educational process (in Greek). In: Th. Thanos, ed., *The sociology of education in Greece: Research anthology* (in Greek). [print] Athens: Gutenberg. Available at: <https://vopac.nlg.gr/Record/b.632153> [Accessed 14 Oct. 2018].
- [16] Woodward, K. (2004). Questions of identity. In: K. Woodward, ed., *Questioning Identity: Gender, Class, Ethnicity*, 2nd ed. [print] London: Open University. Available at: <https://isbndb.com/book/0415329671> [Accessed 14 Oct. 2018].

Research supported by Onassis Foundation

Methodology of Pedagogical Research

Cristina Ispas¹

Received: 09-12-2018. Accepted: 26-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.434

©Cristina Ispas



Abstract

The pedagogical research constitutes a critical, dynamic, intentional, active process oriented towards the investigation of the educational reality under all its aspects. The present paper brings in the forefront the effort of pedagogy to crystalize its own methodology of research in its demarche of affirmation and consolidation of its scientific status. The complexity and the high number of inter-depended variables present in the study of the human condition foiled the effort to apply a *model of scientific research* underlain on the method of natural sciences in the field of social-human sciences.

In this context, the pedagogy was bound to shade its methods of research in order to surprise as truthful as possible the complexity and diversity of the educational processes. Thus, besides *the empirical-experimental method*, the pedagogy was enriched with new methods of research such as *the hermeneutic method, the historical method, the rhetorical method, the descriptive method, the problematization method*.

Keywords: pedagogy, research methods, empirical-experimental method, the hermeneutic method

1. Introduction

”The research methodology specific to pedagogy must be oriented towards an epistemic *object* which constitutes the essence of education – the functional-structural nucleus of education”².

¹ Universitatea “Eftimie Murgu” din Reșița, P-ța Traian Vuia, nr. 1-4, 320085-Reșița
c.ispas@uem.ro.

The definition of *the research problem* represents a first step necessary for the one who studies the specificity of scientific investigation in the field of pedagogy. In this phase we retain the essential elements, we structured by turns, the hypothetical ways of solving which will constitute a first conceptual reference framework. In the initial process of a research, this first moment of generalization of the educational reality is necessary in order to delimitate the problems of the research by which we can derive the concepts, variables, and hypothesis. A research pathway supposes a permanent exchange and comparisons between theory and practice.

2. The empirical-experimental method

The destiny of pedagogy appears oscillating between two reference points which mark two types of dependencies. On the one hand, there is the pedagogy emancipation from the philosophical discourse. On this rather long and complicated way, the pedagogy headed towards *the individualization of the "method"* meaning that efficient action way by which it can reach *the status of science*. This statement constitutes one of the most dangerous illusions of *pedagogy*, which leads towards a unique and restrictive landmark. The generalization of the importance of *methods* supports the prejudice that *the pedagogy* can become or can be considered "science only if it is empirical-experimental".³

The possible explanation, regarding the option for *the empirical-experimental method* has its origin in the need of pedagogy to tie the research criteria which offered it a "strong" identity. By the appeal to "*method*" *the pedagogy* predicts its coming back to a prestigious scientific profile. The risk, obviously consisted –beyond the benefit of its use – in considering *the empirical-experimental method* as an absolute and general model, by neglecting the other research methods, considered to be without rigour and truth.

The belief according to which the pedagogical knowledge is not defined as scientific, if it avoids its involvement in the empirical-experimental method is harmful for at least three reasons⁴:

- the method is not always configured as an adequate instrument in order to catch the subjective dimension present in each event/educational test;
- by assuming the empirical-experimental paradigm as a unique criterion of knowledge, the pedagogy limits its form and potential of its own research;

² Cristea, S., (coord. gen.) *Curriculum pedagogic*, vol.I, București, Editura Didactică și Pedagogică R.A., 2006, p.11.

³Gennari, M., Kaiser, A., *Prolegomeni alla Pedagogia Generale*, Milano, Bompiani, 2000, p.25

⁴ Sola G. (a cura di), *Epistemologia pedagogica. Il dibattito contemporaneo in Italia*, Milano, Bompiani, 2002, p.32

Methodology of pedagogical research

- reducing its own discourse at the horizon of scientific, experimental method, ***the pedagogy risks to build a deceitful and efemeral identity.***

It was stated that the empirical-experimental method is connected with the development of the contemporary scientific thinking which follows the “laws” of progress. The idea of knowledge has suffered a profound change because it is not only in the man’s service but also in that of the progress, in other terms of the economic market. In this historical-social and political-cultural context, the empirical-experimental method becomes dominant.

The pedagogy by its excessive and often unilateral appeal to this method, pursues its legitimacy as a science on a single epistemologic and normative way.

In this direction Franco Cambi observes the risks of such a restrictive demarche. He considers that the pedagogy has assumed “a subordination” towards the natural sciences which produces *an artificial generality*. It has in view the fact that “a bad practice” of *pedagogical knowledge* has its origins in its logical-epistemological poverty reduced to the methodology of experimental research which is not typical to the social-human sciences. This kind of demarche has urged the pedagogy towards those big pillars of scientific knowledge, appreciated as being solid, according to the model of nature’s sciences. The strictness of some epistemological principles, typical to the nature’s sciences does not correspond to the object of research proper to pedagogy which is in the search of a legitimacy inside the contemporary culture dominated by the supremacy of the scientific paradigm⁵. In the absence of a consolidated epistemological apparatus, the pedagogy remains in search of those formulas capable to propel it at the position of science by valorizing its object of study specific in relation to which it can be promoted as a methodology of specific research.

The empirical-experimental method constitutes only one of the methods of pedagogy. The assumed risks come from the fact that this is considered more than a method in the extent in which it tends or it is forced to be an exemplary methodological model, even if it is in contradiction with its specific, different nature of the object of research.

The experimental method is “overtaken at the boundary between the 19th and 20th century as a radical solution adopted against the metaphysical tendencies of treating education”. And the use in pedagogy of the experimental method pursues the explanation of the research object, education “in the limits of determinism of causal type”. As a consequence, the experimental method functions only on some measurable, repetitive phenomena which can be repeated at the researcher’s initiative.

With all its limits, *the empirical-experimental method* also presents some positive aspects. It is absolutely necessary for the study of some particular contexts and specific dimensions of education, of instruction, of the lesson, of the students’ class etc.

However, in relation to the world dimension of education, the empirical-experimental method “it is not sufficient in order to build the pedagogical science “, because the dynamics of educational/formative processes cannot be researched by means of measurable procedures every time. (our highlight)

⁵Cambi, F., *Il congegno del discorso pedagogico. Metateoria ermeneutica e modernità*, Bologna, CLUEB, 1986, p.52

Thus, besides *the experimental method*, *the pedagogy* requires a method of epistemologic reflection. This will filter, order, norm and even regulate the complex correlations placed at the level of the operation structure of education and instruction which ensure the nucleus of the scientificity of pedagogy. In this special epistemologic perspective, Riccardo Massa observes the following : “the pedagogy before experimenting should better defence its scientificity”.⁶

The general pedagogy tends to integrate the contributions that a correct experimental research is capable to produce without falling in that methodological reductionism which will suffocate the power of knowledge⁷.

The crisis of *the positiviste paradigm* has induced to pedagogy the need of a critical reflection on its possibility to provide to *the subject* a sure reference board which is objectively valid, with which this should confront effectively its capacities and competences.

2. The hermeneutic method

The hermeneutic method, supported at the level of some synchronous and diachronous historical investigations, values the lesson of *the empirism* and gives an increased attention to the conceptual rigour of its own science. It privilegedes the comprehension of a phenomenon according to the necessary teleological explanation having in view the building of a paradigm capable to catch the differences and complexity. Betting on interpretation, in an open social context, *the hermeneutic method* takes in calculation the fact that *no explanation is possible without comprehension and nor the comprehension without explanation*⁸.

“In human sciences, the “explanatory” moment cannot aspire to the generality of the physics laws; on the contrary, it must target the understanding of what makes unmistakable the individuality. We can understand the person’s acts or a historical episode, even if we cannot explain it as a chemical reaction can be explained; this is due to the complexity of constituent relations of the psychic and social reality and of the culture” (which *solicit interpretation* - our note). Even the pedagogy as a distinct field of scientific research “must follow this path if it doesn’t want to miss its target”, its aspiration at acquiring an autonomous status from the epistemologic and social point of view.

As a *socio-human science*, *the general pedagogy* cannot be limited only to the formation and education of man following the criteria of positive science. It tends towards “to understand” and “to interpret” the educational-formative dimension of the man in teleologic, axiologic and prospective vision.

⁶ Idem, p.64

⁷ Sola G. (a cura di), *Epistemologia pedagogica. Il dibattito contemporaneo in Italia*, Milano, Bompiani, 2002, p.34

⁸ Minichiello, G., *Il mondo interpretat. Educazione e teoria della conoscenza*, Brescia, La Scuola, în Orefice, P., și Sarracino V., (coord) *Cinquant’anni di pedagogia a Napoli*, Napoli, Liguori Editore, 2006, p.246

Methodology of pedagogical research

The pedagogy assumes *the interpretation* as euristic paradigm. *The hermeneutics* reveals new ways of research. Any educational act involves people who have a *subjective identity* and a *personal history* which cannot be neglected. "If the objective of the empirical-experimental method is to control, to quantify and check, the purpose of the hermeneutic paradigm is to understand, interpret and develop significance processes. Both methods pursue the improvement of knowledge of an event-test which clearly differs from each other".⁹

Having roots very well stuck in the classical culture, in the 20th century the hermeneutics in its quality of philosophical science, as methodology (method) or even paradigm, has a relaunch, especially by the contributions of W. Dilthey¹⁰, M. Heidegger (M. Heidegger, *Essere e tempo*, trad. Torino, Utet, 1969), and especially by the work of H.G. Gadamer (*Verità e metodo*, trad., Milano, Bompiani, 1983).

The hermeneutic method promoted during the 20th century once with the maturation of the epistemic discourse of the pedagogy, involves "the interpretation of education, the understanding of its essence, achievable at the level of determinism of teleologic type specific to the social-human sciences"¹¹.

In our opinion, *the hermeneutics*, as paradigm of research specific in the area of social-human sciences, finds in pedagogy a fertile field because *the educational relation* supposes a permanent dialogue between educator and educated, dialogue which leads through means of questions and answers to a mutual communicative understanding. The educational experience becomes *hermeneutic experience* as long as the actors involved offer for *reciprocal interpretation*, as like a text that is to be written.

The educational reality is an image of the historical-social reality. In order to interpret the educational reality, the pedagogy appeals many times to other sciences such as sociology, anthropology, psychology, economy, philosophy. It is conscious of *the risk that this interest of knowledge supposes to loose its own autonomy or to be identified with other sciences*. That is why all the provided information by other sciences are reported to the epistemic nucleus of pedagogy, to the basic function of education (*formation-development of the human personality*), to the central structure of education, based on the correlation *educator-educated*, necessary in any school and social environment (see Sorin Cristea, op.cit., 2010).

The hermeneutic method sets up within the pedagogical discourse, as a paradigm appeared in the 1990's. As Franco Cambi has shown "the hermeneutics was (...) a real turning point in the contemporary thinking, who has repropounded certain classical problems of thinking/action/existence beyond the contexts (linguistic, conceptual etc) standardized in critical and radical form, defying the habit and traditions and focusing the thinking its status of adventure and open bet". It has in view an interactive discourse, circular, problematic and intentional, irreducible at any form of linearity

⁹ Sola G. (a cura di), *Epistemologia pedagogica. Il dibattito contemporaneo in Italia*, Milano, Bompiani, 2002, p.35

¹⁰ Dilthey, W., *Ermeneutica e religione* (traducere în italiană), Bologna, Patron, 1970, p.49-91

¹¹ Cristea, S., (coord. gen.) *Curriculum pedagogic*, vol.I, București, Editura Didactică și Pedagogică R.A., 2006, p.10

and repetitiveness, so long as it is in “connection with the event, with that event, with its singularity/particularity”¹².

In this direction, Mario Gennari stated that “a pedagogy understood as a global lecture of education” cannot neglect its capacity necessary to evolve and to engage “in terms of a science and an *interpretive* character”¹³.

Through *the hermeneutic paradigm*, the *general pedagogy* can balance the parametres of objectivity provided by *the empirical-experimental method* with the criteria of *subjectivity* (revealed by hermeneutic). This will lead both to the enrichment of the system of pedagogy knowledge and the avoidance of the limits that the empirical researches involve.

The pedagogy and hermeneutics are the replacers of a necessary dialogue. The reason of the meeting between *hermeneutics* with *pedagogy* is profound and aims their essence, there is a mutual exchange of experiences between them. The motivations of this dialogue can have a character:

- *cultural-historical* – in order to understand the evolution of education in different social-cultural contexts;
- *theoretical-philosophical* – in order to interpret the moral values specific to man, determining for the durable development which give ultimate content to the activity of education,
- *Ethical-anthropological* – in order to understand the epistemologic building of the pedagogical concepts and the criteria of development and classification of the fields in their way from pedagogy to the sciences of education.

Franco Cambi supports that *the pedagogy* in its essence is a *hermeneutic science*. Thus, “the logics of pedagogy (of the pedagogical discourse) is hermeneutic, founded on *understanding* (both at *epistemologic* and *cognitive* level)”. F.Cambi identifies the main points of meeting between *hermeneutics* and *pedagogy* as being constituted of: *the pedagogical epistemology*; *the pedagogical-educational event to read a text*; *the educational report*, *the pedagogical communication*; *the school theory*; *the general didactics* and its applications, the aesthetic aspect.

The hermeneutics reveals either a *pedagogical-didactic model*, either an interpretative key of the educational event. It tends to be applied to the didactic contents, subjects of education, the educational context.

The interpretation is a cognitive process of adaptation between *subject* and *object*, a critical and dialectic pathway. The pedagogy is a hermeneutic science because the educational action is hermeneutic: it is interpretative, it is comprehensive, it is historical. The interpretation represents a key-category of pedagogy – as social-human science – and of education – as object specific to research. “The interpretation signifies a process of critical thinking, open, tensional, never closed, on the contrary interminable”¹⁴

¹² Cambi, F., *Manuale di filosofia dell'educazione*, Roma-Bari, Laterza, 2000, p.95-96

¹³ Gennari, M., *Interpretare l'educazione: pedagogia, semiotica, ermeneutica*, Brescia, La Scuola, 1992, p.6-7

¹⁴ Idem

3. The historical method

The historical method is, for Mauro Laeng, *the most privileged method of pedagogical research*. Each man, each group, each culture has its own characteristics and the history remembers the exceptional individuals (geniuses, heroes, prophets) and the exceptional events.¹⁵

The nature's sciences, by means of *naturalistic methods*, as *empirical, experimental research* treat the phenomena as like as, to a certain point they can be comparable or substitutable between them. Instead, in *the human sciences* the things can not be approached as for *nature's sciences*, because there are no individuals, groups, societies, identical cultures from all the points of view.

Each human reality is individual and *non-repetable* it is thus, a *historical reality*. *The specificity of the research in socio-human sciences* results from here – thus, in *pedagogy* as well – which puts accent not only on *the hermeneutic method* but also on *the historical method*. In certain cultural contexts, *the historical method* is completed by *the rhetorical method*.

4. The rethorical method

The rhetorical method has a special status due to the fact that it is associated with a certain historical age. Thus, it is considered that in the classical culture, *the rhetorical method* accompanies *the historical method*.

On this background, Mauro Laeng appreciates that *the rhetorical method* is not practically a method of research. It appears especially as a *pedagogical intervention of exhortative type* which enflames the didactic discourse, urges to action and knowledge through affective and motivational force of the articulated words in the educational message. Its operational value, even instrumental appears highlighted in the specific framework of the historical and hermeneutic research.

On the other hand, in the extent in which the research in the social-human field is dependent on the dynamics specific to the actions or individual facts, this situation makes necessary the use of *the descriptive method* in the context of *pedagogy* and of *the sciences of education*.

5. The descriptive method

The descriptive method analyses the singular educational acts. It has in attention different aspects, suppositions, developments, particular, contextual evolutions of the

¹⁵ Laeng, M., *Nuovi lineamenti di pedagogia*, Brescia, La Scuola, 1987, p.233

actions with formative purpose. In this direction, *the anamnesis, the diagnosis, the prognosis* of the educational act are significant.

By *descriptive method*, the objective sides of the educational events are highlighted which offer the possibility of a scientific research inspired from the naturalist type. Thus, many *educational facts* can be registered, classified because they have not only *qualitative* but also *quantitative* characteristics.

By reason of *quantitative characteristics*, the educational facts can be summed after *frequencies*, expressed in percentage for groups or sub-groups with subjects with the same characteristics or different characteristics. For instance, the *docimologic research* can present numerous quantitative aspects, specific for the student in relation to evaluation, constituting a relevant part of *the scientific research* in today's pedagogy.

The historical and individual component does not disappear due to this direction of studies. It is possible to complete the transversal research with longitudinal research which observes the same subject or group of *subjects* during a certain time.

When this *objective methodologic* point of view is adopted, we can speak about *an experimental pedagogy* in the proper sense. It is highlighted by some specific characteristics. Thus, the experimental pedagogy appeals to methods of quantitative type, in contexts in which *the variables* are measured with proximate scales. It supposes the operation with *independent* and *dependent* variables. The intentionally proposed modifications measure the effects registered concomitantly at the level of the two variables categories. Even if the two *variables* do not represent the *cause* and *effect*, the experimental pedagogy can observe the relation existing between them, valuing the results at the level of some conclusions with restrictive, situational character.

In a broad sense, *the descriptive method* can be used in two specific directions. On the one side, in improving the techniques of analysis of human sciences, and on the other side, in the attempt to adjust its own method more approached to the natural sciences. *The human sciences, due to the complexity of their object, have conserved on a broad sense the philosophical research lines: the empiric observation doubled by the rational reflection for "the whole" or "the totality"*.

We consider this approach necessary because "it is difficult to understand phenomena such as life, conscience, intelligence, sociality, culture, *education* without respecting the organic totality"¹⁶. A special accent is put on the idea of the need to understand uniqueness. *Understanding* is more important than the attempt to explain uniqueness by means of a particular case produced by general laws by a linear research, on a circuit of the type *stimulus - answer*. At its turn "the reductionism" is rejected, meaning we excluded the idea according to which an order with a certain degree of complexity can be started in simpler elements of an inferior order.

¹⁶ Laeng, M., *Nuovi lineamenti di pedagogia*, Brescia, La Scuola, 1987, p.234

6. The problems method- the pedagogical problematicism

“*The pedagogical problematicism*” aims an interpretative and operational model of the pedagogical processes. For Franco Frabboni, “the pedagogical problematicism outlines a rational model whose *theoretical* and *empirical* margins appear illuminated by the horizon of possibility and that of the anti-dogmatism”¹⁷

1. *The horizon of possibility* is that which values the concept of model, understood as “conceptual scheme according to which various aspects of educational life can be correlated and ordered in relation to a “teleologic” principle which ensures coherence and organicity”¹⁸. The model can be understood as ideal paradigm of organizing the educational life, open to the multiple pathways of the possible connected to the coordinates of the reality.

2. *The anti-dogmatic horizon* is relevant to the pedagogical model which applies to the contextual level, “the transcendental”, “the dialectical” and “the phenomenological” method:

a. *The transcendental method* attributes a « limit » teleologic respiro to the pedagogical model.

b. *The dialectical method* has the task to destroy those speculative edifices which try to contain and solve the problematic nature of the educational experience – complex, dynamic, open – irreducible to a dogmatic, static, restrictive, unilateral, closed register.

c. *The phenomenologic method* tries to guarantee a maximal openness to the pedagogical model being oriented towards validating the *subjective* and *objective* aspects, psychological and social, historical and cultural of the educational experience¹⁹. The *phenomenologic* analysis understands the moment of universality of experience ensuring “the totality of *significances* that it expresses, the values it elaborated, the *finalities* in which it constitutes, without compromise” in forms and perspectives which do not bring any “prejudice to their originality and autonomy”²⁰.

The report between *philosophy* and *education* finds numerous confirmations in the current themes of *phenomenology* and *hermeneutics*. *The phenomenological pedagogy* promotes and cultivates especially the theme of *communicative intentionality* and *inter-subjectivity*, as educational and pedagogical dimensions.

¹⁷ Frabboni, F., *Nel nome de problematicismo pedagogico*, în Borrelli, M., *La pedagogia italiana contemporanea*, vol.I, ediția a III-a, 1997, p.183

¹⁸ Bertin, G. M., *L'idea pedagogica e il principio di ragione in A. Banfi*, Roma, Armando, 1961, p.91

¹⁹ Idem, p.94

²⁰ Bărsănescu, Ș., *Dicționar de pedagogie contemporană*, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1969, p.18-19

7. Conclusions

Being given the complexity of the educational phenomenon, the pedagogy cannot solve all the problematic situations, by using only one method of research. The methodology of the pedagogical research is one with an open character, self-improvable, on the extent of its object of research, extremely large and profound. The pedagogy, in its demarche uses a large range of methods such as: the empirical-experimental method, the hermeneutical method; the historical method; the rhetorical method, the descriptive method; the problems method – *the pedagogical problematicism*.

References

- [1] Bârsănescu, Ș., (1969) Dicționar de pedagogie contemporană, București, Editura Didactică și Pedagogică
- [2] Bertin, G. M., (1961) L'idea pedagogica e il principio di ragione in A. Banfi, Roma, Armando
- [3] Cambi, F., (1986) Il congegno del discorso pedagogico. Metateoria ermeneutica e modernità, Bologna, CLUEB
- [4] Cambi, F., (2000) Manuale di filosofia dell'educazione, Roma-Bari, Laterza
- [5] Cambi F., Santelli Beccegato, L., (a cura di), (2004) Modelli di formazione. La rete teorica del Novecento pedagogico, Torino, UTET
- [6] Cristea, S., (coord. gen.) (2006) Curriculum pedagogic, vol.I, București, Editura Didactică și Pedagogică R.A
- [7] Dilthey, W., (1970) Ermeneutica e religione, Bologna, Patron
- [8] Frabboni, F., (1997) Nel nome de problematicismo pedagogico, în Borrelli, M., La pedagogia italiana contemporanea, vol.I, ediția a III-a
- [9] Gennari, M., (1992) Interpretare l'educazione: pedagogia, semiotica, ermeneutica, Brescia, La Scuola
- [10] Gennari, M., Kaiser, A., (2000) Prolegomeni alla Pedagogia Generale, Milano, Bompiani
- [11] Laeng, M., (1987) Nuovi lineamenti di pedagogia, Brescia, La Scuola
- [12] Massa, R., (1979) Teoria pedagogica e prassi educativa, Bologna, Cappelli
- [13] Minichiello, G., (2006) Il mondo interpretat. Educazione e teoria della conoscenza, Brescia, La Scuola, în Orefice, P., și Sarracino V., (coord) Cinquant'anni di pedagogia a Napoli, Napoli, Liguori Editore
- [14] Sola G. (a cura di), (2002) Epistemologia pedagogica. Il dibattito contemporaneo in Italia, Milano, Bompiani

From Continuous to Discrete via V&V Bar

Thomas Vougiouklis¹

Received: 09-10-2018. Accepted: 01-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.439

©Thomas Vougiouklis



Abstract

The ‘continuous’ and the ‘discrete’ in nature and in science live and fight forever. The questionnaires and the Lickert scales are indispensable and widely used tools in social sciences research. Vougiouklis & Vougiouklis bar is a new tool introduced as an alternative to Lickert scales. We believe that such an alternative might offer some solutions to problems that crop up during the fight between continuous and discrete. Nevertheless, the greatest contribution of the V&V bar is that it offers the researchers freedom in all stages of the research procedure using a questionnaire.

Keywords: continuous, discrete, questionnaires, Lickert scale, V&V bar

1 Continuous–Discrete

Mathematical models are widely used in almost every field of empirical research to reinforce the reliability of each individual research. This is because mathematicalisation of a problem could make its results recognizable and comparable with other results. In other words, representing an actual research object or a phenomenon with numbers and figures or graphs might be the

¹ Emeritus Professor of Mathematics, Democritus University of Thrace, Greece; tvougiou@eled.duth.gr.

simplest and the most recognizable way of reading the actual results.

The *discrete* in mathematics starts from *characteristic function* which in Set theory states that an element belongs or not to a set. It is the analogous in Logic Theory to true – false. Discrete objects can be easily achieved by computers.

The *continuous* appears in nature in all phenomena (Αριστοτέλους 2003) but, when necessary, we can easily transfer it into a discrete. The *numbers* and the *order* help in transforming the continuous into discrete and Geometry configures the continuous. Similarly, analysis can do this by using the *limit*, as well. However, there is always a fight between the *point* and the *atom*, characteristic representatives of the continuous and discrete respectively. Therefore, sometimes we believe that atoms were invented in order to be transferred. Finally, it is very hard to approach the real numbers by rational numbers.

2 Hyperstructures

A relatively new branch of algebra is the theory of hyperstructures introduced by F. Marty in 1934. The hyperstructure theory, or multivalued theory or polysemy theory, is strongly related to Fuzzy Theory as well. Therefore, there are a lot of applications on other sciences including the social ones. For basic definitions and applications on the related theory one can refer to books as (Corsini 1993; Davvaz & Leoreanu 2007; Vougiouklis 1994) and related papers as (Chvalina, Hoskova 2007; Maturo, Sciarrra, Tofan 2008; Vougiouklis 1991; 2009; 2011). We focus on the large class of hyperstructures called H_v -structures introduced in 1990 by Vougiouklis, which satisfy the weak axioms where the non-empty intersection replaces the equality.

Basic definitions on the topic are the following:

In a set H equipped with a hyperoperation (abbreviation, hyperoperation = hope)

$$\cdot : H \times H \rightarrow P(H) - \{\emptyset\}.$$

we abbreviate by WASS the weak associativity:

$$(xy)z \cap x(yz) \neq \emptyset, \quad \forall x, y, z \in H$$

and by COW the weak commutativity:

$$xy \cap yx \neq \emptyset, \quad \forall x, y \in H.$$

The hyperstructure $(H, \cdot)$ is called H_v -semigroup if it is WASS, it is called H_v -group if it is reproductive H_v -semigroup, i.e., $xH = Hx = H$, $\forall x \in H$.

The hyperstructure $(R, +, \cdot)$ is called **H_v -ring** if both $(+)$ and $(\cdot)$ are WASS, the reproduction axiom is valid of $(+)$ and $(\cdot)$ is *weak distributive* with respect to $(+)$.

Motivations (Vougiouklis 1994):

1. The quotient of a group with respect to an invariant subgroup is a group.
2. The quotient of a group with respect to any subgroup is a hypergroup.
3. The quotient of a group with respect to any partition is an H_V -group.

The main tool to study hyperstructures are the fundamental relations β^* , γ^* and ε^* , which are defined, in H_V -groups, H_V -rings and H_V -vector spaces, respectively, as the smallest equivalences so that the quotient would be group, ring and vector space, respectively. A way to find the fundamental classes is given by theorems as the following (Vougiouklis 1994).

Theorem. Let $(H, \cdot)$ be an H_V -group and denote by U the set of all finite products of elements of H . We define the relation β in H by setting $x\beta y$ if and only if, $\{x, y\} \subset u$ where $u \in U$. Then β^* is the transitive closure of β .

An element is called *single* if its fundamental class is singleton (Vougiouklis 1994).

Fundamental relations are used for general definitions. Thus, an H_V -ring $(R, +, \cdot)$ is called ***H_V -field*** if R/γ^* is a field. Then the H_V -vector space can be defined.

Let $(H, \cdot)$, $(H, *)$ be H_V -semigroups defined on the same set H . The hope $(\cdot)$ is called *smaller* than $(*)$, and $(*)$ *greater* than $(\cdot)$, if and only if, there exists an automorphism $f \in \text{Aut}(H, *)$ such that $x \cdot y \subset f(x * y)$, $\forall x, y \in H$. Then we say that $(H, *)$ contains $(H, \cdot)$. If $(H, \cdot)$ is a structure, then it is called *basic* structure and $(H, *)$ is called *H_b -structure*.

The Little Theorem. Greater hopes than the ones which are WASS or COW, are also WASS or COW, respectively.

A very large class of H_V -structures is defined for any given operation on a set together with any map on the set.

Definition. Let $(H, \cdot)$, be a groupoid (resp., hypergroupoid) and $f: H \rightarrow H$, be any map. We define a hope (∂) on H , called theta-hope or ∂ -hope, as follows

$$x\partial y = \{(x) \cdot y, x \cdot f(y)\}, \forall x, y \in G \text{ (resp. } x\partial y = (f(x) \cdot y) \cup (x \cdot f(y)), \forall x, y \in G)$$

If $(\cdot)$ is COW, then ∂ is COW. If $(\cdot)$ is associative, then ∂ is WASS.

A very interesting and ‘strange’ very large class of H_V -structures, introduced by Vougiouklis in 1988, is the following:

Definition. An H_V -structure is called ***very thin***, if and only if, only one of its operations is a hope and for this hope, all results are singletons except one which has result a set. Thus, we obtain very thin H_V -structures if we enlarge only one result of any structure.

We referred only to the above two large classes just to show how we can find applications from any applied science, the social ones included, to the H_V -structure theory. Therefore, H_V -structures are offered as models in several sciences.

3 Questionnaires

In every empirical research three main stages could be normally identified: *design*, *implementation* and *processing of the results*. Main tools in an empirical research include *the questionnaire* where Likert scales are normally and widely used. Likert scales are often used to measure respondents' attitudes by asking the extent to which they agree or disagree with a question or a statement. Likert scales may seem easy to analyze but there are some important issues a data analyst should consider. More specifically, there are certain shortcomings usually identified in this type of scales and they include the range of the scale which each time is upon the researcher to decide as it is not standard how many different subdivisions, or grades, should be used. Moreover, this is not an easy job to accomplish as it is quite different to have 3 or 4 or 5 subdivisions since there are certain problems to overcome in each case. Such problems include lack of a medium choice in a 4-grade scale. Another shortcoming of typical Likert scales is the difficulty of verbally refining the difference between different subdivisions and make them clear to the participants, especially to less sophisticated ones. This is not an easy process as many researchers report that it takes their subjects longer to comprehend what each subdivision represents on their scale rather than accomplish the actual test. Such a problem is of course not really a matter of language but it involves a number of different factors such as social and psychological. Finally, in the stage of processing the results, the researchers will have only one possibility of working them out, the one they decided to establish when initially designing the experiment. Such a decision, though, might deprive the researchers of the possibility to explore other parameters which might crop up in the process, or even try different subdivisions for either a more accurate calculation or to make their results comparable with another researcher's, who has used different scale.

In order to facilitate the whole process, we introduced an innovation which combines social sciences with Fuzzy Set Theory (Zadeh 1965). This innovation actually suggests to substitute the discrete Likert scales with the continuous V&V bar, minimizing the time and effort of filling in and processing of the questionnaires. Such radical reduction of time is the result of transferring the transformation of the continuous to discrete, from the informant to the researcher.

4 The Bar

During last decades hyperstructures seem to have a variety of applications not only in other branches of mathematics but also in many other sciences

From Continuous to Discrete via V&V Bar

including the social ones. A new application in questionnaires, which combines hyperstructure theory and fuzzy theory, is to replace the scale of Likert by the Vougiouklis & Vougiouklis bar, V&V bar for short.

The suggestion is the following (Kambaki-Vougioukli, Vougiouklis 2008).

Definition. In every question substitute the Likert scale with 'the bar' whose poles are defined with '0' on the left end, and '1' on the right end:

0 ————— 1

The subjects/participants are asked, instead of deciding and checking a specific grade on the scale, to cut the bar at any point they feel expresses their answer to the specific question.

The final suggested length of the bar, according to the Golden Ratio, is 6.2 cm (Vougiouklis, Kambakis-Vougiouklis 2011; 2013; 2015).

Likert Scale disadvantages. There are certain shortcomings usually identified in this type of scales and they include the range of the scale: each time is upon the researcher to decide how many different subdivisions or grades should be used, as it is not standard. Moreover, this is not an easy job to accomplish, as it is quite different to have even or odd number of subdivisions, because of the lack of a medium choice in an even-grade scale. The most serious problems though constitute the difficulty of the limit discrimination of the actual partition. This is another shortcoming of typical Likert scales for the researcher: the difficulty of verbally refining the difference between different grades of a scale and makes them clear to the participants.

Advantages of the Bar. There are identified certain advantages concerning the use of the bar compared to that of a scale during both stages of filling as well as processing a questionnaire. The participants do not have to try to identify the difference between the subdivisions and do not need any special training in order to be able to cut the bar appropriately, i.e. understanding differences that concern linguistic refinement. By contrast, they can do it intuitively avoiding any verbal processing. Yet, what is the main advantage of the bar is that it provides the potential for different types of processing, Likert scales cannot. Therefore, it gives the initiative to the researcher to explore if the given answers follow a special kind of distribution. The researcher can divide the bar into equal steps or the Gauss distribution or parabola, by putting in the same class all segments that belong to the equal step or to equal-area spaces according to Gauss distribution or some kinds of parabola (Kambakis-Vougiouklis, Karakos, Lygeros, Vougiouklis 2011; Kambakis-Vougiouklis, Nikolaidou, Vougiouklis 2017). They lead to special H_v -structures using theta-hopes. Thus the researcher can correct any kind tendency, for more accurate results. A possibility of choosing amongst alternatives is offered by using fuzzy logic in the same way

as it has already been done combining mathematical models with multivalued operation. The bar gives the researchers the possibility to ‘escalate’ the answers without having to decide in advance how many different grades would be used.

The only disadvantage of the bar is to transfer the data collection to a computer for elaboration. However, there is now a program of filling in a questionnaire on a computer such that the results automatically can be transferred for research elaboration (Nikolaidou, Vougiouklis 2012). This application overcomes the problem of inputting data from questionnaires to processing and eliminates time of data collection, transferring data directly for any kind of elaboration. The application has been implemented using Visual Basic and the data is being saved on a Microsoft Access Database. The application is based on “events” and an OleDbConnection is used to connect the program with the database. Filling-in such questionnaire can be easily achieved by using this application, as it is based on a very simple user interface. The participants asked to ‘click’ on the bar, to indicate the point that satisfies their answer on the question made. The user has the opportunity, to change his answer by ‘clicking’ on another point any time before final submit. The results are being saved on a simple database (Microsoft Access Database) indicating the exact point each participant has “cut” the bar.

The main advantage is the fact that it is much quicker to fill in and much easier to explain the procedure to participants.

A research example of the above is the following:

An experiment took place in three schools in Komotini, Greece. 400 students, 14–15 years of age, participated. The purpose of the survey was to investigate their employment of learning strategies while learning a foreign language. The tool used was the 50-item Strategy Inventory Language Learning, questionnaire, widely known as SIILL. There were six categories of strategies, namely mnemonic, cognitive, compensatory, metacognitive, affective and social and all participants had to specify how often they use each strategy and how confident they feel that the application of each strategy facilitates their learning. By contrast to widely used surveys in Greek schools where questionnaires are mainly filled in on paper, the students were happy to work on the computer and although they actually had to answer 100 questions, or twice the same question, they finished the test in 11–12 min than the 18–20 min normally demanded for the 50-item paper version. That was 30% of the of the time used on any Lickert scale. The result was unexpected, and we verified it in a series of successive researches. Thus, we claim that the only one possible explanation is the following:

The time to cut the bar is 30% of the time needed to make a decision on a Lickert scale. That means that in questionnaires *it is faster and easier for researchers to transfer the continuous to discrete than the participants.*

5 Conclusion

The ‘continuous’ and the ‘discrete’ in nature and in science live and fight forever. The questionnaires and the Lickert scales are necessary tools in research in social sciences. The Vougiouklis & Vougiouklis bar is a new tool, alternatively used to Lickert scales. This replacement connects the questionnaires, in the stage of processing the results, with the hyperstructures and fuzzy set theory. We believe that this replacement gives some answers on the fight between continuous and discrete. The V&V bar relieves participants from the difficult process of transforming the continuous into discrete, leaving it to the researchers. Due to this freedom, the time to complete the questionnaires is minimized.

To recap, the V&V bar leaves to the participants the ‘continuous’ which is achieved easily, clearly, naturally and fast, while it gives the researchers the privilege to be the exclusive elaborators of the ‘discrete’ and transformers of the ‘continuous’ into ‘discrete’. Apparently, sometimes the easy job is not the one which appears to be.

References

- [1] Αριστοτέλους. (2003). Φυσικής Ακροάσεως, ή περί κινήσεως το Ζ’, Βασιλεία 1531, Εκδ. Μίλητος, Αθήνα. (in Greek)
- [2] Chvalina J., Hoskova S. (2007). Modelling of join spaces with proximities by first-order linear partial differential operators. *Ital. J. Pure Appl. Math.* 21, 177-190.
- [3] Corsini P. (1993) *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore.
- [4] Davvaz B., Leoreanu V. (2007). *Hyperring Theory and Applications*, Int. Academic Press.
- [5] Kambaki-Vougioukli P., Vougiouklis T. (2008). Bar instead of scale, *Ratio Sociologica*, 3, 49-56.
- [6] Kambakis-Vougiouklis P., Karakos A., Lygeros N., Vougiouklis T. (2011). Fuzzy instead of discrete, *AFMI*, V.2, N.1, 81-89.
- [7] Kambakis-Vougiouklis P., Nikolaidou P., Vougiouklis T. (2017). Questionnaires in Linguistics using the Bar and the H_v -structures, *Studies in Systems, Decision and Control* 66, Springer, 257-266.

- [8] Maturo A., Sciarrra E., Tofan I. (2008). A formulation of some aspects of the Social Organization by means of fuzzy set theory. *Ratio Sociologica*, V.1,N.1,5-20.
- [9] Nikolaidou P., Vougiouklis T. (2012). H_v -structures and the Bar in questionnaires, *Ital. J. Pure Appl. Math.* N.29, 341-350.
- [10] Vougiouklis T. (1991). The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield, 4th AHA, Xanthi, Greece (1990), World Scientific, 209-217.
- [11] Vougiouklis T. (1994). Hyperstructures and their Representations, *Monographs in Math.*, Hadronic.
- [12] Vougiouklis T. (2009). Hyperstructures as models in social sciences, *Ratio Sociologica*, V.2, N.2, 21-34.
- [13] Vougiouklis T. (2011). Bar and Theta Hyperoperations, *Ratio Mathematica*, 21, 27-42.
- [14] Vougiouklis T., Kambaki-Vougioukli P. (2011). On the Use of the Bar. *China-USA Business Review*, V.10, No.6, 484-489.
- [15] Vougiouklis T., Kambakis-Vougiouklis P. (2013). Bar in Questionnaires, *Chinese Business Review*, V.12, N.10, 691-697.
- [16] Vougiouklis T., Vougiouklis P. (2015). Questionnaires with the 'bar' in social sciences, *Science & Philosophy*, 3(2), 47-58.
- [17] Zadeh L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 12/2, 94-102.

Healing the Psychic Split

Alina Vişan[⊗]

Received: 23-11-2018. Accepted: 23-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.441

©Alina Vişan



Abstract

This paper is dealing with one of the greatest novels in the British literature, *The Golden Notebook* by Doris Lessing. The novel and its main character, Anna Wulf can be interpreted in myriad ways, but our analysis is a psychoanalytical one. The introductory part of the paper gives the definitions of the psychoanalytical words that will be later on used in the paper.

In *The Golden Notebook*, the life of Lessing's main character offers an understanding of issues such as political repression, sexual abuse, single parenthood, writer's block, and the women's movement.

Anna Wulf's fragmented personality is caught in the four notebooks that she writes, each one being concerned with one of Anna's selves. Anna is the most complicated heroine analysed and we will try to discover which of her various selves are confirmed and which are repressed. In Anna's process of healing, there are two moments of climactic confirmation: the first one when she admits that she is mad and the second one when she admits she has a writer's block.

Keywords: psychic split, selves, healing, personality, writer's block, madness.

[⊗] Universitatea "Eftimie Murgu" din Reşiţa, P-ţa Traian Vuia, nr. 1-4, 320085-Reşiţa; a.visan@uem.ro.

1. Introduction: psychoanalytical background

Before psychoanalyzing Doris Lessing's heroines, we should explain and define some psychoanalytical concepts which would be used in this paper: self, ego, identity and splitting of personality.

All these definitions were taken from Charles Rycroft's book *A Critical Dictionary of Psychoanalysis*. (Rycroft, 1968)

“SELF – 1. When used by itself: the subject regarded as an agent, as being aware of his own identity and of his role as subject and agent.

2. As part of a hyphenated word: the subject regarded as the object of his own activity.

The self differs from the ego of psychoanalytical theory in that:

a. the self refers to the subject as he experiences himself while the ego refers to his personality as a structure about which impersonal generalizations can be made; and that

b. the ego, as defined by Freud, contains repressed, unconscious parts which cannot be recognized by the self as parts of itself. One of the existential criticisms of classical analytical technique is that its theory, particularly its meta-psychology, leaves no room for itself.”

Even the specialists in psychoanalysis recognize that there is often a great confusion between the notion of “self” and that of “ego”. So, we shall give the definition and the explanation of the notion of “ego” in order to highlight the differences between the two terms.

“EGO – A structural and topographical concept referring to the organized parts of the psychic apparatus, in contrast to the unorganized id...” The ego is that part of the id which has been modified by the direct influence of the external world... The ego represents what may be called reason and common sense, in contrast to the id, which contains the passions... in its relation to the id it is like a man on a horseback, who has to hold in check the superior strength of the horse; with this difference, that the rider tries to do so with his own strength while the ego uses borrowed forces...” (Freud, 1923). For analysts who do not subscribe to the notion of an undifferentiated id out of which the ego develops, the ego is either: a. the whole psyche: “The pristine personality of the child consists of a unitary dynamic ego” (Fairbairn, 1952) b. that part of the personality which relates to objects and/or is formed by introjection of objects; or c. that part of the personality which is experienced as being oneself, which one recognizes as “I”.

Ego and self are often confused; they probably belong to different frames of reference, the ego belonging to an objective frame of reference which views personality as a structure and self belonging to a

Healing the psychic split

phenomenological frame of reference which views personality as experience.”

All Doris Lessing’s characters are in search of their identity and this is the reason why we shall explain this notion from a psychoanalytical point of view.

“IDENTITY – The sense of one continuous being as an entity distinguishable from all others. According to Erikson (1953), many aspects of ego development can be formulated in terms of the growth of the sense of identity, an identity-crisis of greater or lesser severity being characteristic of late adolescence and early adulthood. The sense of identity is lost in fugues and perverted in schizophrenic delusions of identity in which, typically, an underlying sense of nonentity is compensated for by delusions of grandeur. Many of the problems about identity centre round the part played by identifications in enhancing or diminishing identity. Failure to identify with parents, particularly the parent of one’s sex, during childhood is held to diminish the sense of identity, but failure to misidentify with them in adolescence has a similar effect. The sense of identity is probably synonymous with self-awareness and can be regarded as the subjective equivalent of the ego, which psychoanalytical theory tends to use only objectively. It is not clear whether the search for identity which preoccupies many American writers is a search for a role or for enhanced self-awareness.”

Another concept used in this chapter is the splitting of personality or of identity.

“SPLITTING – Process by which a mental structure loses its integrity and becomes replaced by two or more part-structures. Splitting of both ego and object is described. After splitting of the ego, typically only one resulting part-ego is experienced as ‘SELF’, the other constituting a (usually) unconscious “split-off part of the ego”. After splitting of an object, the emotional attitude towards the two part-structures is typically antithetical, one object being experienced as ‘GOOD’ (accepting, benevolent, etc), the other as “BAD” (rejecting, malevolent, etc). Splitting of both ego and object tends to be linked with denial and projection, the trio constituting a schizoid defence by which parts of the self are disowned and attributed to objects in the environment. The phrase “splitting of the ego” is used in four confusingly different senses:

a. To describe gross splitting of the personality into two parts as in dual or multiple personality. In this sense it is synonymous with dissociation.

b. To describe the ego in the sexual perversions, particularly fetishism. According to Freud (1927, 1938), the ego of the fetishist is split inasmuch as his attitude towards his object enables him to disavow castration anxiety which another part of his ego admits.

c. To describe reflective self-awareness. According to Sterba (1934) psychoanalytical treatment requires the patient to split his ego, one part identifying with the analyst and observing and reflecting on the free

associations produced by the other. In this sense, splitting, so far from being a pathological phenomenon, is a manifestation of self-awareness.

d. To describe the developmental and defensive process described above.” (op. cit, p. 98)

There are psychological concepts on which the theorists have different opinions. S. Freud and C.G. Jung have walked the same way up to a point and then Jung develops his ideas in a new direction. C.G. Jung tells us in one of his lectures: “I started out entirely on Freud’s lines. I was even considered to be his best disciple. I was on excellent terms with him until I had the idea that certain things are symbolical. Freud would not agree to this, and he identified his method with the theory and the theory with the method. That is impossible, you cannot identify a method with science.” (Jung, 1995:140)

The term ‘unconscious’ is defined differently by Jung and Freud. Jung refuses to recognize the word ‘unconscious’ in the meaning Freud gives to it and uses ‘unconscious’ in a way that we have come to consider as what Freud calls the ‘Id’. C. G. Jung explains: “to Freud the unconscious is chiefly a receptacle for things repressed. He looks at it from the corner of the nursery. To me it is a vast historical storehouse.” (op. cit, p. 143)

Another point, on which the psychologists disagree, is the definition of schizophrenia and of the splitting of personality. Some of them sustain that the split of personality is an accessory symptom of schizophrenia while others state that it is an uncontested definition of schizophrenia. But the latest introductory reading to psychology, or schizophrenia, now solemnly asserts that schizophrenia is not “split personality”. The understanding of schizophrenia as split personality is troubling, since it has no actual correspondence in its psychopathology and nurtures a distorted image of the disease. (Schomerus, 2007:780)

The founder of psychoanalysis Sigmund Freud states: “I perceived everywhere tendencies and strivings analogous to those of everyday life, and conceived the **psychic splitting** as a result of a repelling process, which I at that time called “defence” and later “regression”. (Freud, 1938:936)

The personality of the schizophrenic is not ‘split’ into a finite number of sub-systems, it is ‘shattered’ into innumerable fragments. (McKellar, 1979: 137)

I present all these definitions in order to better understand the cases of Anna Wulf. Anna Wulf was analysed in different ways: schizophrenic, hysterical, split personality. I do not approve with those considering her a schizophrenic. Her illness is curable, her madness is defeated by her descent into it. Schizophrenia cannot be cured and it is admitted by C. G. Jung himself: “I cannot cure schizophrenia in principle. Occasionally by

Healing the psychic split

great good chance I can synthesize the fragments. But I do not like to do it because it is frightfully difficult work.” (Jung; 1995:113)

Most of the critics speak about Anna’s neurosis or hysteria. The two concepts are defined above in order to succeed in diagnosing the characters in discussion.

In hysteria the dissociated personalities are still in a sort of interrelation, so that you always get the impression of a total person. With a hysterical case you can establish a rapport, you get a feeling reaction from the whole person. There is only a superficial division between certain memory compartments, but the basic personality is always present. In the case of schizophrenia that is not so. (op. cit, p. 112)

A neurosis is a dissociation of personality due to the existence of complexes. To have complexes is in itself normal; but if the complexes are incompatible, that part of the personality which is too contrary to the conscious part becomes split off. If the split reaches the organic structure, the dissociation is a psychosis, a schizophrenic condition, as the term denotes. Each complex then lives an existence of its own, with no personality left to tie them together. The idea of psychic dissociation is the most general and cautious way I can define a neurosis. (op.cit, 188)

And now having all the psychoanalytical terms explained, we should take an inner journey deep down in Anna Wulf’s soul.

2. Anna Wulf’s process of healing

In the novel *The Golden Notebook* the human issues are clear because the life of Lessing’s main character offers an understanding of issues such as political repression, sexual abuse, single parenthood, writer’s block, and the women’s movement.

Lessing thinks history (the 20th century) is getting worse – a chaos of violence, war, and death – instead of better, as Marxism promised. Given such a world, *The Golden Notebook* asks whether a thinking woman now can possibly have an integrated identity and answers that she cannot. This question stands prologue to the more powerful question of how one can write honestly when one is such a divided creature, especially how one can write honestly about female experience. The book answers that the self must recognize the splits and alienations through which it is constituted and also that it must create such splits through which the truth may emerge. (Gardiner Kegan, 1989: 144)

Anna Wulf, the protagonist in the story, is a writer and a single mother. She uncovers and examines the pages of notebooks that sit side-by-side on a simple desk. She lives alone with her young daughter, occasionally renting out

a room; this is the way to fill some of the empty space around her and to keep the empty walls of her home from closing in on her.

Anna and her friend, Molly, live “free women’s lives”. They are independent, single women. Anna realizes that she is in danger to become an old maiden who always criticises men. She is decided to avoid it and she has to accept the life she has chosen to live and she should not complain about it:

“She thought: ‘I want to be done with it all, finished with the men vs. women business, all the complaints and the reproaches and the betrayals. Besides, it’s dishonest. We’ve chosen to live a certain way, knowing the penalties, or if we didn’t we know now, so why whine and complain... and besides, if I’m not careful, Molly and I will descend into a kind of twin old-maidhood, where we sit around saying to each other, Do you remember how that man, what –was-his-name said that insensitive thing, it must have been in 1947...’”
(*The Golden Notebook*, p. 62)

At a certain moment, Anna acknowledges that she has two personalities: the ironical political woman and the Party fanatic who sometimes can be “quite maniacal”:

“It occurred to me today, that when I talk to Molly about politics, I never know what person is going to reply – the dry, wise, ironical political woman, or the Party fanatic who sounds, literally quite maniacal. And I have these two personalities myself.” (*The Golden Notebook*, p. 156)

“In *The Golden Notebook*, Lessing conveys the painful confusion of breaking with Communism, a break encouraged by its failure to make Anna, the protagonist, feel whole. (Klein, 2000:167) As Anna puts it to her comrade Jack: *‘Alienation. Being split. It’s the moral side, so to speak, of the communist message. And suddenly you shrug your shoulders and say because the mechanical basis of our lives is getting complicated, we must be content to not even try to understand things as a whole?’* (*The Golden Notebook*, p. 360) Anna had hoped that by becoming a member of the Party, her sense of being split would heal. Instead, over time, it seemed to deepen.

The same idea of Anna’s double personality is stressed when she presents herself as Janet’s mother and Michael’s mistress and she realizes that these two personalities of hers are “happier separated”. She seems to live two different lives: one in which she lives a wonderful love story with Michael and the other one where she has only one aim in life: to be a good mother to her daughter, Janet:

Healing the psychic split

"The two personalities – Janet's mother, Michael's mistress, are happier separated. It is a strain having to be both at once." (The Golden Notebook, p. 301)

Anna keeps four diaries which contain the moments of Anna's life. Each of the coloured books presents a facet of her existence. A part of her self is contained within their pages. The black notebook contains her experiences in Africa; the red one her thoughts on the current politics in England. The yellow notebook is for her fictionalized version of herself and a blue notebook is her diary:

"I keep four notebooks, a black notebook, which is to do with Anna Wulf the writer; a red notebook, concerned with politics; a yellow notebook, in which I make stories out of my experience; and a blue notebook which tries to be a diary." (The Golden Notebook, p. 418)

The paradox of arithmetic division is crucial to an understanding of Lessing's network of double and multiple characters. A cell that splits in two has both divided and multiplied. This paradox governs Lessing's exploration of the problem of fragmentation in our time. (Sprague, 1987: 59)

In *The Golden Notebook* Anna and her multiple texts suffer from despair as everything turns into fragmenting self reflections, but the possible achievement is autonomy, the text that can stand on its own. (Gardiner Kegan, 1989:153)

Anna, the writer, the single woman, the political activist, struggles to find a way to integrate her multiple selves, a way to make her life seem less painful. She's motivated to keep these four notebooks out of "*fear of chaos, formlessness—of breakdown.*"

Anna says that the notebooks represent a way of splitting the self to save it from chaos. She is right. The splitting works. Seeing the self in or as others is a necessity. We are multiple. The inner Golden Notebook is not golden in any fairy-tale sense; it does not represent great or glorious synthesis. It does not contain a single Anna. All the selves of all the notebooks are in it." (Sprague, 1987: 81)

The first step towards her healing is when she admits she has problems and she decides to go to a psychiatrist to treat her indifference for people. This is the moment when her lover, Michael left her after a five-year love story:

"Very well: Anna Wulf is sitting in a chair in front of a soul-doctor. She is there because she cannot deeply feel about anything. She is frozen. She has a great many friends and acquaintances. People are pleased to see her. But she only cares about one person in the world, her daughter, Janet." (The Golden Notebook, p. 216)

The novel's representative of psychoanalysis is a female Jungian analyst, Mrs. Marks or "Mother Sugar". Her therapy involves her successful remothering and empathic support, and Anna's fundamental conflicts are those

associated specifically with female psychology, even when she works these out in the wild analysis of breakdown rather than in her official sessions. Anna criticizes her analyst for thinking herself too important in Anna's life and for taking too much credit for Anna's progress when Anna wants to think that psychoanalysis lies and is regressive, whereas the neurotic is in tune with the historical period. (Gardiner Kegan, 1989:146)

Mrs. Marks blames Anna for writing only for herself. Anna's answer gives us a good clue about her fear of exposure to a potential reader/critic. She says that writers are afraid of what they are thinking. This same duality between this fear of disapproval and inadequacy and the desire to be appreciated occurs in her womanhood as well. Anna submits to Tommy's cruel invasion of her notebooks just like the women in her novel accept cold and cruel treatment of Richard, Michael, Paul, Willy, Tommy, the fictional, Nelson, Saul with passive female acceptance. (Saraçoğlu, 2006: 144)

Anna angrily resists being "ordered to dream" and thinks her analyst always wins against her (238). She feels the analyst robs her of her diary just by mentioning it, yet she dreams of her as a "large maternal witch" to whom she will be able to turn for help after the analysis is over (253).

The writer's block has taken her over and destroyed the love for writing and searching, she once had. Her first novel, an autobiographical story about a group of Communists in colonial Africa, was immensely successful. Her psychiatrist treats her for this writer's block.

Anna tells her friend Molly, "The point is [. . .] that as far as I can see, everything's cracking up" (25). By "everything" Anna means "both society and the individual, though the emphasis shifts from the disintegration of social institutions to the fragmentation of Anna's own consciousness as the novel progresses." (Henstra, p.11)

Another important moment in the novel is when Anna admits she is on the point of „cracking up”. This means that she is aware that her loneliness and her love problems will lead her to a breakdown. She knows that her intelligence is the only one which prevents her from „cracking up”:

"She could even feel that intelligence there, at work, defensive and efficient – a machine. And she thought: this intelligence, it's the only barrier between me and – but this time she did finish it, she knew how to end the sentence. Between me and cracking up. Yes."
(The Golden Notebook, p. 349)

Anna discovers that her role as a mother helps her to surpass many difficult stages of her life. As a mother she has to be calm and responsible, even if deep down inside she is nervous or depressed:

"I have been very depressed. I have depended a great deal on that personality – Janet's mother. I continually ask myself – how

Healing the psychic split

extraordinary, that when inside I am flat, nervous, dead, I can still, for Janet, be calm, responsible, alive?" (The Golden Notebook, p. 435)

After Janet leaves for boarding school, Anna admits that she has become a different person, once her self as a mother has disappeared. She seems to become again the Anna who existed before Janet was born:

"Having a child means being conscious of the clock, never being free of something that has to be done at a certain moment ahead. An Anna is coming to life that died when Janet was born." (The Golden Notebook, p. 480)

Sometimes, she speaks about herself as if speaking about another person. She is aware that there are many different Annas inside herself and some of them seem to be untouchable:

"It belonged to the Anna who was normal, who was walking away somewhere on a horizon of white sand, who I could see but could not touch." (The Golden Notebook, p. 439)

The idea of many different Annas appears again in the following paragraph where she presents herself as two different persons: a woman in love and a "curious detached sardonic Anna":

"I went to sleep, in obedience to this third friendly man, conscious of two other Annas, separate from the obedient child – Anna, the snubbed woman in love, cold and miserable in some corner of myself, and a curious detached sardonic Anna, looking on and saying: 'Well, well!'" (The Golden Notebook, p. 492)

After Janet's departure, Anna is alone and she does not know what to do all day, so she starts collecting newspapers and cuts out articles and puts them on walls. This is the moment when she acknowledges she is mad, but sometimes she thinks that all the other people are mad and she is sane:

"It occurred to her that she was going mad. This was 'the breakdown' she had foreseen; the 'cracking up'. Yet it did not seem to her that she was even slightly mad; but rather that people who were not as obsessed as she was with the inchoate world mirrored in the newspaper were all out of touch with an awful necessity. Yet she knew she was mad. And while she could not prevent herself from the careful obsessed business of reading masses of print, and cutting out pieces, and pinning them all over her walls, she knew that on the day Janet came home from school, she would become Anna, Anna the responsible, and the obsession would go away." (The Golden Notebook, p. 564)

This problem of defining whether one is mad or sane is very well expressed by R. D. Laing in his book *The Divided Self*:

"In the context of our present pervasive madness that we call normality, sanity, freedom, all our frames of reference are ambiguous and equivocal." (Laing, 1990)

This means that the line between madness and sanity is very thin. The descent into madness, far from being the result of inadequate socialization, is in fact an attempt to escape the crushing demands of over-socialization. (Scott, 2006:338) In fact all Lessing's heroines suffer because of the social pressure put on them.

Another step in her way towards healing is the moment when Anna admits that she could not write because of her split self and suddenly she understands that what she has written in the notebooks is false and the untruthfulness of her writing is due to her sterility as a writer:

"Matching what I had written with what I remembered it all seemed false. And this - the untruthfulness of what I had written was because of something I had not thought of before - my sterility. The deepening note of criticism, of defensiveness, of dislike." (The Golden Notebook, p. 418)

The most important stage in her healing is her relationship with Saul Green. This period of her life represents another moment of confirming one of her selves: Anna admits that both she and Saul Green are mad.

Anna and Saul (an American writer and disillusioned leftist currently having a breakdown) here embody both the collective madness of their time-bent on war and annihilation-and the utopic potential of transformed personal/political relations (Franko, 1995:20); specifically, Anna seems to "catch" Saul's sickness.

Saul seems to be Anna's animus, he is mad as well and by his madness he helps her to recover. The weeks spent by the two of them in Anna's flat represent the last part of her madness:

"The walls of this flat close in on us. Day after day we're alone here. I'm conscious that we are both mad. He says with a yell of laughter: 'Yeah, I'm crazy, it's taken me all my short life to recognize it, and now what? Suppose I prefer being crazy, what then?' (The Golden Notebook, p. 502)

Anna quickly perceives Saul's "split personality" - the jarring, wary, hostile physical side of his character countered by the intelligent, sensitive, and frank aspect:

"In any conversation he can be five or six different people" (The Golden Notebook, 573)

"Shock. Literally, I saw him come out of the personality he had been." (The Golden Notebook, p. 582)

"I don't know who will come down the stairs." (The Golden Notebook, p. 590)

They can detach themselves from their mad selves and become normal people who listen to music and make love:

Healing the psychic split

"We played the new records, and made love, and the two people, Saul and Anna, who were mad, were somewhere else, in another room somewhere." (The Golden Notebook, p. 509)

Anna is aware that her many different selves who cannot live together induce her madness. She sees herself as betrayed, unloved and her happiness is denied:

"It is a solemn, self-pitying organ note. It is in me, Anna betrayed, Anna unloved, Anna whose happiness is denied, and who says: Why do you deny me, but why do you deny life?" (The Golden Notebook, p. 519)

After some weeks of madness, jealousy, marathon of sex and loneliness, suddenly, Anna is cured. She knows she is sane:

"Then, suddenly, I was sane, and I understood what it meant when I said, 'I am Anna Wulf and this is Saul Green and I have a child named Janet.'" (The Golden Notebook, p. 518)

The moment she is cured, she realizes that she has to unify all her selves into a single one and this moment represents the healing of her psychic split:

"He said: 'Why do you have four notebooks?' I said: 'Obviously, because it's been necessary to split myself up, but from now on I shall be using one only. 'I was interested to hear myself say this, because until then I hadn't known it.'" (The Golden Notebook, p. 521)

There is a very important moment in the novel and in Anna's process of healing when she admits her writer's block:

"I said: 'I could give you a dozen reasons why not, I could speak on the subject for several hours, but the real reason is that I have a writer's block. That's all. And it's the first time I've admitted it.'" (The Golden Notebook, p. 526)

She decides to get rid of her four notebooks and to start a new one, the Golden Notebook which contains all her selves:

"I'll pack away the blue notebook with the others. I'll pack away the four notebooks. I'll start a new notebook, all of myself in one book." (The Golden Notebook, p. 528)

The last part of the novel presents the facts written in the Golden Notebook and the way Anna is trying to make order out of the chaos her life has been up to now:

"And now it was terrible because I was faced with the burden of recreating order out of the chaos that my life had become. Time had gone, and my memory did not exist, and I was unable to distinguish between what I had invented and what I had known, and I knew that what I had invented was all false." (The Golden Notebook, p. 538)

Anna's different selves are presented again, but this time there is someone new, it seems to be "a person concerned to prevent the disintegration of Anna":

"And so all the time I was conscious of lying on the bed, and conscious of sleeping, and thinking extraordinarily clearly. Yet I was not the same as when I stood, in a dream, to one side and saw Anna sleeping, watching other personalities bend over to invade her. I was myself, yet knowing what I thought and dreamed, so there was a personality apart from the Anna who lay asleep; yet who that person is I do not know. It was a person concerned to prevent the disintegration of Anna." (The Golden Notebook, p. 534)

Anna has a new and powerful self: the controlling one. This seems to force her to gather all her selves into a single unitary one:

"But now, asleep, it was not making past events harmless, but naming them, but making sure they were still there. Yet I know that having made sure they were still there, I would have to 'name' them in a different way, and that was why the controlling personality was forcing me back." (The Golden Notebook, p. 535)

Anna presents her period of madness as an illumination which helps her to find the correct way in her life. Now, she is illuminated and she knows what she wants and the direction she should follow for the rest of her life:

"I also knew what I was going to be told. Knowing was an 'illumination'. During the last weeks of craziness and timelessness I've had these moments of 'knowing' one after the other, yet there is no way of putting this sort of knowledge into words. Yet these moments have been so powerful, like the rapid illuminations of a dream that remain with one waking, that what I learned will be part of how I experience life until I die." (The Golden Notebook, p. 549)

At the end of the novel, Saul Green highlights again Anna's split personality. He gives her the first sentence for her novel, which is the first sentence of "Free Women" and he explains: "*there are the two women you are, Anna.*" Thus, the readers find out that Molly was one of Anna's selves:

"I'm going to give you the first sentence then. There are the two women you are, Anna. Write down: The two women were alone in the London flat. "" (The Golden Notebook, p. 554)

3. The shadow of the Third

In *The Golden Notebook*, Anna Wulf is analysing her different selves in four different notebooks. She feels the need to fragment her life into compartments: love, politics, fiction and daily life. In all her notebooks, we can notice a pleasure for the detailed analysis, she studies all the parts of her life and she even presents her deepest emotions and her innermost experiences.

The title of Anna's novel about Ella and Paul is *The Shadow of the Third*. The significance of the title is very important: Anna explains that initially the third is Paul's wife, Ella's rival. Ella feels both pleasure that she has taken Paul away from his wife and guilt about her despicable attitude toward a woman she has wronged. Later Ella's feelings turn into envy; the image of the wronged wife becomes that of a "serene, calm, unjealous, unenvious, undemanding woman, full of resources of happiness inside herself, self-sufficient, yet always ready to give happiness when asked for it" (207). This image does not match to what Ella knows about the real woman, she acknowledges that it could only have come from within herself: "this is what she would like to be herself, this imagined woman is her own shadow, everything she is not" (207)

In the yellow notebook, Anna interrupts her narrative about Ella and Paul with these reflections: "*It is as if this novel were already written and I were reading it. And now I see it whole I see another theme, of which I was not conscious when I began it. The theme is, naivety. From the moment Ella meets Paul and loves him, from the moment she uses the word love, there is the birth of naivety. And so now, looking back at my relationship with Michael ... I could see above all my naivety. Any intelligent person could have foreseen the end of this affair from the beginning. And yet, I, Anna, like Ella and Paul, refused to see it. ... He destroyed in her the sophisticated Ella and again and again he put her intelligence to sleep, and with her willing connivance, so that she floated darkly on her love for him, on her naivety, which is another word for a spontaneous creative faith. And when his own distrust of himself destroyed this woman-in-love, so that she began thinking, she would fight to return to naivety.*" (270)

These reflections on the naïveté of the "woman-in-love," are recurrent in the novel. For example, in the red notebook we notice the theme of political naïveté in Anna's reflections about whether she should join the Party: "*One reason not to, that I hate joining anything, which seems to me contemptible. The second reason, that my attitudes towards communism are such that I won't be able to say anything I believe to be true to any comrade I know, is surely decisive?*" (154). The next day, in spite of these compelling reasons not to do so, Anna decides to join the C. P.

This theme is echoed in the penultimate entry in the red notebook, dated 20 September 1956, three years after Stalin's death. Anna writes of the efforts to reform the C. P. from within by democratic means: *"Stupid. Yet I was wrapped up in it for months, like hundreds of other normally intelligent people who have been involved in politics for years"* (447).

The other parts of the novel contain similar references to the motif of naïveté, and in all instances naïveté is distinguished from innocence. Anna falls in love with Michael (and Ella with Paul) after a disastrous marriage; she joins the C. P. with full understanding of the corruption at its centre; she recreates *Frontiers of War* in the black notebook even though she is convinced that her first novel had its source in a perverse emotion. "Naïveté is not innocence but nostalgia for lost innocence. " (op. cit, p. 271)

Although, Ella is Anna's fictitious self, she sometimes succeeds in separating herself from Anna. This is about her different selves who sometimes seem to take control and do whatever they want and she, Anna has no power over them:

"I see Ella, walking slowly about a big empty room, thinking, waiting, I, Anna, see Ella. Who is of course, Anna. But that is the point, for she is not. The moment I, Anna, write: Ella rings up Julia to announce, etc., then Ella floats away from me and becomes someone else. I don't understand what happens at the moment Ella separates herself from me and becomes Ella. No one does. It's enough to call her Ella, instead of Anna." (The Golden Notebook, p. 405)

Ella is having the same problems as Anna: the same split personality. She is a rational being (she knows that Paul would not come back to her) and she knows that she is mad (because she waits for him every night) and she can define her madness:

"She stood there, night after night. She could see herself standing there, and said to herself: This is madness. This is being mad. Being mad is not being able to stop yourself doing something that you know to be irrational. Because you know Paul will not come." (The Golden Notebook, p. 209)

4. Conclusions

At the end of the yellow notebook Ella gives a kind of prescription for healing the madness and the psychic split. This prescription will be used by Anna and Saul later in the novel:

Healing the psychic split

“A man and a woman – yes. Both at the end of their tether. Both cracking up because of a deliberate attempt to transcend their own limits. And out of chaos, a new kind of strength.” (The Golden Notebook, p. 411)

Anna succeeds to unify her existence and identity into one. By going over her experiences, her responses to life, she eventually comes to terms with her growing disillusionment, her self-induced sexual betrayal, and her feelings of social and emotional rejection. Wholeness no less than fragmentation may be a cover for self-deception. We must not compartmentalize, but at the same time, we must remain "split" so that, through the gap, the future (Schweickart, 1985:267) "might pour in a different shape terrible perhaps, or marvellous, but something new" (473).

References

- [1] Franko, C. (1995) Authority, truth-telling, and parody: Doris Lessing and 'the book', *Papers on Language & Literature*, 00311294, Summer95, Vol. 31, Issue 3
- [2] Freud, S., (1938), *Interpretation of Dreams*, The Modern Library, New York
- [3] Gardiner Kegan, J., (1989), *Rhys, Stead, Lessing and the Politics of Empathy*, Indiana University Press
- [4] Henstra, S. (2007) Nuclear Cassandra: Prophecy in Doris Lessing's *the Golden Notebook* ; *Papers on Language & Literature*, Vol. 43
- [5] Jung, C. G., (1995), *Analytical Psychology: its Theory and Practice – The Tavistock Lectures* – London: Routledge
- [6] Klein, C., (2000), *Doris Lessing – A Biography*- London: Duckworth,
- [7] Laing, R. D., (1990), *The Divided Self – A Study in Sanity and Madness*, London: Penguin Books
- [8] Lessing, Doris, (2002), *The Golden Notebook*, London: Flamingo

[9] McKellar, Peter, (1979), *Mindsplit – The Psychology of Multiple Personality and the Dissociated Self*, London: J. M. Dent&Sons LTD

[10] Rycroft, Charles, (1968), *A Critical Dictionary of Psychoanalysis*, London: Penguin Books

[11] Saraçoğlu, Semra, (2006), *A New Form Derived Out Of Formlessness In Doris Lessing's The Golden Notebook*, Ekev Academic Review

[12] Schomerus, Georg and others (2007) - The association of schizophrenia with split personality is not an ubiquitous phenomenon, *Social Psychiatry and Psychiatric Epidemiology* 42:780–786

[13] Schweickart, Patrocinio P. (1985) *Reading a Wordless Statement: The Structure of Doris Lessing's 'The Golden Notebook'* , *Modern Fiction Studies*, 31:2 (1985:Summer)

[14] Sprague, Claire, (1987), *Rereading Doris Lessing – Narrative Patterns of Doubling and Repetition*, The University of North Carolina,

The Ship Transportation of Passengers with Disabilities and The Disability-Related Training Procedures of Seamen: A Legal and Social Framework

Dario Imperatore¹

Received: 11-11-2018. Accepted: 11-12-2018. Published: 31-12-2018

doi:10.23756/sp.v6i2.420

© Dario Imperatore



Abstract

Recent programs aimed at the independent living of persons with disabilities, allow them to be costumers of sectors in which they have never had full access in the past. The Lisbon Treaty has distinctly recognized the existence of a community tourist area within the primary law, and CRPD has defined the principles of accessibility (art. 9) and accessible tourism (art. 30) as tools for the inclusion. In addition, tourism and transportation stakeholders must guarantee non-discriminatory services; they must approach persons with disabilities as every other customer, by taking in consideration their needs and rights, especially when it comes to their accessibility, assistance, and information. Companies of transportation must cooperate with DPOs in order to define disability-related training procedures.

Keywords. *Disability, Tourism, Transportation, Accessibility, Training.*

1. Introduction

The Convention on the Rights of Persons with Disabilities (CRPD)² focuses on the principle of non-discrimination at the contracting States.

¹ University of Camerino, Italy; imperatoredario@gmail.com

² Adopted by the General Assembly on 13 December 2006 and entered into force on 3 March 2008.

Discrimination is any kind of distinction, exclusion, or restriction on disability; and CRPD's purpose is to translate the principle of non-discrimination into real opportunities for the many people who, on the ground of the social barriers around us, cannot live respected enough³.

The CRPD policy has found continuity in the European Disability Strategy 2010-2020⁴. The latter, in fact, identifies several areas of intervention⁵ for the enforcement of the rights of persons with disabilities and for their full protection, considering that there are about 80 million of persons with disabilities in Europe⁶, which make one-sixth of the population.

Tourism is an area where there is frankly a necessity to develop managerial skills when it comes to disability. The same concept is valid for the transportation field, as a branch of tourism⁷.

EU, on the other hand, has always been pro-inclusion of persons with disability⁸. Through the Strategy 2010-2020, following the CRPD principles as mentioned in the last paragraph, EU wants a real change aimed at a tourist field accessible for everyone in Europe.

Effectively, the Lisbon Treaty⁹ has distinctly recognized the existence of a community tourist area within the primary law. Furthermore, a big step forward was naturally accomplished through the regulations on transport of

³ CRPD refers to the Declaration of Human Rights and the International Covenants on Human Rights. Furthermore, it expressly asks contracting States to respect individual dignity, autonomy and independent living, participation and accessibility to information, leisure and job (arts. 3, 9, 19, 21, 27, 30), etc., through an adequate and sustainable social protection.

⁴ Strategy 2010-2020 allow to an action both at European and national level, according to Charter of fundamental rights of the European Union, for the non-discrimination on the ground of disabilities (TFEU arts. 10, 19).

⁵ Accessibility, participation, equality, employment, education and training, social protection, health, external action: Eu and each Member State must act for the protection and safeguard of human rights e freedom of persons with disabilities, according to CRPD.

⁶ EU Labour Force Survey ad hoc module on employment of persons with disabilities (LFS AHM), 2002, reported on "Communication from the Commission to the European Parliament, the Council, the European economic and social Committee and the Committee of the Regions 'European Disability Strategy 2010-2020': A Renewed Commitment to a Barrier-Free Europe" (COM/2010/0636 final). In this communication the Commission highlights also, that over a third of people aged over 75 have disabilities that restrict them to some extent, and over 20 % are considerably restricted (LFS AHM and EU- SILC 2007). These numbers are set to rise as the EU's population ages.

⁷ The right way to avoid a ghettoization of tourists with disabilities and, therefore, discrimination, is to ensure accessibility to conventional tourist circuits and not create tourist circuits ad hoc for them.

⁸ See article 26 Charter of Fundamental Rights.

⁹ Amending the Treaty on European Union and the Treaty establishing the European Community (2007/c 306/01).

Healing the psychic split

passengers¹⁰, although with some reservations (even of considerable importance)¹¹. These are challenges for a tangible protection of the rights of persons with disabilities or reduced mobility.

Recently, the Directive (EU) 2015/2302 (of the European Parliament and of the Council of 25 November 2015, on package travel and linked travel arrangements)¹² that is valid from 1 July 2018, is aimed at standardizing consumer protection legislation throughout the territory of the European Union.

Moreover, we are witnessing the development of policies and programs that focus on guaranteeing the independent living of persons with disabilities, for their effective social inclusion (in Italy, for example, by the law "After us"). These programs offer trust on the professional level, which enables customers to develop a sense of faith toward the organization, which simultaneously allows this project to come about.

The consequences of these programs are potentially extraordinary and varied, and certainly individual with disabilities are seen to the world, and to the market as parts of it. Therefore, as a result, market stakeholders should be more considerate of persons with disabilities and respect their rights.

In light of all this, this paper is particularly dedicated to accessible tourism as tool for the inclusion of persons with disabilities, highlighting that tourist stakeholders¹³ should develop better disability management skill to better meet the disabled client's customers' needs and requirements.

A plausible proposal is the act of communicating, informing, interpreting their individual wishes in terms of traveling, or any leisure related service. In other words, stakeholders must, first, break psychological barriers between the parties, creating a virtuous interaction with the client. The objective is to have the disabled be seen and considered as a "person" in the first place rather than being seen differently because of his or her "disability". The subsequent evaluation of the disabilities of the customer, will be managed

¹⁰ Reg. EU n. 181/2011 (bus transport); Reg. EU n. 1177/2010 (maritime transport); Reg. EU n. 1371/2007 (rail transport); Reg. EU n. 1107/2006 (air transport).

¹¹ I.e., the complaint promoted by President of the European Disability Forum, Vardakastanis, Yannis. 2018. "No more excuses! Equal access to rail travel is overdue". EDF, May 8. <http://www.edf-feph.org/newsroom/news/no-more-excuses-equal-access-rail-travel-overdue>.

¹² Amending Regulation (EC) No 2006/2004 and Directive 2011/83/EU of the European Parliament and of the Council and repealing Council Directive 90/314/EEC.

¹³ I.e. tour operators, accommodation, leisure centers, station management bodies and transport companies.

with an essential experience and know-how of the ‘tourist agent’ not only as an expert of tourism, but also as a disability manager. Tourist agent must be able to provide assistance before, during, and after the service¹⁴, or at least be able to identify who may do it in his behalf if necessary, without additional costs.

The intention of this project is aimed at the satisfaction of the user with disabilities, ensuring a non-discriminatory approach and service for the disabled¹⁵.

2. A brief regulatory framework on Shipping contract

Transportation is one of the most important services of tourism, whether it’s included in the tourist package, or not. Among the classics and more widespread tool of transportation, the maritime one represents a challenge for the accessible tourism, given its peculiarities and, sometimes, technical complexity. In this paragraph we briefly try to define the most important aspects of the transport contract, and the importance of its cornerstone. The following paragraphs put emphasis on the rights of persons with disabilities and on the importance of the training of the Seaman on disabilities for Ensure, an effective level of safety, and assistance on board.

The maritime transport (of passengers) contract requires carriers¹⁶ to transfer people by sea from one place to another, with their baggage. Additionally, passengers pay a fee for this service¹⁷.

The Athens Convention (1974) affirms that the international transport is the one carried out between two ports situated in different States and expresses that the vessel is registered by one of the Contracting States (art. 1). The latter involves the, “two tiers liability,” only in reference to claims caused by shipping accidents¹⁸.

¹⁴ In the latter case, following the correct procedures of accessible claims, and supporting, possibly, problem solving strategy, and the choice of alternative dispute resolution.

¹⁵ May it also be considered a customer retention strategy in order to increase the business of the tourist agent himself?

¹⁶ EU meaning of carrier: a natural or legal person, other than a tour operator, travel agent or ticket vendor, offering transport by passenger services or cruises to the public.

¹⁷ This definition is in accordance with the art. 1.2 of the Athens Convention of 1974, that expressly specify that maritime transport of passengers is a <<contract made by or on behalf of a carrier for the carriage by sea of a passenger or of a passenger and his luggage, as the case may be>>

¹⁸ On this issue see F. Berlingieri, *The Athens Convention on The Carriage of passengers and their Luggage by Sea and the European Parliament Regulation (EC) n. 392/2009*; Gaskell, *Revision of the*

Healing the psychic split

The Convention (art. 6) states that the Court may exempt each, or part, of the carrier's liability if he proves that there is a direct or indirect responsibility, or negligence, of the passenger for the death or personal injury of the passenger himself (or the damage and loss of his baggage).

There is no limit of liability if the carrier, or its employees, caused the damages just by being irresponsible whether the act was intentional, or even if they could foresee that something would occur at some point.

The contract can be terminated by the law if a problem regarding the departure ranges on reasons beyond the control of the carrier¹⁹. The latter, in such cases, will reimburse the price paid by the passenger for the purchase of the ticket passing.

If the departure gets cancelled, but there is the chance to offer alternative departures with ships by the same carrier, the passenger is entitled to carry out the ride on one of the ships, if allowed, or to either terminate the contract²⁰.

The European Union adopted the Athens Convention (and the London Protocol 2002). In fact, it was included as *Annex I*²¹ to the Regulation (EC) No 392/2009 of the European Parliament and of the Council of 23 April 2009 on the liability of carriers of passengers by sea in case of accidents.

This regulation provides also a compensation²² in accordance with the liability of the carrier as described by the Athens Convention (art. 3), i.e. "*in the event of loss of, or damage to, mobility equipment or other specific equipment used by a passenger with limited mobility*".

Athens Convention 1974 on the Carriage of Passengers and their Luggage by sea; Hill, *Passengers' progress*; Wiswall, *Protocol to the Athens Convention: an Internationalist's Commentary*.

¹⁹ art. 401 Italian cod. nav.,

²⁰ The same happen if the itinerary of the voyage has changed despite passenger interests

²¹ Annex I: "*Provisions of the Athens Convention relating to the carriage of passengers and their luggage by sea relevant for the application of this regulation (Consolidated text of the Athens Convention relating to the Carriage of Passengers and their Luggage by Sea, 1974 and the Protocol of 2002 to the Convention)*".

²² The compensation shall correspond to the replacement value of the equipment concerned or, where applicable, to the costs relating to repairs.

3. Accessibility in the European maritime transportation of passengers

The EU policies on transportation intend to ensure an adequate level of protection of the passengers with disability, or with limited mobility²³. Moreover, the EU makes its own regulations, which define measures that each Member State must respect.

On maritime transportation in Europe, Regulation no 1177/2010²⁴ is the principal source, and it shall apply in respect of passengers travelling on a passenger services, or on a cruise²⁵, where the port of embarkation is situated in the territory of a Member State. It is valid also if the port of embarkation is situated outside EU, but the port of disembarkation must be situated in the territory of a Member State, provided that the service is operated by carrier of the EU.

Reverse, Regulation no 1177/2010 is not applicable when a vessel has a crew responsible for the operation of the ship composed of not more than three people, or where the distance of the overall passenger service is less than 500 meters.

The first goal is to ensure accessible services for everyone. Secondly, it's the European Legislator's responsibility to accomplish free movement and freedom of choice²⁶. Finally, the measures chosen to achieve these objectives are "non-discrimination," adequate, "assistance," and "information."

The right to transport, and therefore to access to services, for persons with disabilities, or those with limited mobility is lined by art. 7. It rules that carriers, travel agents, and tour operators shall not refuse to accept a reservation, transport or embark people on the grounds of disability or of limited mobility. In addition, they cannot add the costs for reservations or tickets. This general principle has some limits. Effectively, the regulation links to the preceding principle. It could happen "*in order to meet applicable*

²³ In this context, see EU Regulation no 1177/2010, *whereas* No 2: <<Since the maritime and inland waterway passenger is the weaker party to the transport contract, all passengers should be granted a minimum level of protection. Nothing should prevent carriers from offering contract conditions more favourable for the passenger than the conditions laid down in this Regulation>>.

²⁴ European parliament and Council of November 24th, 2010 concerning the rights of passengers when travelling by sea and inland waterway and amending Regulation (EC) No 2006/2004.

²⁵ For 'cruise', this regulation means <<a transport service by sea or in land waterway, operated exclusively for the purpose of pleasure or recreation, supplemented by accommodation and other facilities, exceeding two overnight stays on board>>, art. 3 (t).

²⁶ EU Regulation no 1177/2010 *whereas* No 4.

Healing the psychic split

safety requirements established by international, Union or national law or in order to meet safety requirements established by the competent authorities” or, “where the design of the passenger ship or port infrastructure and equipment, including port terminals, makes it impossible to carry out the embarkation, disembarkation or carriage of the said person in a safe or operationally feasible manner”²⁷.

The regulation listed here provides a system of checks and balances. In fact, these special limits impose on carriers, travel agents, and tour operators an obligation to inform passenger with disabilities or with limited mobility on alternative solutions, if possible.

In the modern day, the right of information is a crucial key that opens the door of accessibility. Actually, carriers, tour operators and terminal operators shall set up, or have in place, non-discriminatory access conditions for the transport of the disabled²⁸. Additionally, they must make these access conditions publicly or digitally available, in accessible formats by request²⁹.

Finally, taking in consideration the definition of a “person with disability” and “persons with limited mobility” has been adopted by the EU in this Regulation. The point of view of those who think there is a possibility that this broad definition can somehow grant some abuse³⁰ appears as not sharable. In fact, the link between the breadth of the definition adopted by the regulation and the apprehension for potential abuse, seems inconsistent³¹.

On the contrary, keeping high the attention to the goal of non-discrimination, it is interesting to quote the European Court³² for which the European Law recognizes that obesity could be a shape of disability if being oversize is an obstacle to the full and real participation of social life. It shows

²⁷ *Ibid*, article 8.

²⁸ Carriers, tour operators and terminal operators shall communicate the access conditions upon request to national enforcement bodies.

²⁹ Regulation No 1177/2010, article 9.

³⁰ S. Zunarelli, *Il Regolamento (EU) n. 1177/2020 sui diritti dei passeggeri che viaggiano per mare*, 782.

³¹ “Definition of disability” on the Regulation No 1177/2010 (article 3): “*disabled person*’ or ‘*person with reduced mobility*’ means any person whose mobility when using transport is reduced as a result of any physical disability (sensory or locomotor, permanent or temporary), intellectual disability or impairment, or any other cause of disability, or as a result of age, and whose situation needs appropriate attention and adaptation to his particular needs of the service made available to all passengers”.

³² Judgment of December 18th, 2014 of the European Court (Section IV), case No C-354/13

us the multiple facets of disability; and we have also to consider how intersectionality factors expand the issues of the persons with disabilities.

So, we should avoid any kind of discrimination for the so-called, “hidden disability”³³, instead of adhering to the term “disability”.

4. Seaman training and STCW requirements to avoid discrimination based on disabilities

Now we could analyse the figure of the “Seaman” who, as part of his professional performance, must acquire the skills typical of the disability manager in order to guarantee the safety and enjoyment of the trip of disabled passengers, or with limited mobility.

The International Maritime Organization (IMO) Facilitation Committee recognized that the degree of inclusion of persons with disability – in the social and economic life of the community in which they live – is not adequate in consideration of the considerable number of persons with disabilities³⁴. To contribute the implementation of the rights of persons with disabilities, IMO found four areas of interest: transportation to and from ports, parking facilities and exterior access to marine passenger terminals, movement within the terminal, to and from the ship, and on-board ships (including use of facilities and services), communication aspects and training of staff³⁵.

EU Regulation no 1177/2010 specifically states that carriers, should consider the important requirements of the ‘International Convention and Code on Standards of Training, Certification and Watchkeeping for Seafarers as well as the Recommendation of the International Maritime Organization (IMO)’ on the design and operation of passenger ships to respond to elderly and persons with disabilities’ needs. The EU requires cooperation with the organizations’ representatives of persons with disabilities, “*in organizing assistance to disabled persons and persons with reduced mobility, and the training of their personnel*”. It also asks a cooperation between tourist stakeholders in order to ensure accessible service. For example, carriers,

³³ On “hidden disability”, and how to resist and mitigate disability stigma, see J. E. HARRIS, *Processing Disability*.

³⁴ This number in 1989 was about up to 10%, of international population, in 2011 was 15%, and the data is growing further.

³⁵ IMO, Fal. 5/circ.3 of the 23th august 1989 - Ref. T3/4.01: Introduction of “Access to Marin passenger terminals for elderly and disabled passengers”.

Healing the psychic split

terminal operators, travel agents, and tour operator shall notify each the specific assistance condition required by the passengers. Carriers and terminal operators also have to designate a point inside or outside the port terminals at which persons with disabilities, or with limited mobility, can announce their arrival and request assistance³⁶.

To accomplish EU Regulation No 1177/2010 requirements³⁷, the Italian government agreed on a system of sanctions in case of violations imposed on the carriers, operators of the terminals, and tour operators³⁸. A lack of disability-related training procedures of the personnel defined in cooperation with DPOs, is sanctioned up to 30.000€³⁹.

Though the cost of the sanction is quite high, this denotes the importance of training procedures. Regarding that, there is an interesting activity report of the UK National Enforcement Body (2017) on a test for passengers with limited mobility when boarding or disembarking from a lifeboat. The results revealed that the requirements need to be more “customer sensitive”, when it comes to considering their needs, as well as setting out the safety issues on board the vessel for which the “Master” (or “Captain”) has ultimate responsibility⁴⁰.

That emphasizes how crucial it is to guarantee a proper training course on disabilities – inter alia – in accordance with the Equality Act 2010⁴¹ – which provides a mandatory training, asking UK Parliament to incorporate it into the national legislation⁴².

³⁶ EU Regulation 1177/2010, article 12 (reception of notifications and designation of meeting points).

³⁷ *Ibid*, article 14.

³⁸ *Decreto Legislativo 29 luglio 2015, n. 129*, which provides sanctions for violations of EU Regulation No 1177/2010, (15G00144) (OJ no 191 of August 19th, 2015).

³⁹ Main sanctions for other mandatory requirements are: for refusal of reservation, ticket or boarding up to 5.000€; for application of additional charge on the ground of the disability up to 1.500€; discriminatory conditions of access up to 15.000€; for lack of a public information on accessible conditions up to 5.000€; for violation of the public information on travel and transport conditions up to 1.500€; for lack of free assistance up to 1.200€; for lack of claims system up to 25.000€.

⁴⁰ United Kingdom National Enforcement Body activity report for 2017, “Rights of passengers travelling by sea and inland waterway (Regulation (EU) N° 1177/2010)”. Accessed March 14, 2018. https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/618439/NEB_Report_June_2017.pdf.

⁴¹ The Equality ACT requires reasonable solutions when a person with disabilities is disadvantaged compared to all others, in accordance with regulations or uses. This means that the stakeholders must adopt any measures to ensure persons with disabilities access to their services.

⁴² As an effect of Brexit, the real risk in the United Kingdom is that the adoption of the regulations may be frustrated.

The Royal Institution of Naval Architects on its website sees that, about “Costa Concordia – Passenger Evacuation”⁴³, “*in a real emergency situation on a cruise ship lifeboat many people believe that embarkation would take longer than the design ideal of 10 minutes*”⁴⁴, taking into consideration that “*a typical cruise contains a fair portion of passengers with impaired mobility and families with young children*” This is a confirmation of what has just been said about the importance of training in order to reduce any kind of unexpected events.

Frequently, maritime authorities highlight the STCW requirements to their shipowners, i.e. the Bahamas Maritime Authority mentions the importance of the implementation of the STCW requirements⁴⁵ as expressed in Bulletin no. 135 (2017), listed in the BMA website⁴⁶.

Therefore, this vision allows to achieve not only a higher safety degree and better assistance on board, but it also contributes to equalization of opportunities, elimination of discrimination based on disabilities, and support of social inclusion policies, as well as it allows disabled people's accessibility of transportation, as the Convention on the rights of persons with disabilities (2006) requires⁴⁷.

5. Conclusion

The European social policies, in line with the international ones, are heading towards the realization of the so known Universal Design of products, environments, programs and services that can be used by all people without any other adaptations.

⁴³ The Royal Institution of Naval Architects (RINA - UK). Accessed March 12, 2018.

<https://www.rina.org.uk/cgi-bin/showpage.fcgi>.

⁴⁴ In accordance with the IMO Life Saving Appliances (LSA) Code 4.4.3.1 states: “*Every passenger ship lifeboat shall be so arranged that it can be boarded by its full complement of persons in not more than 10 minutes from the time the instruction to board is given*”.

⁴⁵ Which will be effective from 01 July 2018.

⁴⁶ BMA asks, in fact, that all persons serving onboard passenger ships shall complete passenger ship emergency familiarization training or instruction appropriate to their capacity, duties and responsibilities.

⁴⁷ Bahamas signed CRPD on 24 Sep 2013 and ratified it on 28 Sep 2015. Art. 9 of CRPD asks States to respond appropriately to ensure that private entities that offer public services take care of accessibility for persons with disabilities. As well, training procedures for their employees on accessibility issues facing persons with disabilities.

Healing the psychic split

The “law” must be the main instrument of regulation of society. Through a series of limits and corrective, it must pursue not only the purpose of wealth, but also other values and interests, among all solidarity and reciprocity. In the absence of this, the risk is to expose the weak part of society to the marginality, with consequent exaltation of the selfishness of society’s negativity⁴⁸.

The market, generally, must respect the ethics, and a ‘Cultural Revolution’⁴⁹ can raise awareness on priceless values, that are the result of social ties, such as the average family⁵⁰. In effect, ethics is essential to match economic efficiency and of human rights or, in other words, to match market and democracy⁵¹. The latter is an open space where people are free, and at the same time empowered, thanks by an exact information⁵².

The States and civil society are responsible for the promotion and observance of fundamental rights, for one to ensure the future of persons with disabilities for their independent living, and on the other to develop new professionalism, such as the disability manager, in various social sectors. The stakeholders must demonstrate a competence in disability and approach to persons with disabilities. In addition, the social inclusion of persons with disabilities also determines their openness to the market as consumers. Hence, there is the need to raise awareness and inform commercial agents and other operators, such as those operating in the tourism and transportation of passenger’s sectors, on disability and on the right of non-discrimination.

The Italian tourist market, in general, is still not sufficiently adequate to offer accessible services for everyone who essentially needs it⁵³. Not only does this generate discrimination, but it also economic losses for the tourism stakeholders.

In the light of everything said, the States must control the effective application of all sanctions provided by the law in case of violations of the rights of tourists and passengers with disabilities. At the same time there is

⁴⁸ P. Perlingieri, *Prolusione letta al Congresso Nazionale dei Giuristi Cattolici Italiani*, 1994.

⁴⁹ *Ibidem*.

⁵⁰ R. Dahrendorf, *Lebenschancen. Anlaufe zur sozialen und politischen Theorie*. Suhrkamp Verlag.

⁵¹ F. Campanella, *Lo Stato e il mercato. Le idee e i miti di un passato più o meno prossimo*, in *Pubblico e privato nel sistema economico* S. Berena (ed.), Milano, 1992, p. 99.

⁵² A. Marzano, *Dal primo al terzo capitalismo industriale*, 21.

⁵³ The number of people with any form of impairment that does not travel because of the inadequacy of services is consistent, reaching the threshold of 10 million units. “*Osservatorio Vacanze italiani*”, Doxa Europcar. 2015. Accessed January 3, 2017.

<http://www.doxa.it/news/osservatorio-vacanze-italiani-2015-doxa-europcar/>.

the necessity of a social initiative to promote accessible tourism, and, for this case, University and Research have a crucial role for the Universal design, information, and formation of the future ruling class; as well the DPOs should be more involved in the definition of accessible procedures in every commercial sector by the companies.

The inspirational words of the preamble to the CRPD says, “[that] disability is an evolving concept and [...] results from the interaction between persons with impairments and attitudinal and environmental barriers that hinders their full and effective participation in society on an equal basis with others”⁵⁴; as well as the speech of the Italian Minister of Labour, Health and social policies on the CRPD presentation in which he asks cooperation and accountability by Government, oppositions party, non-profit organizations (third-sector), and all civil society for a change to the independent and freedom of persons with disabilities⁵⁵.

References

[1] Barbuto, R., Biggeri, M., and Griffo, G. (2011). “Life project, peer counselling and self-help groups as tools to expand capabilities, agency and human rights”. *Alter - European Journal of Disability research, Revue européen de recherche sur le handicap* 5 (3), pp. 192-205.

[2] Berlingieri, F. (2011). “The Athens Convention on The Carriage of passengers and their Luggage by Sea and the European Parliament Regulation (EC) n. 392/2009”. *Diritto Marittimo*.

[3] Campanella, F. (1992). “Lo Stato e il mercato. Le idee e i miti di un passato più o meno prossimo”. *Pubblico e provato nel sistema economico* by S. Beretta, Milano, Giuffrè.

[4] Dahrendorf, R. ([1970] 1995). “*Lebenschancen. Anlaufe zur sozialen und politischen Theorie*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main”. Roma – Bari: Laterza.

[5] Dubois, J. L., Brouillet, A. S., Bakhsh, P., and Duray Soundron, C. (eds). (2008). “*Repenser l'action collective: une approche par les capabilities*”. Paris: Collection Étique économique. L'Harmattan.

⁵⁴ CRPD Preamble, (e).

⁵⁵ *Direzione Generale della Comunicazione e della Direzione Generale per l'Inclusione e i diritti sociali e la responsabilità sociale delle imprese (CSR)*, Presentation of Maurizio Sacconi *Ministro del Lavoro, della Salute e delle Politiche Sociali*, red by S. Tognoloni e A. Sanna. *Ministero del Lavoro, della Salute e delle Politiche Sociali* (Italy). September 2009. https://www.esteri.it/mae/resource/doc/2016/07/c_01_convenzione_onu_ita.pdf

[6] Gaskell, N. (2001). "Revision of the Athens Convention 1974 on the Carriage of Passengers and their Luggage by sea". *Liability to pay damages under Greek and International Maritime Law*, 4th International Conference on Maritime Law. 6th-9th June. Reports, Pireus.

[7] Harris, J. E. (2015). "Processing Disability". 64 *Am. U. L. Rev.* pp. 457-534.

[8] Hill, C. (2002). "Passengers' progress". *P&I International* 16 (7).

[9] Marzano, A. (1994). "Dal primo al terzo capitalismo industriale. Un commento alle recenti riflessioni su esperienze e prospettive del capitalismo". *Industria e sindacato*.

[10] Perlingieri, P. (1994). "Prolusione letta al Congresso Nazionale dei Giuristi Cattolici Italiani «Iniziativa economica, solidarietà sociale e diritti della persona»". Rome, December 2-3.

[11] Wiswall, F. (2003) "Protocol to the Athens Convention: an Internationalist's Commentary". *Benedict's Maritime Bulletin*, I.

[12] Zunarelli, S. (2012). "Il Regolamento (EU) n. 1177/2000 sui diritti dei passeggeri che viaggiano per mare: obblighi di vettori e di operatori terminali e problemi applicativi". *Diritto Marittimo*, p. 782.

Appendix I

"Go 4 all", a non-profit association for inclusive action and development strategies for accessible tourism

Generally, the international policies are interested on the independent living of persons with severe disabilities especially when they will be on their own without their parents (or relatives) - in Italy by the law No 112 of 2016⁵⁶. In fact, the framework of principles defined by CRPD, and the areas of implementation suggested by the EU, are aimed to promote prosperity, social inclusiveness and independence of persons with disabilities. By innovative programs such as the co-housing, or specific training for a job as well, the goal to build active citizenship⁵⁷. In this context the disability manager is a crucial figure for the persons with disabilities, helping him/her to grow up his/her individual and collective capabilities.

The disability manager is a quite eclectic professional figure, because, first, he must translate several and general aspects of diversity into specific and adequate answers. Then, he must be deciphering social barriers case-by-case, in relation to the project of life and capabilities of the individual. He will do it with a proper style of

⁵⁶ Legge 22 giugno 2016, n. 112, Disposizioni in materia di assistenza in favore delle persone con disabilità grave prive del sostegno familiare (OJ no 146 of 24-6-2016).

⁵⁷ See more in J.L. Dubois, A.S. Brouillet, P. Bakhshi, C. Duray-Soundron, *Repenser l'action collective: une approche par les capacités*.

approach, putting the person - and not his disability – at the centre of decisions making. In this way, he may expand the asset of opportunities and freedom of choice for the disabled, increasing their capacity to form self-determined preferences⁵⁸.

So, the disability manager is relevant also in the fields of tourism and transportation. The focus on maritime transportation – seen above – is one of the tools for an accessible tourism. It shows the importance of training procedures on disability for the tourist's stakeholders, in which the professional of disability manager is aimed at non-discrimination.

General expectation is to providing disabled customers the tools to access services, for an independent living, and for their full participation in the society. Associations, individuals and other subjects may plan activities for the autonomy and independence of persons with disabilities in respect of their rights and their will.

On the base of these awareness acquired during my PhD research, Go 4 all association⁵⁹ is born with the mission of promoting accessible tourism through information for a real necessity of a change of the society.

“Go 4 all” association involves Experts in tourism and University subjects through learning by doing programs. First projects carried out is the survey, in Italy, on the knowledge of the rights of passengers with disabilities, and the e-Learning course on accessible tourism.

The first showed a lack of general knowledge on the rights of persons with disabilities in passenger transportation⁶⁰; the second was achieved with a partnership of Italian associations⁶¹, students, and individual persons with disabilities, as well⁶², which was recently published on an online platform for Italian travel agencies⁶³.

The purpose of the latter is to share the knowledge on disabilities and their rights⁶⁴ and improve the customers' approach and loyalty.

Lastly, the next step will be a definition of training procedures of training for the companies of transportation, aligned with the requirements of EU Regulations on transportation⁶⁵.

⁵⁸ On life project, disability and capabilities, see R. Barbuto, M. Biggeri, G. Griffo, (2011) life project, peer counselling and self-help groups as tools to expand capabilities, agency and human rights, 192-205.

⁵⁹ Go 4 all address: Ancona, via del Canale 22, Italy. Mail: info@go4all.it. Website: www.associazionego4all.it.

⁶⁰ Go 4 all website: <http://www.associazionego4all.it/wp-content/uploads/2018/09/SONDAGGI-TORTE-TOTALE.pdf>.

⁶¹ Partnership: Cibo Amico (<https://www.ciboamico.it/3/jo/>); Omphalos (<https://www.associazionemphalos.org/>), AILI (<http://www.associazioneailli.it/>).

⁶² Pamela Cazzaniga (<http://ilmondodipamela.it/>), Alessandro Bordini (<http://www.alessandrobordini.com/>), Ila Moore (<https://divanatablog.wordpress.com/>).

⁶³ Go Academy, Online Platform (www.goacademy.it).

⁶⁴ Especially the rights of accessibility, assistance, information.

⁶⁵ See footnote N 9.

**Ordered numerical systems in Hilbert's
Grundlagen der Geometrie
Sistemi numerici ordinati nei *Grundlagen
der Geometrie* di Hilbert**

Andrea Battocchio *

Received: 08-07-2018. Accepted: 28-11-2018. Published: 31-12-2018

doi:10.23756/sp.v6i2.419

©Andrea Battocchio



Abstract

Recently, several studies have shown how the distance between *Grundlagen* and Hilbert's early publications is not as deep as previously thought, but there is a significant consequentiality with the theory of numerical fields. In reiterating this vision, we intend to show how the results obtained by Hilbert, in particular on the theorems of Pappus and Desargues, are the consequence of a broader research on the possibility of introducing numbers within the geometry to coordinate the plan or the space.

In the development of research, the Hurwitz's discovery of the only four normed division algebras and the ideas on the finiteness of the instruments to be used in geometry, acquired at the beginning of his career, played a decisive role, in particular the waiver of the concept of continuity and the limitation to ordered and countable numerical systems. In the *Grundlagen* conclusions, Hilbert emphasizes the importance of demonstrating the impossibility of assumptions, including the impossibility of determining, by means of only geometric relations of incidence, any ordered numerical systems that have

*Liceo "Primo Levi", San Donato Milanese, Italy. andrea.battocchio@levi.gov.it

the same properties of quaternions and octonions with respect to the operations of arithmetic.

Keywords:Hilbert, Hurwitz, Geometric foundation of numbers, Ordered numerical system

Sunto

Recentemente diversi studi hanno mostrato come la distanza tra i *Grundlagen* e le precedenti pubblicazioni di Hilbert non sia tanto abissale come ritenuto in passato, ma vi sia una significativa consequenzialità con la teoria dei campi numerici. Nel ribadire questa visione, si intende mostrare come i risultati ottenuti da Hilbert, in particolare sui teoremi di Pappo e di Desargues, siano conseguenza di una ricerca più ampia sulla possibilità di introdurre all'interno della geometria dei sistemi numerici atti a coordinatizzare il piano o lo spazio.

Nello sviluppo della ricerca hanno avuto un ruolo determinante la scoperta di Hurwitz delle uniche quattro algebre di divisione normate e le idee maturate, già agli inizi della sua carriera, sulla finitezza degli strumenti da utilizzare in geometria, in particolare la rinuncia al concetto di continuità e la limitazione a sistemi numerici ordinati e numerabili. Nelle conclusioni dei *Grundlagen*, Hilbert rimarca l'importanza di dimostrare l'impossibilità delle assunzioni, tra cui l'impossibilità di determinare, attraverso solo relazioni geometriche di incidenza, dei sistemi numerici ordinati che abbiano le stesse proprietà dei quaternioni e degli ottonioni rispetto alle operazioni dell'aritmetica.

Paole Chiave:Hilbert, Hurwitz, Fondazione geometrica dei numeri, Sistemi numerici ordinati

1 Introduzione

La pubblicazione dei manoscritti di Hilbert sulle sue lezioni di geometria, tenute tra il 1891 e il 1902 [31], ha aperto nuovi e fecondi studi sull'origine dei *Grundlagen der Geometrie*; testo ritenuto da Weyl [92] molto distante dal precedente lavoro di Hilbert sulla teoria dei campi numerici, il celebre *Zahlbericht* [43], e accolto con stupore per gli argomenti trattati dagli stessi studenti di Gottinga, secondo quanto raccontano i biografi Blumenthal e Reid.¹

¹[9, p. 402] e [69, p. 57]. Nonostante i manoscritti e le note per le lezioni mostrino l'interesse di Hilbert per la geometria almeno dal 1891, lo stupore degli studenti di Gottinga è verosimile, perché il primo corso di geometria da lui tenuto a Gottinga risale all'anno accademico 1898/99, i precedenti erano tutti stati svolti a Königsberg oppure erano rivolti a insegnanti di scuole superiori [31, pp. 609–12].

Dai manoscritti emerge come la consequenzialità con la teoria dei campi numerici e con gli studi di geometria proiettiva, già avviati negli anni di Königsberg dal 1886 al 1895, sia ben evidente, così come i contributi e le influenze ricevute dagli amici Minkowski² e Hurwitz.

Giovannini [28] e Anatriello [2] hanno recentemente avanzato l'ipotesi che lo scopo ultimo dell'opera di Hilbert non sia l'assiomatizzazione della geometria euclidea fine a sé stessa, ma quello di capovolgere, attraverso l'assiomatizzazione, l'idea di una geometria dipendente dall'aritmetica, posizione implicita fra i sostenitori della geometria analitica. Hilbert conosceva bene gli indiscutibili risultati del metodo analitico delle coordinate, ma per preservare l'indipendenza e il ruolo dell'intuizione, caratteristici della geometria sintetica,³ si pone l'obiettivo di far emergere i numeri all'interno della geometria stessa. Attraverso un'aritmetica dei segmenti, basata sui due teoremi fondamentali di Pappo-Pascal e Desargues, individua dei sistemi di coordinate i cui insiemi numerici hanno proprietà diverse in funzione della geometria scelta.

I possibili sistemi numerici atti a coordinare il piano e lo spazio proiettivo sono le algebre di divisione normate, che Hurwitz nel 1898 aveva dimostrato essere solo quattro: i numeri reali $\mathbb{R}$, i complessi $\mathbb{C}$, i quaternioni $\mathbb{H}$ e gli ottonioni $\mathbb{O}$.

Nel seguito si presenteranno i primi importanti lavori algebrici che Hilbert condusse in parallelo ai corsi di geometria tenuti a Königsberg; si riproporrà la dimostrazione del teorema di Hurwitz, seguendo la memoria originale del 1898; si espliciteranno infine i passaggi dei *Grundlagen* che contengono i risultati della ricerca iniziata anni prima sull'introduzione dei numeri in geometria.

2 I primi lavori algebrici di Hilbert

Il primo ambito di ricerca di Hilbert fu la teoria degli invarianti. Nella sua tesi di dottorato [36] si occupò di invarianti algebrici e successivamente di invarianti delle proiezioni geometriche, in stretto contatto epistolare con Felix Klein (1849-1925) [52].

I due matematici si conobbero per la prima volta nel 1885, quando Hilbert frequentò alcune lezioni di Klein a Lipsia, su consiglio del suo professore di matematica a Königsberg Adolf Hurwitz (1859-1919). Hurwitz a sua volta era stato studente di Klein e sotto la sua guida aveva conseguito il dottorato con una tesi sulle funzioni modulari ellittiche.

Le potenzialità del giovane Hilbert furono immediatamente colte da Klein, che lo spronò a confrontarsi di persona con le più eminenti menti matematiche del

²Per l'influenza di Minkowski sui lavori di Hilbert si veda [78].

³Sul ruolo dell'intuizione in geometria secondo Hilbert, anche in rapporto all'*Anschauung* kantiana citata nell'epigrafe dei *Grundlagen*, si veda [72], [16] e l'introduzione a [51].

tempo: Hermite, Poincaré, Schwarz, Fuchs, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass e Gordan [69, pp. 22–31]. Hilbert li incontrò tutti, ma due di essi soprattutto influenzarono le sue idee e la sua iniziale carriera: Leopold Kronecker (1823-1891) e Paul Gordan (1837-1912).

A testimonianza di quanto Hilbert rimase impressionato dal pensiero di Kronecker, Reid racconta che durante una delle due conversazioni, avvenute nel 1886 e nel 1888, Hilbert riempì quattro pagine del suo quaderno di appunti, quando a tutti gli altri matematici visitati ne aveva dedicata al massimo una.

Ciò che lo colpì maggiormente, fu da lui esternato oltre 40 anni dopo, nel 1931:

«Più o meno nello stesso periodo [Hilbert si stava riferendo all'anno 1888] e quindi più di una generazione dopo, Kronecker esprimeva brillantemente una concezione che illustrava con numerosi esempi; questa concezione oggi coincide essenzialmente con il nostro modo finitista di pensare»⁴

Per Kronecker la matematica aveva il suo fondamento nell'esperienza. La matematica è una scienza naturale i cui oggetti esistono in relazione alla nostra esperienza del contare. Gli unici numeri che ci sono dati sono gli interi positivi e tutti gli altri oggetti matematici devono essere costruiti da questi [10].

I numeri irrazionali quindi non esistono,⁵ perché non possono essere costruiti mediante una quantità finita di operazioni, ma soltanto attraverso infiniti passaggi, come ad esempio le frazioni continue.

L'inesistenza dei numeri irrazionali lo porta anche a rifiutare la continuità dei reali, perno attorno a cui ruotano i fondamenti dell'analisi messi a punto in quello stesso periodo da Weierstrass, suo collega all'università di Berlino.

Dalle idee di Kronecker si è sviluppata una particolare concezione costruttivista della matematica, detta finitista, che ammette l'esistenza degli oggetti matematici soltanto se possono essere costruiti attraverso un numero finito di operazioni; è questa concezione che Hilbert richiama all'inizio degli anni trenta e che reputa sostanzialmente coincidente con il suo modo di pensare.

L'influenza di Kronecker nei confronti di Hilbert passò anche attraverso un suo allievo che ebbe un ruolo indiscutibile nello sviluppo dei *Grundlagen*: Moritz Pasch (1843-1930) [27]. Le *Lezioni di geometria nuova* di Pasch [66] sono incontestabilmente il primo testo che supera gli *Elementi* di Euclide nell'impostazione di un rigoroso sistema assiomatico. Pasch si preoccupò di non tralasciare nessuna ovvia relazione, presentando un sistema di assiomi propriamente completo. Diverse sono le relazioni, fino ad allora considerate ovvie, che assiomatizza per primo: la

⁴[58, p. 267], parentesi quadre nel testo originale.

⁵Edwards riporta che Kronecker, discutendo con Lindemann mentre stava cercando di dimostrare la trascendenza di π , gli avesse obiettato “A cosa servono le tue belle ricerche su π ? Perché ti affanni a studiare questi problemi quando i numeri irrazionali non esistono nemmeno?” [21, p. 203].

relazione di congruenza, con la prima esplicitazione dell'assioma di Archimede per segmenti, [66, p. 102], le relazioni d'ordine, in particolare il concetto di “essere tra” (*zwischen*) [66, pp. 5–7] e l'assioma equivalente al teorema di separazione del piano, conosciuto in seguito come assioma di Pasch.⁶

Oltre al rigore del metodo, che gli valse l'epiteto di «padre del rigore in geometria» da parte di Freudenthal [26], Pasch condivideva con Kronecker la netta opposizione all'idea di *contiuum*, derivante da una concezione estremamente empirica della geometria. Nelle *Lezioni* richiama gli studi sul continuo compiuti una decina di anni prima da Cantor e Dedekind, sostenendo che «nell'osservazione empirica non si può mai far riferimento ad un numero infinito di cose» ed inoltre «un segmento non può contenere un numero infinito di punti a meno di estendere la definizione data di punto allontanandola dal suo significato intuitivo».⁷

Questa visione è presente anche nei *Grundlagen* e uno degli scopi principali dell'opera di Hilbert è proprio mostrare come la geometria euclidea e proiettiva sia costruibile anche senza il concetto di continuità.

L'altro decisivo confronto, che preparò Hilbert ad una fulminea carriera, avvenne, sempre nel 1888, con il “re degli invarianti” Paul Gordan ([92] e [74]).

In quel periodo il principale problema irrisolto della teoria degli invarianti era la generalizzazione ad un numero arbitrario di variabili del teorema di finitezza delle basi degli invarianti di una forma algebrica, dimostrato da Gordan venti anni prima nel caso di due variabili.

L'invariante I_{F_n} di una forma algebrica binaria di grado n del tipo

$$F_n(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \dots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n$$

è una quantità che dipende dai soli coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ e dai coefficienti della trasformazione lineare delle variabili:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

in modo che l'invariante $I_{F'_n}$ della forma

$$F'_n(x', y') = a_n (x')^n + a_{n-1} (x')^{n-1} (y') + a_{n-2} (x')^{n-2} (y')^2 + \dots + a_1 (x') (y')^{n-1} + a_0 (y')^n$$

sia dato da

$$I_{F'_n} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^m I_{F_n}$$

⁶[66, p. 25] e [47, p. 6], nel seguito l'assioma II_5.

⁷[66, pp. 125–7], si vedano anche [85, pp. 216–8] e [15, p. 90].

dove m è un opportuno numero intero.⁸

Secondo il teorema di finitezza, dimostrato da Gordan nel 1868, tutti gli invarianti di una data forma algebrica binaria di qualsiasi grado sono ricavabili da un numero finito di invarianti della stessa forma attraverso opportune relazioni; in altre parole per ogni forma algebrica binaria di qualsiasi grado n , esiste una base finita di invarianti da cui si possono ricavare tutti gli altri invarianti di quella forma.⁹

Il passo successivo consisteva nel generalizzare l'esistenza di una base finita al caso di forme algebriche di più variabili.

Hilbert, nel 1890, due anni dopo il suo incontro con Gordan, dimostrò l'estensione del teorema di finitezza nel caso più generale di n variabili senza però fornire un metodo costruttivo e basandosi su una *reductio ad absurdum* [37]. Nonostante il parere negativo di Gordan, incaricato come *referee* dell'articolo, la dimostrazione fu pubblicata sui *Mathematische Annalen* grazie all'intervento di Klein.¹⁰

Nel settembre del 1892 Hilbert completò il lavoro pubblicando un'ultima memoria sull'argomento, correggendo gli errori e indicando anche un metodo costruttivo. La memoria si concludeva con una perentoria chiosa che preludeva un netto cambio dell'ambito di ricerca a cui si sarebbe dedicato negli anni successivi: «con questo credo di aver completato gli obiettivi della teoria degli invarianti delle for-

⁸Ad esempio, per la forma binaria quadratica $F_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, un invariante I_{F_2} è il discriminante $\Delta_{F_2} = b^2 - 4ac$; eseguendo, infatti, la sostituzione di variabili $x = \alpha x' + \beta y'$ e $y = \gamma x' + \delta y'$, il discriminante della forma quadratica $F'_2(x', y') = a(x')^2 + b(x')(y') + c(y')^2$ è $\Delta_{F'_2} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \Delta_{F_2}$ e pertanto $I_{F'_2} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 I_{F_2}$.

⁹Fino al 1868 erano note le basi degli invarianti delle forme binarie fino al quarto grado. Gli invarianti della forma binaria quadratica (si veda la nota 8) sono $I_{F_2} = \Delta_{F_2}$ e tutte le sue potenze $(I_{F_2})^k$, con $k \in \mathbb{N}$, quindi I_{F_2} costituisce una base. Similmente gli invarianti della forma binaria cubica $F_3(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ sono $I_{F_3} = 4(a\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9})(\frac{b}{3}d - \frac{c^2}{9}) - (ad - \frac{bc}{9})^2$ e tutte le sue potenze $(I_{F_3})^k$. Gli invarianti della forma binaria di quarto grado $F_4(x, y) = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$ sono invece $I_{F_4} = \frac{ace}{6} + \frac{bcd}{48} - \frac{ad^2}{16} - \frac{eb^2}{16} - \frac{c^3}{216}$, $J_{F_4} = ae - \frac{bd}{4} - \frac{c^2}{12}$, tutte le rispettive potenze $(I_{F_4})^k$ e $(J_{F_4})^k$ ed anche alcune altre relazioni tra questi due invarianti come ad esempio $L_{F_4} = 4(J_{F_4})^3 - (I_{F_4})^2$ e $K_{F_4} = (J_{F_4})^3 - 27(I_{F_4})^2$; una base per gli invarianti della forma binaria di quarto grado è quindi $\{I_{F_4}, J_{F_4}\}$ [77]. Nel 1868 Gordan dimostrò che, anche per forme algebriche di grado superiore, tutti gli invarianti di una data forma possono essere ottenuti da una base finita di invarianti della stessa forma algebrica. Fornì anche un metodo di calcolo, sebbene molto laborioso, per determinare la base degli invarianti di una forma binaria di qualsiasi grado n e lo applicò a forme di quinto e sesto grado [29].

¹⁰In letteratura è spesso citata la reazione di Gordan alla dimostrazione di Hilbert: «das ist keine Mathematik, das ist Theologie!» («Questa non è matematica, è teologia!»), di solito con un'accezione negativa a sottolineare l'enorme distanza metodologica tra due generazioni di matematici (si veda ad esempio [92] e [55]). Un'attenta analisi della personalità di Gordan e delle fonti che riportano la celebre frase (la prima delle quali in ordine cronologico è successiva alla morte di Gordan [64], mostra come quell'interpretazione sia tutt'altro che scontata; anzi Gordan condivise fin da subito la dimostrazione di Hilbert ma diede un parere negativo alla pubblicazione sui *Mathematische Annalen* semplicemente perchè la prima versione del teorema non era completamente corretta [60].

me algebriche» [40]. La stessa frase è citata da Weyl, nel necrologio a Hilbert [92], per sostenere la netta suddivisione in periodi della sua attività: un primo periodo dal 1885 al 1893 sulla teoria degli invarianti, un secondo periodo dal 1893 al 1898 sulla teoria dei campi algebrici e un terzo periodo dal 1898 al 1902 sui fondamenti della geometria. Tale suddivisione è oggi difficilmente accettabile in maniera così netta, per la continuità delle ricerche geometriche ed algebriche dal 1893 al 1899, che qui si cercherà di approfondire.

Sempre nel 1892 Hurwitz aveva accettato un posto di *full professor* al Politecnico di Zurigo e Hilbert era stato scelto per sostituirlo a Königsberg. Hilbert e Hurwitz avevano solo tre anni di differenza e ben presto il rapporto docente-discente si era trasformato in uno stretto rapporto di amicizia che perdurò fino alla morte prematura di Hurwitz. I due usavano ritrovarsi tutti i pomeriggi per passeggiare e discutere su ogni branca della matematica. A queste passeggiate, quando si trovava a Königsberg per trascorrere le vacanze in famiglia, si univa anche l'altro amico fraterno, Herman Minkowski (1864-1909) [50].

La teoria dei numeri, in particolare i lavori di Kummer, Dedekind e Kronecker, erano fonte di interessanti confronti tra i tre amici e quando Hilbert decise di abbandonare le ricerche sulla teoria degli invarianti si dedicò proprio alla teoria dei campi di numeri algebrici [69, pp. 41–2].¹¹ A gennaio del 1893 mise a punto una nuova e più semplice dimostrazione della trascendenza dei numeri e e π [39] e a settembre una nuova dimostrazione sull'univocità della scomposizione dei numeri algebrici in ideali primi [42].¹²

Nell'autunno dello stesso anno, Hilbert e Minkowski ricevettero dalla Società Matematica Tedesca (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*) l'incarico di redigere un rapporto sullo stato dell'arte della teoria dei numeri (*Zahlbericht*). Minkowski avrebbe dovuto occuparsi della teoria elementare dei numeri, Hilbert di quella dei numeri algebrici. Dopo qualche tempo però, Minkowski rinunciò all'incarico per dedicarsi totalmente al suo libro *Geometrie der Zahlen* [61] e il rapporto fu completato da Hilbert nel 1897 [43]. Lo *Zahlbericht* superò di gran lunga le aspettative della Società Matematica Tedesca e per molti anni rimase la pietra miliare per lo studio della teoria dei campi algebrici [11].

¹¹Le fonti principali sulla vita di Hilbert in questo periodo sono le lettere di Minkowski a Hilbert, purtroppo quelle scritte da Hilbert a Minkowski sono ancora irrimediabilmente perse [1].

¹²La trascendenza di e fu dimostrata per la prima volta da Hermite [34] e quella di π da Lindemann [57], la teoria degli ideali primi fu invece formulata da Kummer a partire dal 1844 ed in seguito ripresa da Dedekind [11, p. 114].

3 Il teorema di Hurwitz

Nel 1894 Hurwitz fu raggiunto a Zurigo da Minkowski, mentre Hilbert nel 1895 si trasferì a Gottinga, dove insegnava da molto tempo anche Klein. Nonostante la lontananza, i tre amici rimasero in contatto grazie ad un'assidua corrispondenza privata ed inoltre usavano pubblicare i propri studi sul bollettino dell'Università di Gottinga (*Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*); Hilbert aveva così la possibilità di essere sempre aggiornato sui progressi dei due amici nei rispettivi campi di ricerca.

Dal 1894 al 1898, con nove articoli in cinque anni, Hurwitz fu uno degli autori più prolifici della sezione di matematica e fisica dei *Nachrichten*, dietro soltanto ai fisici di Gottinga Riecke e Voigt. Tra i suoi articoli, tutti sulla teoria dei numeri, due sono particolarmente significativi: il primo sui quaternioni e il secondo sulla composizione di somme di quadrati.

In [53] Hurwitz analizza il sistema dei quaternioni $\mathbb{H}$ come esempio di corpo non commutativo. Sviluppa su $\mathbb{H}$ un'aritmetica introducendo un metodo di fattorizzazione in quaternioni interi e utilizza le sue proprietà per dimostrare per via algebrica il teorema di Jacobi sulla molteplice rappresentabilità di un numero naturale intero come somma di quattro quadrati.¹³

La somma di quadrati è anche l'oggetto di [54], dove Hurwitz dimostra che l'identità

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \quad (1)$$

con $z_1, z_2, \dots, z_n$ bilineari¹⁴ in $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$, è verificata soltanto per $n = 1, 2, 4$ e 8 .¹⁵

Questo risultato è centrale nella storia dell'algebra, perché implica che le uniche algebre di divisione normate sul campo dei reali hanno dimensioni 1, 2, 4 oppure 8^{16} e, a meno di isomorfismi, sono quattro: i numeri reali $\mathbb{R}$, i complessi $\mathbb{C}$, i quaternioni $\mathbb{H}$ e gli ottonioni $\mathbb{O}$.

¹³Un numero naturale n può essere rappresentato come somma di quattro quadrati in diversi modi; Jacobi scoprì, utilizzando strumenti di analisi complessa, che questi modi sono esattamente $24s$, nel caso di n pari, e $8s$, nel caso di n dispari, dove s è la somma di tutti i divisori dispari di n . Hurwitz grazie alla scomposizione in quaternioni primi riuscì a dimostrare il teorema per via algebrica [90, pp. 186–7].

¹⁴Una funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ è bilineare nelle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$ se può essere scritta nella forma $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + a_{2n}x_2y_n + \dots + a_{nn}x_ny_n$ con $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn} \in \mathbb{R}$.

¹⁵Non limitandosi a funzioni bilineari, ma considerando più in generale delle funzioni razionali nelle $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$, Pfister ha dimostrato che la (1) è verificata per ogni n multiplo di 2 [12].

¹⁶In generale ogni algebra di divisione, su qualsiasi campo, ha dimensioni 1, 2, 4 oppure 8 [6].

Ordered numerical systems in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*

La dimostrazione originale di Hurwitz procede secondo il seguente schema, leggermente rivisto da Curtis [18, pp. 308-14].¹⁷

Se $n = 1$, l'identità (1) diventa $x^2y^2 = z^2$ da cui $xy = z$.

Se $n > 1$, le $z_1, z_2, \dots, z_n$, dato che sono bilineari in $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$, si possono scrivere come

$$\begin{cases} z_1 = a_{111}x_1y_1 + a_{112}x_1y_2 + \dots + a_{11n}x_1y_n + \dots + a_{1n1}x_ny_1 + \dots + a_{1nn}x_ny_n \\ z_2 = a_{211}x_1y_1 + a_{212}x_1y_2 + \dots + a_{21n}x_1y_n + \dots + a_{2n1}x_ny_1 + \dots + a_{2nn}x_ny_n \\ \vdots \\ z_n = a_{n11}x_1y_1 + a_{n12}x_1y_2 + \dots + a_{n1n}x_1y_n + \dots + a_{nn1}x_ny_1 + \dots + a_{nnn}x_ny_n \end{cases}$$

Raccogliendo a fattor comune le y_i e scrivendo in forma matriciale i coefficienti delle x_i :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & \dots & a_{11n} \\ a_{211} & a_{212} & \dots & a_{21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n11} & a_{n12} & \dots & a_{n1n} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{121} & a_{122} & \dots & a_{12n} \\ a_{221} & a_{222} & \dots & a_{22n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n21} & a_{n22} & \dots & a_{n2n} \end{bmatrix} + \dots \\ \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n1} & a_{1n2} & \dots & a_{1nn} \\ a_{2n1} & a_{2n2} & \dots & a_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn1} & a_{nn2} & \dots & a_{nnn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Se si nominano le matrici

$$\begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & \dots & a_{11n} \\ a_{211} & a_{212} & \dots & a_{21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n11} & a_{n12} & \dots & a_{n1n} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1; \quad \begin{bmatrix} a_{121} & a_{122} & \dots & a_{12n} \\ a_{221} & a_{222} & \dots & a_{22n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n11} & a_{n12} & \dots & a_{n1n} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2; \quad \dots; \\ \begin{bmatrix} a_{1n1} & a_{1n2} & \dots & a_{1nn} \\ a_{2n1} & a_{2n2} & \dots & a_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn1} & a_{nn2} & \dots & a_{nnn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_n$$

¹⁷Numerose altre dimostrazioni sono state prodotte utilizzando concetti di algebra astratta, si vedano ad esempio [56], [6] e [14].

l'equazione precedente diventa

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = (x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \dots + x_n \mathbf{A}_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

moltiplicando a sinistra per il trasposto dei rispettivi membri

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \left[(x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_1 + \dots + x_n \mathbf{A}_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right]^T \cdot \left[(x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_1 + \dots + x_n \mathbf{A}_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right]$$

ed eseguendo i prodotti

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} (x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \dots + x_n \mathbf{A}_n)^T (x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \dots + x_n \mathbf{A}_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

l'equazione risultante mostra che, affinché sia valida l'identità (1), deve essere

$$(x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \dots + x_n \mathbf{A}_n)^T (x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \dots + x_n \mathbf{A}_n) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 \end{bmatrix}$$

applicando la trasposizione alle matrici della prima parentesi e indicando con $\mathbf{I}$ la matrice identità, la precedente diventa

$$(x_1 \mathbf{A}_1^T + x_2 \mathbf{A}_2^T + \dots + x_n \mathbf{A}_n^T)(x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \dots + x_n \mathbf{A}_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \mathbf{I} \quad (2)$$

ed uguagliando i coefficienti di x_n e x_n^2 si osserva che $\mathbf{A}_i^T \cdot \mathbf{A}_i = \mathbf{I}$.
Introducendo le seguenti nuove matrici

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_n^T; \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_n^T; \quad \dots; \quad \mathbf{B}_{n-1} = \mathbf{A}_{n-1} \cdot \mathbf{A}_n^T$$

e moltiplicando a sinistra e a destra per $\mathbf{A}_n$ si ottiene

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}_n; \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{A}_n; \quad \dots; \quad \mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{B}_{n-1} \cdot \mathbf{A}_n$$

e

$$\mathbf{A}_1^T = \mathbf{A}_n^T \cdot \mathbf{B}_1^T; \quad \mathbf{A}_2^T = \mathbf{A}_n^T \cdot \mathbf{B}_2^T; \quad \dots; \quad \mathbf{A}_{n-1}^T = \mathbf{A}_n^T \cdot \mathbf{B}_{n-1}^T$$

l'equazione (2) diventa allora

$$(x_1 \mathbf{B}_1^T + x_2 \mathbf{B}_2^T + \dots + x_{n-1} \mathbf{B}_{n-1}^T + x_n)(x_1 \mathbf{B}_1 + x_2 \mathbf{B}_2 + \dots + x_{n-1} \mathbf{B}_{n-1} + x_n) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \mathbf{I} \quad (3)$$

I valori di n che verificano l'identità (1) coincidono con i valori di n per cui è possibile determinare le matrici $n \times n$ dei coefficienti $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{n-1}$.

Confrontando i coefficienti nella (3), dopo la moltiplicazione del membro a sinistra, si ricava che

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_i = \mathbf{I}; \quad \mathbf{B}_i^T + \mathbf{B}_i = 0; \quad \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_j^T + \mathbf{B}_i = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

o in maniera equivalente

$$\mathbf{B}_i^T = -\mathbf{B}_i; \quad \mathbf{B}_i^2 = -\mathbf{I}; \quad \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j = -\mathbf{B}_j \mathbf{B}_i \quad \text{per } i \neq j \quad (4)$$

Dalla prima delle (4) si evince che le matrici sono antisimmetriche e dalla seconda che il loro determinante non può essere nullo, quindi la loro dimensione deve essere pari.

Nel seguito si supporrà che n sia pari.

Considerando il prodotto di r matrici si ha, per la prima e la terza delle (4):

$$(\mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \dots \mathbf{B}_{i_r})^T = \mathbf{B}_{i_r}^T \dots \mathbf{B}_{i_2}^T \mathbf{B}_{i_1}^T = (-1)^r \mathbf{B}_{i_r} \dots \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_1} = (-1)^{r+(r-1)+(r-2)+\dots+1} \mathbf{B}_{i_r} \dots \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_1} = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \mathbf{B}_{i_r} \dots \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_1} \quad (5)$$

da cui $\mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \dots \mathbf{B}_{i_r}$ è simmetrica se $r = 0, 3 \pmod{4}$ e antisimmetrica se $r = 1, 2 \pmod{4}$. Ogni matrice $\mathbf{B}_1$ può essere scritta come combinazione lineare delle seguenti $2^n - 1$ matrici:

$$\mathbf{I}; \quad \mathbf{B}_{i_1}; \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2}; \quad \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_3}; \quad \dots; \quad \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_3} \dots \mathbf{B}_{i_{n-1}} \quad (6)$$

dove l'indice della matrice che moltiplica a sinistra è minore di quelli che seguono:

$$i_1 < n, \quad i_1 < i_2 < n, \quad i_1 < i_2 < i_3 < n, \quad \dots$$

Se le matrici (6) sono linearmente indipendenti allora, attribuendo a ciascuna di esse un coefficiente, la relazione

$$a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{B}_1 + \dots + a_{12} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 + a_{13} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_3 + \dots \\ \dots + a_{123} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 + \dots + a_{12\dots n-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \dots \mathbf{B}_{n-1} = 0 \quad (7)$$

è verificata se e solo se i coefficienti sono tutti nulli:

$$a_0 = a_1 = a_{12} = a_{13} = \dots = a_{123} = \dots = a_{12\dots n-1} = 0$$

Separando il primo termine ed operando sui coefficienti, la relazione (7) può essere scritta nella forma

$$\mathbf{I} = \sum c_{i_1} \mathbf{B}_{i_1} + \sum c_{i_1 i_2} \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} + \sum c_{i_1 i_2 i_3} \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_3} + \dots \\ \dots + c_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \dots \mathbf{B}_{i_{n-1}} \quad (8)$$

La matrice identità $\mathbf{I}$ è simmetrica e può essere ottenuta soltanto da somme di matrici simmetriche, pertanto, per la (5), i coefficienti c_{i_1} e $c_{i_1 i_2}$ devono essere nulli.

Moltiplicando ora a destra e a sinistra per una qualsiasi matrice $\mathbf{B}_i$ si ha

$$\mathbf{B}_i = \sum c_{i_1 i_2 i_3} \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_3} \mathbf{B}_i + c_{i_1 i_2 i_3 i_4} \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_3} \mathbf{B}_{i_4} \mathbf{B}_i + \\ + c_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \dots \mathbf{B}_{i_{n-1}} \mathbf{B}_i$$

ma $\mathbf{B}_i$ è antisimmetrica, quindi se l'indice i non è compreso tra gli indici i_1, i_2, i_3 il prodotto $\mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_3} \mathbf{B}_i$, per la (5), è una matrice simmetrica e, dato che l'indice i può essere scelto arbitrariamente, deve essere $c_{i_1 i_2 i_3} = 0$; viceversa se l'indice i è compreso tra gli indici i_1, i_2, i_3, i_4 allora il prodotto $\mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{B}_{i_3} \mathbf{B}_{i_4} \mathbf{B}_i$, per la seconda delle (4) e per la (5), è una matrice simmetrica e, dato che l'indice i può essere scelto arbitrariamente, deve essere $c_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 0$.

La relazione (8) si riduce allora a

$$\mathbf{B}_i = c_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{B}_{i_2} \dots \mathbf{B}_{i_{n-1}} \mathbf{B}_i \quad (9)$$

Se $n = 2 \pmod{4}$ il prodotto $B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_{n-1}}$, sempre per la (5), è una matrice antisimmetrica quindi $c_{12\dots n-1}$ e tutte le matrici (6) sono linearmente indipendenti. Se invece $n = 0 \pmod{4}$, elevando al quadrato entrambi i membri della (9), si ha

$$c_{12\dots n-1} = \pm 1$$

La non eliminazione di quest'ultimo coefficiente comporta che in questo caso le matrici (6) non sono tutte linearmente indipendenti.

Per cercare quante sono linearmente indipendenti, osserviamo che la (8) si riduce a

$$I = \pm B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_{n-1}}$$

moltiplicando entrambi i membri per una qualsiasi delle (6) si ottiene che la metà di esse è rappresentabile in termini delle altre, quindi le matrici linearmente indipendenti nel caso $n = 0 \pmod{4}$ sono $\frac{1}{2} (2^{n-1})$, cioè 2^{n-2} .

Dato che le matrici B_i sono quadrate di dimensione n e che in uno spazio $n \times n$ più di n^2 equazioni non sono mai tutte linearmente indipendenti, allora deve valere la relazione $2^{n-2} \geq n^2$.

Ricordando inoltre che, a parte il caso $n = 1$, n deve essere pari, i possibili valori sono allora $n = 1, 2, 4, 6$ e 8 .

Si consideri ora il caso $n = 6$.

Tutte le $2^{6-1} = 2^5 = 32$ matrici (6) sono linearmente indipendenti, ma di queste 16 sono antisimmetriche, sono infatti antisimmetriche le 5 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 le 10 $B_i B_j$, con $i < j < n$, e la $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$; in un qualsiasi insieme di matrici 6×6 antisimmetriche, però, soltanto 15 possono essere linearmente indipendenti, perché vi sono solo 15 elementi sopra (o sotto) la diagonale principale, il caso $n = 6$ è quindi da escludere.

La (1) è pertanto verificata solo per $n = 1, 2, 4$ e 8 .

4 Sistemi numerici complessi

Il teorema di Hurwitz esprime il fatto che sul campo dei reali gli unici insiemi nei quali è possibile definire un'algebra di divisione normata sono isomorfi a $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^8$, che corrispondono ai sistemi numerici $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, e $\mathbb{O}$.

Un'algebra $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è un'algebra di divisione se per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, le due equazioni $a \cdot x = b$ e $y \cdot a = b$ hanno ognuna un'unica soluzione in $\mathcal{A}$.

Un'algebra $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è un'algebra normata se, definita una norma su $\mathbb{R}^n$, ad esempio quella euclidea $\|a(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$, per ogni $x, y \in \mathcal{A}$ vale

$$\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\| \quad (10)$$

Grazie alla condizione di bilinearità è facile dimostrare [56, p. 268] che la (1) è verificata se e solo se $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è un'algebra di divisione normata.¹⁸

Ovviamente Hilbert non utilizzava la nomenclatura e il simbolismo dell'algebra astratta moderna,¹⁹ ma all'inizio del terzo capitolo dei *Grundlagen*, nel paragrafo §13 intitolato “Sistemi numerici complessi” (*Complexe Zahlensysteme*),²⁰ elenca le leggi che coincidono con la definizione operativa di algebra di divisione normata, chiamate anche leggi di composizione:

1. Il numero a e il numero b generano per “addizione” il numero c ; in simboli:

$$a + b = c \quad \text{e} \quad c = a + b$$

2. Se a e b sono due numeri allora esistono sempre uno ed un solo numero x e uno ed un solo numero y , tali che

$$a + x = c \quad \text{e} \quad y + a = b$$

3. Esiste un numero definito, chiamato 0, tale che per ogni numero a si ha

$$a + 0 = a \quad \text{e} \quad 0 + a = a$$

4. Il numero a e il numero b generano per “moltiplicazione” il numero c ; in simboli:

$$a \cdot b = c \quad \text{e} \quad c = a \cdot b$$

5. Se a e b sono due numeri dati, e a è diverso da 0, allora esistono sempre uno ed un solo numero x e uno ed un solo numero y , tali che

$$a \cdot x = b \quad \text{e} \quad y \cdot a = b$$

6. Esiste un numero definito, chiamato 1, tale che per ogni a si ha

$$a \cdot 1 = a \quad \text{e} \quad 1 \cdot a = a$$

e aggiunge poi le seguenti proprietà delle operazioni dell'aritmetica:

Se a, b, c sono numeri qualsiasi, allora valgono le seguenti operazioni:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$

8. $a + b = b + a$

¹⁸In [56] gli autori distinguono tra una nozione più generale di algebra normata, dove in luogo della (10) vale la relazione $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, e algebra di composizione, cioè un'algebra normata con l'unità moltiplicativa. Per semplicità di trattazione qui si è preferito seguire [18] e [6].

¹⁹Si veda in proposito [55] e l'introduzione a [44].

²⁰Dalla seconda edizione dei *Grundlagen* [49] la grafia è stata modificata in *Komplexe Zahlensysteme*, coerentemente con la riforma ortografica tedesca del 1901 [5].

- 9. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- 10. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- 11. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- 12. $a \cdot b = b \cdot a$

Le leggi di composizione (1-6) individuano un sistema numerico nel quale è possibile svolgere le quattro operazioni dell'aritmetica: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. La 7 e la 8 rappresentano rispettivamente la proprietà associativa e commutativa dell'addizione, la 9 la proprietà associativa della moltiplicazione, la 10 e la 11 le proprietà distributive della moltiplicazione sull'addizione,²¹ la 12 la proprietà commutativa della moltiplicazione.

Le leggi di composizione (1-6) sono soddisfatte non soltanto dai numeri reali $\mathbb{R}$, ma anche da altri sistemi numerici. Ad esempio dai numeri complessi $\mathbb{C}$, che costituiscono un campo, come i reali, poiché godono di tutte le proprietà 7-12; dai quaternioni $\mathbb{H}$, che formano un corpo non commutativo, poiché non godono della proprietà commutativa della moltiplicazione (12); dagli ottonioni $\mathbb{O}$ che formano una struttura algebrica alternativa, perché non godono né della proprietà 12 né della proprietà associativa della moltiplicazione (9), ma valgono le seguenti identità:

$$(a \cdot a) \cdot b = a \cdot (a \cdot b); \quad (a \cdot b) \cdot a = a \cdot (b \cdot a); \quad (b \cdot a) \cdot a = b \cdot (a \cdot a)$$

che definiscono le algebre alternative [6].

Sempre nel paragrafo §13, di seguito alle proprietà 7-12, Hilbert aggiunge le seguenti regole di ordinamento:

- 13. Se a, b sono due numeri distinti, allora uno ed uno solo di essi (ad esempio a) è sempre maggiore dell'altro. Quest'ultimo è chiamato numero minore; in simboli $a > b$ e $b < a$. $a > a$ non vale per nessun numero a .
- 14. Se $a > b$ e $b > c$, allora $a > c$
- 15. Se $a > b$, allora $a + c > b + c$
- 16. Se $a > b$ e $c > 0$, allora $a \cdot c > b \cdot c$

e le proprietà di continuità:²²

²¹Le proprietà distributive sono due, a sinistra $a \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b$ e a destra $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, perché in generale, in un sistema non commutativo rispetto alla moltiplicazione, non sono entrambe valide.

²²La proprietà 18 non è presente nella prima edizione, è stata aggiunta dalla seconda edizione.

17. (Proprietà archimedeana). Se $a > 0$ e $b > 0$ sono due numeri qualsiasi, allora è sempre possibile aggiungere a a sé stesso un numero sufficiente di volte in modo che la somma risultante sia più grande di b ; in simboli: $a + a + \dots + a > b$.
18. (Proprietà di completezza). È impossibile aggiungere all'insieme dei numeri un altro insieme di oggetti, da interpretare come numeri, in modo che le proposizioni 1-17 siano ancora soddisfatte nel nuovo insieme derivante dall'aggiunta, conservando tutte le relazioni tra i numeri. In altre parole, i numeri formano un insieme di oggetti che non ammette estensioni conservando tutte le relazioni e i teoremi formulati.

Come è noto, soltanto i numeri reali $\mathbb{R}$ soddisfano tutte le leggi e le proprietà 1-18. Gli altri sistemi numerici soddisfano soltanto alcune di esse; ad esempio le proprietà di ordinamento (13-16) non valgono in $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$, così come la proprietà di completezza (18) non vale in $\mathbb{Q}$ e nelle sue estensioni finite o numerabili.

La genesi dei *Grundlagen* è stata ricostruita principalmente attraverso manoscritti precedenti al 1899 ([83] e [31]).²³ Il materiale più significativo a disposizione è composto dalle note preparatorie a tre corsi tenuti da Hilbert negli anni 1891, 1894²⁴ e 1898, il primo sulla geometria proiettiva [38] e gli altri due sulla geometria euclidea ([41] e [45]) e da una dispensa redatta da un dottorando, sotto la supervisione di Hilbert, sempre sulla geometria euclidea [46]. La prima edizione dei *Grundlagen* [47], detta *Festschrift*²⁵ per distinguerla dalle edizioni successive, è il risultato di un progressivo affinamento di quelle note preparatorie.

Il paragrafo §13 dei *Grundlagen*, citato in precedenza, ed in particolare il riferimento alle leggi di composizione, è stato aggiunto da Hilbert soltanto nella dispensa [46], la cui data di compilazione è compresa tra aprile 1898 e marzo 1899 [31, pp. 186–8].

Il 9 luglio 1898 Hurwitz consegnò alla redazione dei *Göttingen Nachrichten* la memoria [54] con la dimostrazione conclusiva che le uniche algebre di divisione normate sul campo dei reali sono quattro, a meno di isomorfismi: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$.

5 L'introduzione dei numeri

Secondo Hallet e Majer [31, pp. 1–14] un motivo ricorrente in tutti i manoscritti di carattere geometrico di Hilbert, dal 1893 al 1899, è il tentativo di in-

²³Manoscritti in senso lato, dato che alcuni dei testi presenti in [31] sono stati fisicamente scritti dalla moglie Kathe o da copisti professionisti, sotto dettatura o su indicazione di Hilbert.

²⁴Il corso del 1894 era stato programmato per il semestre estivo del 1893 ma fu annullato e rinviato all'estate successiva a causa di un numero di iscritti troppo basso [31, p. 66]

²⁵*Festschrift* in tedesco significa “pubblicazione celebrativa”, la prima pubblicazione dei *Grundlagen* avvenne in occasione dell'inaugurazione del monumento eretto a Göttinga in memoria di Gauss e Weber nel 1899.

troddurre i numeri a partire dalla geometria stessa, senza calarli dall'esterno come avviene usualmente nella geometria analitica. Nella geometria analitica classica, infatti, l'attribuzione di coordinate numeriche ad ogni punto del piano, o dello spazio, avviene grazie all'inserzione di assi cartesiani su cui è stato fissato a priori un sistema numerico e quindi una metrica.

Negli appunti per il corso estivo di geometria euclidea del 1894, un paragrafo era intitolato "L'introduzione del numero" (*Die Einführung der Zahl*) e nel suo incipit Hilbert scriveva:

In tutte le scienze esatte, non si ottengono risultati precisi fino a quando non si sono introdotti i numeri. È sempre di grande importanza epistemologica seguire come questo accade

L'esigenza di introdurre i numeri in geometria e soprattutto la scelta di introdurli dall'interno, era dettata dalla volontà di fornire alla geometria un fondamento scientifico, che producesse dei risultati esatti, pur rimanendo indipendente dall'aritmetica.

Il metodo utilizzato in [41] per associare ad un punto su una retta delle coordinate numeriche è molto simile a quello impiegato per la prima volta da von Staudt [88] basato sulla costruzione del quarto punto di una tetrade armonica (*Würfe*).²⁶

Molto simili sono anche gli obiettivi di Hilbert e di von Staudt, per quest'ultimo infatti, prendendo in prestito le parole di Segre [75]:

Da un lato occorreva introdurre maggior rigore nei fondamenti e nei metodi della geometria, dall'altro che la distinzione fra proprietà descrittive, o di posizione, e proprietà di grandezze, o metriche, delle figure, che già Poncellet aveva introdotta largamente, si poteva e si doveva rendere ancora più netta, dando alla geometria di posizione un'assoluta indipendenza da quella metrica, cioè dal concetto di misura.

Prima di Hilbert, von Staudt era già riuscito ad anteporre la geometria al concetto di metrica, ricavando la nozione di ascissa unicamente attraverso figure di incidenza. Le coordinate non erano più inserite dall'esterno, ma erano subordinate ad una costruzione geometrica proiettiva, ancora priva di metrica.

Mentre i suoi predecessori consideravano i punti di vista analitico e sintetico come due approcci alla geometria diversi e indipendenti, von Staudt attribuisce il primato alla geometria sintetica, che lui chiama di posizione (*Geometrie der Lage*), da cui fa dipendere sistematicamente e pedagogicamente la geometria analitica [63]. Nel 1898, Hilbert in [45, p. 222] ribadisce l'importanza dell'introduzione del numero:

²⁶Per un approfondimento si veda [28] e il testo [17] ivi richiamato.

In ogni scienza esatta, l'introduzione dei numeri è un obiettivo principale. È possibile misurare il progresso di una scienza naturale, o di una sua branca, dal grado in cui i numeri sono introdotti. Ma la scienza non deve soccombere allo sterile formalismo, ad un passo successivo dell'evoluzione dovrà tornare su sé stessa per esaminare le fondamenta su cui è arrivata all'introduzione del numero.

Il metodo utilizzato cambia, questa volta si basa sui teoremi di Pappo e di Desargues anziché sulle tetradi armoniche, ma l'obiettivo rimane lo stesso: individuare, solo attraverso relazioni di incidenza tra rette, una struttura numerica interna alla geometria, analoga a quella utilizzata per le coordinate cartesiane.

Hallet e Majer precisano che la struttura algebrica ricercata da Hilbert è equivalente a quella dei numeri reali [31, pp. 11–12 e p. 69] la stessa lettura è data anche da Stillwell in [82]: «Hilbert [...] evidentemente vuole mostrare che i numeri reali possono avere una fondazione geometrica», ma l'intenzione di Hilbert potrebbe essere stata più ampia.

Oltre a Hallett e Majer, la centralità del problema del numero nella stesura dei *Grundlagen* è stata condivisa, nell'ultimo ventennio, anche da altri studiosi.

Rowe riconosce Hilbert come il primo, in epoca moderna, ad aritmetizzare la geometria dall'interno «costruendo nuovi ponti tra le geometrie assiomatiche puramente sintetiche e le geometrie analitiche» [73]. Il suo studio si concentra soprattutto sul significato epistemologico del metodo assiomatico per risolvere una dicotomia aperta tra geometria sintetica e geometria analitica, che Hilbert aveva fatto propria nella relazione con i suoi maestri, in particolare Klein [72].

Giovannini ripercorre le tappe dell'introduzione delle coordinate attraverso relazioni geometriche senza ricorrere ad un'aritmetica a priori, mostrando l'intenzione di Hilbert di dare un fondamento autonomo ed autosufficiente alla geometria [28]. Anatriello analizza il parallelo tra gli ultimi scritti di Frege, pubblicati postumi [24], e i *Grundlagen*. Dopo aver abbandonato la via logicista alla fondazione dell'aritmetica, Frege, negli ultimi anni della sua vita, si convince che l'origine del numero risieda nella geometria euclidea [2]. Nel nuovo tentativo Frege punta direttamente all'introduzione dei numeri complessi per via geometrica, ma il suo lavoro rimane incompiuto. Il gruppo di ricerca di Anatriello, Tortoriello e Vincenzi, ha ripreso quell'idea e grazie all'aritmetica dei segmenti di Hilbert ha mostrato la natura geometrica dei numeri complessi e come introdurli nel piano euclideo [3].

Per validare l'effettiva indipendenza della geometria dall'aritmetica e per mostrare come la geometria sintetica possa autonomamente raggiungere gli stessi risultati della geometria analitica, non è sufficiente limitarsi ai numeri reali, è necessario far emergere in modo puramente geometrico anche tutti gli altri sistemi numerici con i requisiti minimi per coordinatizzare il piano e lo spazio. Questi requisiti

minimi consistono nella possibilità di definire una metrica e di eseguire le quattro operazioni dell'aritmetica,²⁷ in altre parole i sistemi numerici da ricercare coincidono con le algebre di divisione normate [56, p. 267].

A seguito della memoria di Hurwitz del 1898, che fissa le uniche quattro algebre di divisione normate sul campo dei reali, Hilbert modifica gli appunti delle lezioni dei corsi precedenti per considerare una gamma più ampia di sistemi numerici complessi (*Complexe Zahlensysteme*). È dunque plausibile che Hilbert, nello sviluppo delle sue ricerche, intendesse determinare le condizioni per far emergere dalla geometria, unicamente mediante relazioni di incidenza tra rette, non soltanto la struttura di campo dei reali $\mathbb{R}$ e dei complessi $\mathbb{C}$,²⁸ che rispetto alle operazioni dell'aritmetica sono equivalenti, ma anche le strutture meno ricche di proprietà come quelle dei quaternioni $\mathbb{H}$ e degli ottonioni $\mathbb{O}$.

6 Il contenuto dei *Grundlagen*

Il primo capitolo dei *Grundlagen* contiene gli assiomi e le conseguenti definizioni implicite degli oggetti del sistema geometrico: punti, rette e piani.

Gli assiomi sono divisi in cinque gruppi e sono stati modificati più volte nelle sette edizioni pubblicate durante la vita dell'autore. Nel seguito si riportano gli assiomi presenti nel *Festschrift*:

Gruppo I – Assiomi di collegamento (suddivisi in assiomi planari e spaziali)

Assiomi planari

I_1 *Due punti distinti A e B determinano una retta.*

I_2 *Ogni coppia di punti distinti di una retta determinano quella stessa retta.*

Assiomi spaziali

I_3 *Tre punti A, B, C non giacenti su una stessa retta determinano sempre un piano α .*

I_4 *Ogni terna di punti A, B, C di un piano che non giacciono su una stessa retta determinano quello stesso piano. Esiste al massimo un piano che contiene i punti A, B, C. Per ogni piano c'è sempre un punto in esso contenuto.*

I_5 *Se due punti A e B di una retta r giacciono in un piano, allora ogni punto di r giace nel piano α .*

²⁷Segre aveva introdotto in precedenza [76] un sistema di coordinate basato sui numeri bicompleksi, che non ammettono sempre l'operazione di divisione, le geometrie corrispondenti hanno però delle singolarità incompatibili con la geometria euclidea [71].

²⁸Von Staudt aveva già mostrato come coordinatizzare il piano e lo spazio proiettivi attraverso i numeri complessi [89].

I_6 *Se due piani hanno un punto A in comune allora hanno in comune almeno un altro punto B .*

I_7 *Su una retta ci sono almeno due punti, in un piano ci sono almeno tre punti che non giacciono sulla stessa retta e nello spazio ci sono almeno quattro punti che non giacciono nello stesso piano.*

Gruppo II – Assiomi di ordinamento

II_1 *Se A, B, C sono punti di una stessa retta e B giace tra A e C allora B giace anche tra C e A .*

II_2 *Se A e C sono due punti di una retta, allora c'è sempre almeno un punto B che giace tra A e C e almeno un punto D tale che C giace tra A e D .*

II_3 *Per ogni terna di punti di una retta, ne esiste al massimo uno che giace tra gli altri due.*

II_4 *Quattro punti qualsiasi di una retta A, B, C, D possono essere sempre disposti in modo tale che B giaccia tra A e C e anche tra A e D e inoltre che C giaccia tra A e D e anche tra B e D .*

II_5 *Siano A, B, C tre punti che non giacciono su una stessa retta e sia r una retta nel piano individuato dai punti A, B, C che non passa per nessuno dei punti A, B, C . Se la retta r passa per un punto del segmento AB , allora passa anche per un punto del segmento BC oppure per un punto del segmento AC .*

Gruppo III – Assioma delle parallele

III Assioma di Euclide. *In un piano α , per un punto A esterno ad una retta r , può essere tracciata una ed una sola retta che non interseca la retta r ; questa retta è detta parallela a r per A .*

Gruppo IV – Assiomi di congruenza

IV_1 *Se A, B sono due punti di una retta r e A' è un punto della stessa retta o di un'altra retta r' allora è sempre possibile trovare un punto B' da una data parte di r' rispetto ad A' tale che il segmento AB sia congruente o uguale al segmento $A'B'$. In simboli: $AB \cong A'B'$.*

IV_2 *Se un segmento $A'B'$ e un segmento $A''B''$ sono congruenti allo stesso segmento AB , allora il segmento $A'B'$ è congruente a $A''B''$, o più brevemente, se due segmenti sono congruenti ad un terzo allora sono congruenti tra loro.*

IV_3 *Siano AB e BC due segmenti giacenti sulla retta r che, ad eccezione di B , non hanno punti in comune e siano $A'B'$ altri due segmenti su una retta r' che, ad eccezione di B' , non hanno punti in comune, allora se $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$ è anche $AC \cong A'C'$.*

- IV_4 Sia $\widehat{hk}$ un angolo nel piano α e r' una retta nel piano α' e si consideri una delle due regioni individuate dalla retta r' su α' . Sia h' una semiretta giacente su r' uscente dal punto O' . Allora esiste nel piano α' una e una sola semiretta k' tale che l'angolo $\widehat{hk}$ sia congruente, o uguale, all'angolo $\widehat{h'k'}$ e allo stesso tempo tutti i punti interni all'angolo $\widehat{h'k'}$ giacciono nella regione considerata individuata da r' . In simboli: $\widehat{hk} \cong \widehat{h'k'}$. Ogni angolo è congruente a se stesso, cioè è sempre vero che $\widehat{hk} \cong \widehat{hk}$.
- IV_5 Se un angolo $\widehat{hk}$ è congruente a due angoli $\widehat{h'k'}$ e $\widehat{h''k''}$, allora l'angolo $\widehat{h'k'}$ è congruente a $\widehat{h''k''}$. In simboli se $\widehat{hk} \cong \widehat{h'k'}$ e $\widehat{hk} \cong \widehat{h''k''}$ allora $\widehat{h'k'} \cong \widehat{h''k''}$.
- IV_6 Se per due triangoli ABC e $A'B'C'$ valgono le congruenze $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$ allora vale sempre anche la congruenza $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$.

Gruppo V – Assiomi di continuità

- V_1 Assioma di Archimede. Sia A_1 un punto arbitrario su una retta tra due punti dati A e B ; si costruiscano i punti $A_2, A_3, A_4, \dots$, in modo che A_1 sia tra A e A_2 , A_2 sia tra A_1 e A_3 , A_3 sia tra A_2 e A_4 etc, siano inoltre congruenti tra loro i segmenti $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ allora nella serie di punti $A_2, A_3, A_4, \dots$ c'è sempre un punto A_n tale che B giace tra A e A_n .



- V_2 Assioma di completezza. Nel sistema di punti, rette e piani è impossibile aggiungere altri enti in maniera che un sistema così generato formi una nuova geometria in cui gli assiomi dei cinque gruppi I-V siano tutti verificati; in altri termini gli elementi di una geometria formano un sistema di enti che, se si conservano gli assiomi, non è suscettibile di alcuna estensione.²⁹

Il secondo capitolo è dedicato alla dimostrazione di coerenza degli assiomi e alla loro indipendenza.³⁰

²⁹L'assioma di completezza non era presente nel *Festschrift*, è stato aggiunto per la prima volta nella traduzione francese al testo pubblicata l'anno seguente [48].

³⁰Hilbert prova l'indipendenza di ciascun gruppo di assiomi, non l'indipendenza di ogni singolo assioma. La prima formulazione completa di assiomi indipendenti per la geometria euclidea è dovuta a Veblen [86], si veda in proposito anche [87].

La dimostrazione di coerenza per gli assiomi dei gruppi I-IV³¹ è rimandata alla coerenza dell'aritmetica mediante l'interpretazione degli assiomi in un modello numerabile, così costruito:

Consideriamo il campo Ω di tutti i numeri algebrici che derivano dal numero 1 e dall'applicazione ad esso, per un numero finito di volte, delle quattro operazioni aritmetiche: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e una quinta operazione ottenuta da $\sqrt{1 + \omega^2}$, dove ω denota un numero ottenuto da una delle cinque operazioni suddette.

La coerenza degli assiomi dei gruppi I-V è invece dimostrata attraverso l'interpretazione su $\mathbb{R}$, nell'ordinaria geometria cartesiana.

Il terzo capitolo si apre con il già citato paragrafo §13, dove vengono elencate le leggi di composizione (1-6), le proprietà delle operazioni (7-12), le regole di ordinamento (13-16) e le proprietà di continuità (17-18). Al termine del paragrafo, Hilbert si pone l'obiettivo di «ricercare la dipendenza logica» tra queste proprietà e, coerentemente con lo sviluppo delle precedenti ricerche contenute negli appunti per le lezioni, segue la via geometrica.

Nei capitoli successivi introduce i numeri e le operazioni dell'aritmetica utilizzando due fondamentali teoremi della geometria proiettiva: il teorema di Pappo-Pascal ed il teorema di Desargues. Entrambi questi teoremi all'epoca avevano un alone di mistero, perché nonostante coinvolgessero solo elementi e concetti di geometria proiettiva: rette, punti e incidenza tra rette, non era nota una dimostrazione proiettiva nel piano, cioè una dimostrazione indipendente dalla nozione di congruenza e quindi da una definizione di metrica. Inoltre il teorema di Desargues, ancor più misteriosamente, aveva una dimostrazione proiettiva nello spazio. Secondo alcuni storici della matematica la più grande scoperta tecnica, e forse l'unica realmente nuova, contenuta nei *Grundlagen* è proprio la spiegazione di questo fatto ([70, p. 417], [59, pp. 372–3], [91] e [81, p. 432]).

Nel paragrafo §14 Hilbert dimostra il teorema di Pappo-Pascal assumendo validi gli assiomi planari ed i postulati di congruenza.

Nei *Grundlagen* il teorema di Pappo-Pascal riporta il solo nome di Pascal, perché nella sua versione affine più generale il teorema di Pappo è noto come teorema di Pascal (Figura 1):

Teorema di Pascal. *Dati 6 punti qualsiasi su una conica formanti un esagono, i lati opposti, o i prolungamenti di essi, si incontrano in 3 punti giacenti su una stessa retta oppure sono paralleli.*

³¹Con questa dicitura si intende tutti gli assiomi dei gruppi da I a IV.

Il teorema vale per qualsiasi permutazione dei vertici, in altre parole dati 6 punti qualsiasi $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ indipendentemente dall'ordine dei punti sulla conica, le rette P_1P_2 e P_4P_5 , P_2P_3 e P_5P_6 , P_3P_4 e P_1P_6 o si intersecano in punti che giacciono su una stessa retta oppure sono parallele.

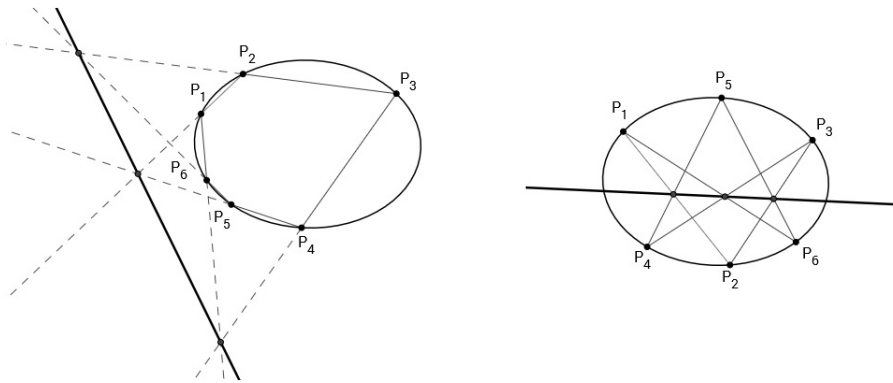


Figura 1: Teorema di Pascal

Il caso particolare del teorema di Pappo si ha quando la conica è degenera, formata dall'unione di due rette incidenti in un punto O , ed i punti giacciono alternativamente sulle due rette (Figura 2).

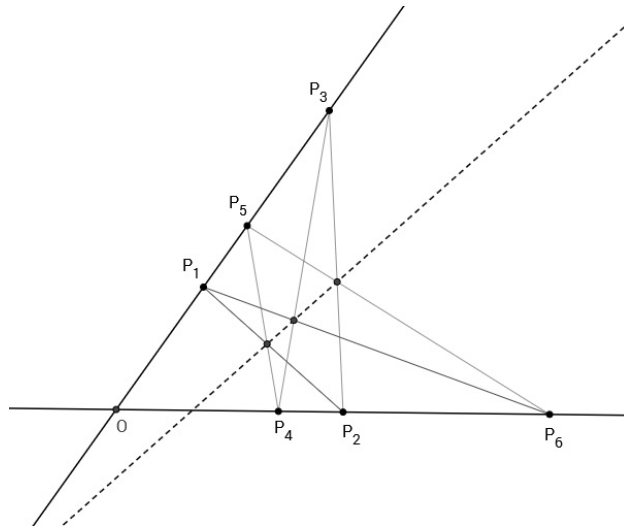


Figura 2: Teorema di Pappo

L'enunciato del teorema richiamato da Hilbert:

Siano A, B, C e A', B', C' due insiemi di punti su due rette incidenti, diversi dal punto di intersezione delle rette. Se CB' è parallelo a BC' e CA' è parallelo a AC' allora anche BA' è parallelo a AB' .

è riconducibile al teorema di Pappo qualora si permutino i punti P_4 e P_6 , si chiamino i punti P_4, P_2, P_6 e P_1, P_5, P_6 rispettivamente con A, B, C e A', B', C' e due coppie di rette siano parallele. Per il teorema, di conseguenza, anche le altre due rette saranno parallele (Figura 3).

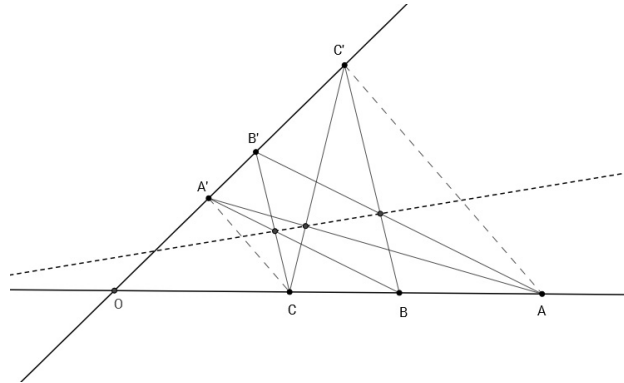


Figura 3: Teorema di Pappo-Pascal nella formulazione dei *Grundlagen*

Attraverso quest'ultima versione del teorema di Pappo-Pascal, Hilbert costruisce un'aritmetica dei segmenti (paragrafo §15) generando un sistema numerico che soddisfa le leggi di composizione (1-6), le proprietà delle operazioni (7-12) e le regole di ordinamento (13-16), ma non le proprietà di continuità (17-18).

Nel paragrafo §16, grazie a questo sistema di numeri, Hilbert, per la prima volta duemila anni dopo Euclide, affronta la teoria delle proporzioni in modo indipendente dall'assioma di Archimede, supposto tacitamente valido negli *Elementi* [33, p. 115]. Nel paragrafo successivo (§17) mostra, sempre in modo indipendente dall'assioma di Archimede, che «ogni retta può essere rappresentata per mezzo di un'equazione lineare nelle coordinate x e y e viceversa».

Il sistema di numeri determinato nel paragrafo §15 è identificato con l'insieme Ω , già utilizzato nel secondo capitolo per la dimostrazione di coerenza degli assiomi I-IV.

Ω ha le stesse proprietà di $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni dell'aritmetica, ovvero le 7-12. Anche $\mathbb{C}$ e Ω^2 godono delle proprietà 7-12, ma non rispettano le regole di ordinamento (13-16).

Come ha messo in evidenza Poincaré nella sua recensione ai *Grundlagen* [68], al contrario di $\mathbb{C}$, Ω^2 è ordinabile, cioè è possibile disporre i suoi elementi in un certo ordine, però questo ordine non è invariante rispetto alle trasformazioni geometriche.

Un metodo per introdurre con sole operazioni geometriche i numeri complessi $\mathbb{C}$, e di conseguenza anche Ω^2 , all'interno della geometria degli assiomi I-IV, è pro-

posto in [3].³²

L'interesse di Hilbert nei *Grundlagen*, tuttavia, non si concentra tanto su $\mathbb{C}$ o su Ω^2 , perché entrambi si comportano allo stesso modo di $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni aritmetiche. Al fine di determinare un sistema di coordinate interno alla geometria, ordinato, numerabile e con le stesse proprietà di $\mathbb{R}$, è sufficiente Ω .

Tutto il quarto capitolo, comprendente i paragrafi dal §18 al §21, è dedicato alla teoria dell'equivalenza che Hilbert sviluppa sempre tenendo presente gli *Elementi* di Euclide.

Diversamente dalla teoria delle proporzioni, l'autore greco non ricorre, nemmeno implicitamente, all'assioma di Archimede, ma utilizza il principio «Il totale è maggiore della parte» [22, p. 783] per dimostrare il teorema «Se due triangoli equiampliabili hanno le stesse basi allora hanno anche le stesse altezze.»³³ Il principio, che è elencato tra le nozioni comuni degli *Elementi* poste all'inizio del primo libro, dal punto di vista geometrico equivale ad un nuovo assioma. La trattazione di Hilbert, attraverso l'aritmetica dei segmenti basata sul teorema di Pappo-Pascal, rimuove il riferimento a quel principio, restando ovviamente indipendente dall'assioma di Archimede ([33, pp. 195–231] e [65, pp. 69–115]).

Nel quinto capitolo Hilbert dimostra il teorema di Desargues nel piano ed il suo inverso:

Se due triangoli si trovano in un piano ed i loro lati sono a due a due paralleli, allora le rette congiungenti i vertici corrispondenti si intersecano in uno stesso punto oppure sono parallele. Viceversa, se due triangoli giacciono in un piano e le rette congiungenti a due a due i vertici dell'uno e dell'altro triangolo si intersecano in un punto, oppure sono parallele, ed inoltre, se due coppie di lati corrispondenti sono paralleli, allora anche i terzi lati dei due triangoli sono tra essi paralleli

Anche questo enunciato è un caso particolare di un più generale teorema (Figura 4):

Teorema di Desargues. *Dati due triangoli ABC e $A'B'C'$, se le rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in un punto O , o sono parallele, allora le rette dei lati corrispondenti si incontrano in tre punti giacenti sulla stessa retta, oppure sono parallele, e viceversa.*

³²La costruzione contenuta in [3] prevede l'intersezione tra rette e circonferenze, operazione sempre possibile in Ω^2 , come mostrato da Hilbert stesso nel paragrafo §36.

³³Proposizione 39 del libro I [22, p. 833].

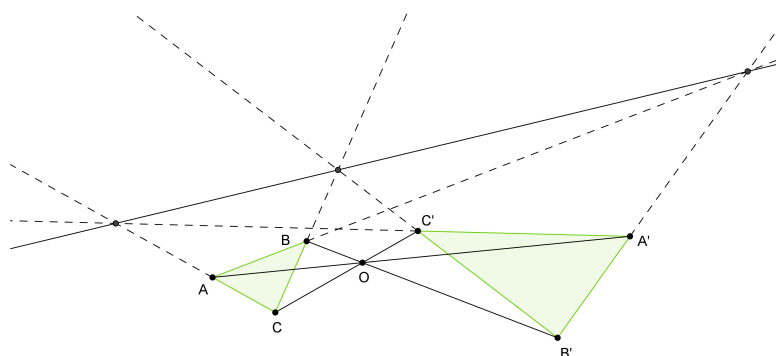


Figura 4: Teorema di Desargues

Nel testo di Hilbert la dimostrazione per mezzo degli assiomi spaziali è data per nota. In effetti il suo enunciato nello spazio è una conseguenza diretta della costruzione proiettiva, rispetto ad un punto O , di due triangoli su due piani paralleli (Figura 5).

Anche nel caso più generale il teorema nello spazio ha una configurazione evidente, perché equivale a proiettare, rispetto a un punto O , un triangolo su un piano ad esso non parallelo e nello spazio due piani non paralleli si intersecano lungo una retta (Figura 6).

Nei paragrafi §22 e §23, Hilbert dimostra il teorema di Desargues nel piano, assumendo gli assiomi planari e di congruenza, e l'impossibilità di una dimostrazione dello stesso teorema nel piano senza gli assiomi di congruenza.

Nel paragrafo §24, in modo speculare al paragrafo §15, introduce una nuova aritmetica dei segmenti basata sul teorema di Desargues, senza utilizzare gli assiomi di congruenza. L'assenza degli assiomi di congruenza è fondamentale per generalizzare il metodo di individuazione dei numeri in un contesto proiettivo.

Nel nuovo sistema numerico, oltre ad essere valide per costruzione le leggi di composizione (1-6), Hilbert verifica che valgono anche le proprietà associative e commutative dell'addizione (7-8) (paragrafo §25), le proprietà distributive della moltiplicazione sull'addizione (10-11) e la proprietà associativa per la moltiplicazione (9) (paragrafo §26). La proprietà commutativa della moltiplicazione (12), non è necessariamente valida, ma è comunque sempre possibile definire un sistema di coordinate e rappresentare in modo analitico i punti, le rette e i piani (paragrafo §27).

I quaternioni $\mathbb{H}$ e l'insieme Ω^4 , costruito da Ω mantenendo le stesse regole di $\mathbb{H}$ per la somma e il prodotto, sono un esempio di sistema numerico che gode delle proprietà 7-11 e non della 12. $\mathbb{H}$, come $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, ha la potenza del continuo, cioè soddisfa anche le proprietà di continuità (17-18), ma sono entrambi insiemi non

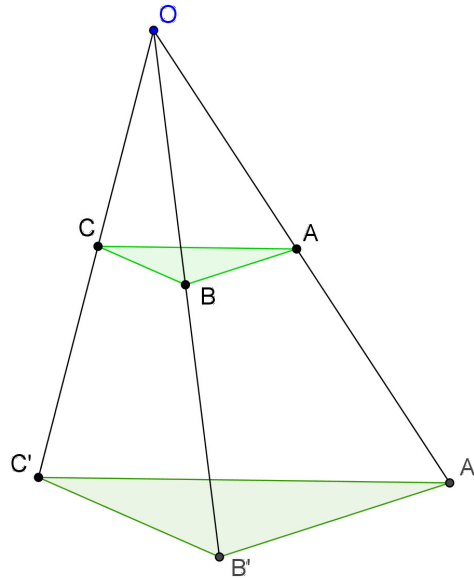


Figura 5: Teorema di Desargues nello spazio con piani paralleli

ordinati, cioè non soddisfano le 13-16. Come Ω^2 , anche Ω^4 è invece ordinabile, tuttavia l'ordine non è invariante rispetto alle trasformazioni geometriche.

Nel paragrafo §15, Hilbert aveva determinato all'interno della geometria degli assiomi I-IV un sistema di coordinate su un insieme ordinato e numerabile che si comportava come $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ rispetto alle operazioni dell'aritmetica. La domanda successiva è: all'interno della stessa geometria è determinabile anche un insieme ordinato e numerabile che abbia le stesse proprietà di $\mathbb{H}$, ovvero le 7-11 e non la 12?

Nel rispondere a questa domanda Hilbert risolve i misteri del teorema di Desargues e di Pappo-Pascal.

Nella nuova aritmetica dei segmenti stabilisce innanzitutto una convenzione d'ordine affinché siano rispettate anche le regole d'ordinamento (13-16), l'insieme numerico corrispondente è detto desarguesiano (paragrafo §28).

Nel paragrafo §29 costruisce una geometria dello spazio su un insieme desarguesiano di numeri e dimostra che il teorema di Desargues vale in ogni geometria a dimensione maggiore di due concludendo che la sua «validità nel piano è condizione necessaria e sufficiente affinché quella geometria planare possa considerarsi come una parte della geometria spaziale» (paragrafo §30).

Il mistero del teorema di Desargues è dunque spiegato. Una sua dimostrazione nello spazio esiste sempre perché il teorema, per qualsiasi dimensione maggiore

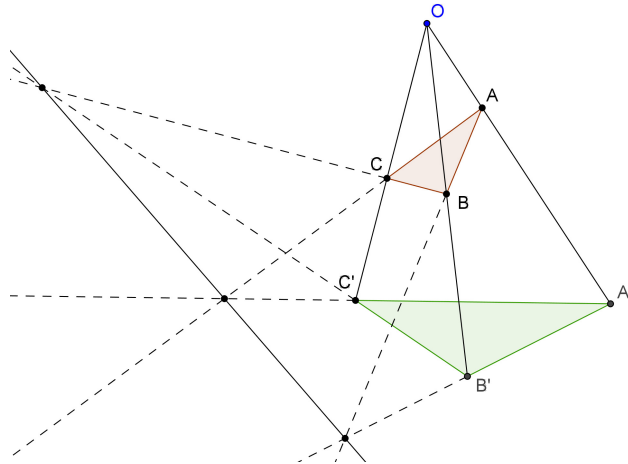


Figura 6: Teorema di Desargues nello spazio con piani non paralleli

di due, è sempre verificato. In due dimensioni, invece, una sua dimostrazione esiste nel piano euclideo, che contempla gli assiomi di congruenza,³⁴ ma in generale nel piano proiettivo non esiste, perché non tutti i piani proiettivi possono essere considerati come una sezione di uno spazio tridimensionale.³⁵

Il mistero del teorema di Pappo-Pascal è invece spiegato nel paragrafo §31. Una sua dimostrazione senza l'ausilio degli assiomi di congruenza, sia nel piano sia nello spazio, esiste soltanto se il sistema numerico delle coordinate è archimedeo. In altre parole il teorema vale nel piano e nello spazio euclidei, dove vigono gli assiomi di congruenza, ma non vale in generale in tutti i piani e gli spazi proiettivi,³⁶ pertanto non può avere una dimostrazione proiettiva.

Questa constatazione è contenuta nel paragrafo §34 che identifica la validità del teorema di Pappo con la proprietà commutativa della moltiplicazione del sistema numerico delle coordinate: se il sistema di coordinate della geometria scelta è commutativo allora vale il teorema di Pappo e viceversa.

Hilbert mostra innanzitutto che in un'algebra di divisione la proprietà commutativa della moltiplicazione è una conseguenza logica delle proprietà 7-11, delle

³⁴La dimostrazione nel piano con gli assiomi di congruenza è data nel paragrafo §22 dei *Grundlagen*.

³⁵Un esempio di piano che non può essere considerato una sezione di uno spazio tridimensionale è il piano proiettivo coordinatizzato dal sistema numerico degli ottonioni, perché non esiste uno spazio tridimensionale, né di dimensione maggiore, che abbia come coordinate l'insieme $\mathbb{O}$. Il motivo della sua non esistenza è stato sempre spiegato da Hilbert e verrà citato più avanti: il sistema degli ottonioni non è associativo mentre le coordinate di una geometria spaziale devono sempre essere associative rispetto alla moltiplicazione.

³⁶Ad esempio non vale nel piano e nello spazio proiettivi coordinati su $\mathbb{H}$, né nel piano coordinato su $\mathbb{O}$.

regole di ordinamento 13-16 e dell'assioma di Archimede 17 (paragrafo §32), ma se il sistema numerico non è archimedeo, allora la proprietà commutativa non è necessariamente valida (paragrafo §33).

Nel paragrafo §34 stabilisce infine che in una geometria desarguesiana ma non-pascaliana può essere determinato un sistema di coordinate non commutativo, ma questo sistema o non è ordinato, come i quaternioni, oppure non è archimedeo.

Quest'ultimo caso è analizzato in dettaglio da Hilbert nel paragrafo §33, dove costruisce un insieme ordinato, non-archimedeo e non-commutativo, raccogliendo il plauso di Poincaré [68]:

Hamilton introdusse anni fa un sistema complesso di numeri in cui la moltiplicazione è non commutativa; questi erano i quaternioni [...]. Ma nel caso dei quaternioni, gli assiomi di ordine non sono validi, l'originalità della concezione del Professor Hilbert consiste nel fatto che [i suoi] numeri soddisfano gli assiomi di ordine senza soddisfare la proprietà commutativa.

Nonostante il commento positivo del collega francese, l'indagine condotta da Hilbert fornisce una risposta negativa alla domanda iniziale: non esiste nessun insieme ordinato archimedeo, né numerabile né con la potenza del continuo, con le stesse proprietà di $\mathbb{H}$ rispetto alle operazioni dell'aritmetica.

La stretta correlazione tra geometria desarguesiana e proprietà associativa dimostrata da Hilbert³⁷ implica che per individuare un sistema numerico non associativo, come ad esempio quello degli ottonioni $\mathbb{O}$, o di Ω^8 per rimanere nel campo dei numerabili, bisogna ricorrere ad una geometria non-desarguesiana, dove non valgono né il teorema di Desargues né il teorema di Pappo-Pascal.³⁸

Un esempio di geometria non-desarguesiana è riportato nel paragrafo §23.³⁹

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy , si prenda l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$ e si scelga un punto F sull'asse x tale che, dati due punti qualsiasi dell'ellisse la circonferenza che passa per essi e per F interseca l'ellisse soltanto in quei due punti. Questa condizione si verifica se F si trova ad una distanza dal centro dell'ellisse maggiore di $\frac{\sqrt{7}}{2}$, pertanto sia $F(\frac{3}{2}, 0)$.⁴⁰

Nella nuova geometria i nuovi punti sono tutti i punti del piano xy . Le nuove rette

³⁷[8, pp. 192-3], per una dettagliata analisi meta-matematica della dimostrazione di Hilbert si veda [7].

³⁸Il teorema di Desargues implica il teorema di Pappo-Pascal. Questa implicazione, quindi l'impossibilità di una geometria dove sia valido il teorema di Pappo-Pascal ma non il teorema di Desargues, non era nota ad Hilbert al momento della prima edizione dei *Grundlagen*. La dimostrazione è dovuta a Hessenberg [35] ed aggiunta nel paragrafo §35 nella settima edizione.

³⁹Di seguito nel testo è riportato l'esempio originale di geometria non-desarguesiana contenuto nel *Festschrift*, sostituito da Hilbert nella settima edizione con un esempio più semplice ideato da Moulton [62].

⁴⁰Un'ellisse e una circonferenza hanno in generale quattro intersezioni reali. Sia $C(x_C, 0)$ l'intersezione di ascissa positiva tra circonferenza e asse x , se la circonferenza è tangente esternamente

sono tutte le rette esterne o tangenti all'ellisse, più tutte le rette che intersecano l'ellisse così costituite: sia r una retta che interseca l'ellisse nei punti P e Q , la nuova retta comprenderà tutti i punti appartenenti a r esterni all'ellisse e l'arco $\widehat{AB}$ della circonferenza passante per i punti P, Q e F (Figura 7).

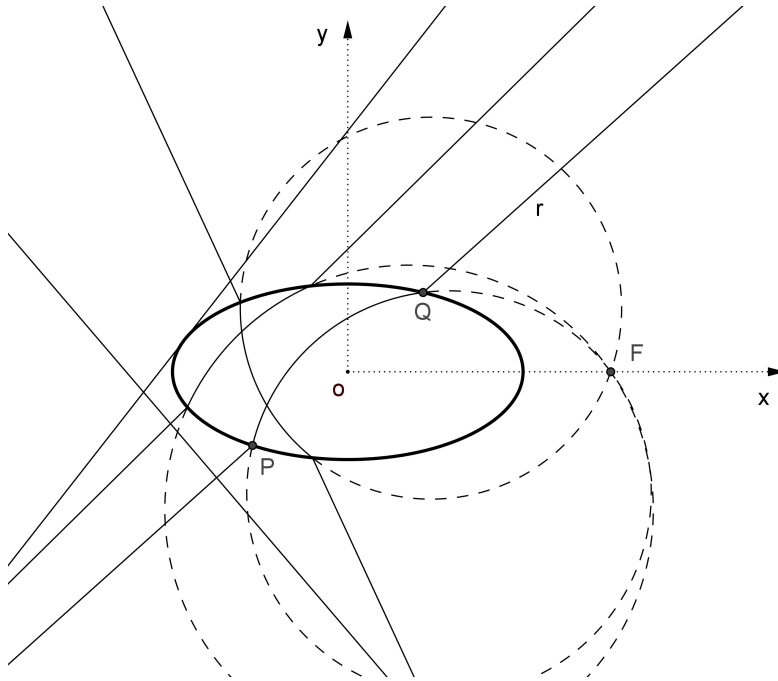
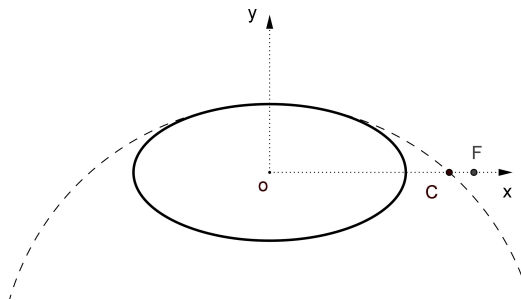


Figura 7: Esempio di geometria non-desarguesiana

È facile verificare che in tale geometria non vale il teorema di Desargues. In questa geometria non è però nemmeno possibile costruire una geometria dei segmenti

all'ellisse in modo che i quattro punti di contatto tra ellisse e circonferenza coincidano, C ha coordinate $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$. Se $x_F > \frac{\sqrt{7}}{2}$ tutte le circonferenze passanti per F intersecanti l'ellisse hanno due punti distinti in comune con esso.



coerente con le regole di calcolo 7-12 descritte in precedenza, perché oltre a non valere la 9 e la 12 non valgono nemmeno la 7 e la 8, rispettivamente la proprietà associativa e commutativa dell'addizione.

Grazie all'aritmetica dei segmenti si può dunque stabilire che in una geometria degli assiomi I-IV, cioè nell'ordinaria geometria euclidea dove valgono i teoremi di Pappo-Pascal e di Desargues, è possibile far emergere dall'interno un'estensione numerabile di $\mathbb{Q}$, chiamata da Hilbert Ω , con le stesse proprietà di $\mathbb{R}$ che può fungere da sistema di coordinate per il piano e lo spazio. In una geometria proiettiva senza assiomi di continuità, dove valga il teorema di Desargues ma non il teorema di Pappo-Pascal, non è possibile far emergere dall'interno un sistema ordinato, numerabile e archimedeo di coordinate, gli unici insiemi numerici introducibili dall'interno sono Ω^4 , con le stesse proprietà di $\mathbb{H}$ eccetto la continuità, oppure insiemi ordinati non-archimedei. In una geometria proiettiva senza assiomi di continuità, dove non valgano né il teorema di Desargues né quello di Pappo-Pascal è invece possibile introdurre un sistema di coordinate con le stesse proprietà di $\mathbb{O}$ rispetto all'aritmetica.

7 Ordinamento e continuità

Prima della pubblicazione di [31], l'importanza epistemologica attribuita da Hilbert all'introduzione del numero in geometria è stata generalmente sottovalutata nelle recensioni e negli studi sui *Grundlagen* ([79], [32], [4], [30], [23], [13], [83] e [84]). Tra le poche eccezioni figurano la recensione alla prima edizione francese di Poincaré [68], la recensione all'ottava edizione tedesca di Freudenthal [25] e l'attenta analisi storica di Rowe [73].

Secondo Poincaré, per comprendere il tentativo di Hilbert di allargare lo sguardo a geometrie diverse da quelle di Euclide, di Lobačevskiĭ e di Bolyai-Riemann, occorre tenere presente l'evoluzione del pensiero matematico degli ultimi cento anni, in particolare la generalizzazione del concetto di numero, con l'introduzione dei numeri complessi e ipercomplessi.

Poincaré nota che Hilbert, pur muovendosi con maestria tra le differenti geometrie al variare degli assiomi considerati, non propone mai una geometria che non ammetta gli assiomi d'ordinamento, nonostante due esempi fossero già noti all'epoca. La prima è la geometria sferica di Riemann, che però non ammette nemmeno l'assioma euclideo delle parallele, la seconda è la geometria «che prende per elementi i punti e le rette immaginarie dello spazio ordinario» [68, p. 258]. Poincaré continua precisando:

E' chiaro che i punti immaginari dello spazio non ci sono dati come disposti in un determinato ordine. Ma c'è di più: ci si può domandare se sia possibile ordinarli; questo sarebbe indubbiamente possibile, come Cantor ha

mostrato (con la condizione, ben inteso, che non si possono disporre uno vicino all'altro punti che consideriamo infinitamente vicini, distruggendo di conseguenza la continuità dello spazio). Si potrebbe benissimo, dico, disporli in ordine, ma non potrebbe essere fatto in modo tale che questo ordine non sia alterato dalle varie operazioni geometriche (proiezioni, traslazioni, rotazioni, ecc).

In questo passaggio Poincaré sta commentando la scelta di Hilbert di non considerare geometrie prive di assiomi d'ordine, al fine di dimostrare l'indipendenza degli altri assiomi da quelli. Nella recensione si pone comunque il problema se sia costruibile un insieme numerabile e ordinabile che abbia le stesse proprietà di $\mathbb{C}$.⁴¹

L'assenza nei *Grundlagen* di riferimenti a geometrie su campi non ordinati è notata anche da Freudenthal e ritenuta un grave limite, che ha influito negativamente sullo sviluppo degli studi sulle geometrie dei quaternioni e degli ottonioni negli anni a seguire.

Secondo Freudenthal la vera novità apportata da Hilbert non è stata «concepire i punti di una retta come elementi di un corpo e definire l'addizione e la moltiplicazione tramite figure di incidenza», perché questa idea era già stata avanzata da von Staudt cinquant'anni prima [89] ma quella di considerare figure di incidenza tra sole rette anziché tra rette e coniche. La conclusione critica del matematico olandese è che Hilbert non ha proseguito le ricerche sui fondamenti in quella direzione perché

gli assiomi d'ordine sbarravano la strada. Del resto Hilbert non si è mai effettivamente interessato a “nuove” geometrie. [...] Non vengono menzionate né le geometrie complesse né quella dei quaternioni.

Freudenthal molto probabilmente non era a conoscenza dei manoscritti delle lezioni dei corsi precedenti al 1899, mancanza che non gli permette una completa contestualizzazione del lavoro del tedesco. Ad esempio commenta con stupore la trattazione geometrica della teoria delle proporzioni nei *Grundlagen*, affermando che sia più vicina all'ideale degli antichi greci, anziché alla concezione dell'epoca: «oggi è l'Algebra il fondamento ultimo della Geometria».

⁴¹Poincaré pubblica due recensioni ai *Grundlagen*, la prima nel maggio del 1902 [67] e la seconda a settembre dello stesso anno [68]. Nella prima recensione si esprime in forma dubitativa sulla possibilità di trovare un insieme numerabile con le proprietà dei complessi “Forse si potrebbe disporli [in ordine]” (*On pourrait peut-être les ranger*) e non cita la dimostrazione di Cantor; nella seconda, evidentemente dopo una più approfondita riflessione, scrive: “Si potrebbe benissimo, dico, disporli [in ordine]” (*On pourrait bien, dis-je, les ranger*), rimandando verosimilmente al procedimento diagonale usato da Cantor per dimostrare l'ordinabilità e la numerabilità del prodotto cartesiano di due insiemi numerabili [59, 302–332].

Ordered numerical systems in Hilbert's Grundlagen der Geometrie

L'intento di Hilbert, invero, era proprio smontare quest'ultimo assunto per dare una fondazione autonoma alla geometria. Hilbert vuole mostrare che i numeri e l'aritmetica sono già presenti all'interno delle relazioni geometriche più elementari, come l'incidenza tra rette, che a sua volta trova il proprio fondamento negli assiomi.

Freudenthal coglie invece perfettamente un altro obiettivo dei *Grundlagen*, che riassume in una frase lapidaria:

I cosiddetti assiomi di continuità vengono introdotti da Hilbert per mostrare che in effetti di essi si può fare a meno.

Nel *Festschrift* l'idea di fondare una geometria indipendentemente dalla continuità è resa evidente fin dai primi capitoli. Nell'enunciazione degli assiomi è presente l'assioma di Archimede, ma non l'assioma di completezza (*Vollständigkeit*), che rappresenta il concetto intuitivo di continuità, nel secondo capitolo, per dimostrare la non-contraddittorietà degli assiomi, fa ricorso ad un modello numerabile, l'insieme Ω , e nel paragrafo §13 manca all'appello la proprietà di completezza (18). Nella prima edizione francese, in assoluto la seconda edizione dei *Grundlagen* dopo il *Festschrift*, Hilbert aggiunge in una nota l'assioma di completezza, ma si premura di specificare subito dopo che quell'assioma serve solo per

stabilire una corrispondenza uno a uno tra i punti di una retta e il sistema dei numeri reali. Comunque nel corso della presente ricerca, da nessuna parte è stato fatto uso dell' "assioma di completezza".

La proprietà di completezza (18) è invece aggiunta soltanto a partire dalla seconda edizione tedesca.

Nei primi 34 paragrafi del *Festschrift*, i numeri reali in quanto tali sono citati nel secondo capitolo, dove servono a dimostrare la coerenza del sistema di assiomi I-V, e nel paragrafo 17 per mostrare come, attraverso l'assioma di completezza, sia possibile assegnare un valore numerico reale ad ogni punto di una retta. Negli altri passi del testo il riferimento ai numeri reali riguarda unicamente le proprietà e le regole di calcolo di $\mathbb{R}$.

Freudenthal conferma che l'insieme numerabile Ω è sufficiente per costruire tutta la geometria generata dagli assiomi dei gruppi I-IV. L'approccio di Hilbert è però opposto: definite per via assiomatica la geometria proiettiva e euclidea, quali sono i sistemi numerici intrinseci, che è possibile far emergere dalle relazioni geometriche? È possibile far emergere dall'interno della geometria dei gruppi di assiomi I-IV, quindi esclusi gli assiomi di continuità, tutti i sistemi numerici atti a coordinare il piano e lo spazio?

La risposta di Hilbert era già stata chiaramente esplicitata da Poincaré nella sua recensione. Il matematico francese osservava, infatti, che all'interno della geometria

definita dagli assiomi I-IV, mantenendo fisse le leggi che permettono le operazioni aritmetiche (1-6) e le regole di ordinamento (13-16), si potevano trovare solo due tipologie di sistemi numerici: quelli che soddisfano tutte le proprietà delle operazioni (7-12) e quelli che soddisfano soltanto le 7-11, quindi senza la proprietà commutativa della moltiplicazione (12). Nella seconda tipologia però non vale l'assioma di Archimede.

Hilbert infatti dimostra che le proprietà 7-11 e le regole 13-16 insieme all'assioma di Archimede implicano la proprietà commutativa della moltiplicazione. Quindi non può esistere nessun insieme di numeri, né continuo né numerabile, che sia ordinato, archimedeo e non commutativo.

8 Conclusioni

I *Grundlagen* sono essenzialmente un lavoro di ricerca sulla geometria che vede nell'assiomatizzazione il metodo di indagine. I cardini della ricerca sono principalmente due: la rinuncia alla continuità, in particolare all'assioma di completezza e l'introduzione del numero all'interno della geometria. Se il primo obiettivo trova un terreno fecondo, il secondo incontra presto una battuta di arresto.

L'esigenza originaria di von Staudt di fondare una geometria indipendente dal concetto di metrica, che faccia emergere i numeri dai presupposti basilari di incidenza, si completa nei *Grundlagen* a seguito della fondamentale scoperta di Hurwitz sulle algebre di divisione normate. L'esigenza diventa far emergere tutti i sistemi numerici che formano un'algebra di divisione normata e che quindi rispettano le leggi di composizione (1-6) ma godono solo in parte delle proprietà delle operazioni dell'aritmetica (7-12), come i quaternioni e gli ottonioni.

Hilbert coniuga questa esigenza con l'obiettivo di descrivere la geometria euclidea e proiettiva con «strumenti limitati»[47, p. 89], cioè senza assiomi di continuità e quindi soltanto attraverso gli assiomi dei gruppi I-IV.

Il risultato atteso è l'individuazione, all'interno di questa geometria, di insiemi numerici, ordinati e numerabili, che abbiano le stesse proprietà rispetto all'aritmetica delle quattro algebre di composizione $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$.

$\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, godono di tutte le proprietà 7-12, $\mathbb{H}$ non gode della proprietà commutativa (12) e $\mathbb{O}$ non gode né della proprietà commutativa (12) né di quella associativa (10).

L'esito è negativo perché Hilbert scopre che gli unici insiemi ordinati, numerabili e non-commutativi sono anche non-archimedei, non è possibile quindi all'interno di una geometria dei gruppi I-IV determinare tutti i numeri atti a rappresentare un sistema di coordinate per quella geometria in modo indipendente dall'assioma di Archimede.

Ordered numerical systems in Hilbert's Grundlagen der Geometrie

Anche il risultato negativo è però apprezzato da Hilbert che conclude con queste parole i *Grundlagen*

La presente trattazione rappresenta un'indagine critica dei principi della geometria. In questa indagine la regola basilare è stata la discussione di ogni questione emergente al fine di verificare allo stesso tempo se una risposta fosse possibile in un determinato modo e con strumenti limitati. [...] L'impossibilità di certe soluzioni e di certi problemi gioca un ruolo importante nella matematica moderna, ed il desiderio di rispondere a questioni di questo tipo è stato spesso motivo per la scoperta di nuovi e fecondi campi di ricerca.

I fecondi campi di ricerca aperti comprendono le geometrie non ordinate dei quaternioni e degli ottonioni, che Freudenthal imputava ad Hilbert di avere colpevolmente tralasciato. Nel corso della sua ricerca Hilbert porta a termine altre notevoli scoperte, come le condizioni di incidenza affinché una geometria sia coordinatizzabile da sistemi numerici diversi da $\mathbb{R}$ e l'inesistenza di uno spazio tridimensionale coordinatizzabile da $\mathbb{O}$.

Non meno importante la spiegazione del mistero dei teoremi di Desargues e Pappo, entrambi impossibili da dimostrare nella geometria proiettiva del piano, con la duplice particolarità del teorema di Desargues che invece è dimostrabile nella geometria proiettiva dello spazio.

Riferimenti bibliografici

- [1] D. Albers e G.L. Alexanderson. *Mathematical People: Profiles and Interviews*. CRC Press, 2008.
- [2] G. Anatriello. On a geometric foundation of mathematics (Su una fondazione geometrica della matematica). *Science & Philosophy*, 5(1):91–108, 2017.
- [3] G. Anatriello, F. S. Tortoriello, e G. Vincenzi. On an assumption of geometric foundation of numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(3):395–407, 2016.
- [4] Anon. The foundations of geometry by D. Hilbert. *The Mathematical Gazette*, 2(83):268–269, 1903.
- [5] Anon. *Regeln für die deutsche Rechtschreibung nebst Wörterverzeichnis. Neue Bearbeitung*. Weidmann Buchhandlung, Berlin, 1908.
- [6] J. Baez. The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(2):145–205, 2002.
- [7] J. T. Baldwin. *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice*. Cambridge University Press, 2018.
- [8] L. M. Blumenthal. *A Modern View of Geometry*. Dover Publications, 2017.
- [9] O. Blumenthal. Lebensgeschichte. In *D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen III*, Springer Verlag, 1935, pp. 388–429. Springer, 1935.
- [10] J. Boniface. Leopold kronecker’s conception of the foundations of mathematics. *Philosophia Scientiæ. Travaux d’histoire et de philosophie des sciences*, CS 5:143–156, 2005.
- [11] U. Bottazzini. *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica*. UTET, 2005.
- [12] K. Conrad. Pfister’s Theorem on Sums of Squares Identity. 2009. Disponibile al sito www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/linmultalg/pfister.pdf.
- [13] A. Conte. Sui “Fondamenti della Geometria” di David Hilbert. *Notiziario dell’Unione Matematica Italiana*, supplemento al n. 7, 1979.
- [14] J. H. Conway e D. A. Smith. *On Quaternions and Octonions*. CRC Press, 2003.

- [15] L. Corry. David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905). *Archive for History of Exact Sciences*, 51(2):83–198, 1997.
- [16] L. Corry. Axiomatics, empiricism, and anschauung in hilbert's conception of geometry: between arithmetic and general relativity. *The architecture of modern mathematics: Essays in history and philosophy*, pp. 133–156, 2006.
- [17] H. S. M. Coxeter. *The Real Projective Plane*. Springer New York, 1993.
- [18] M. L. Curtis e P. Place. *Abstract Linear Algebra*. Springer-Verlag, 1984.
- [19] H. D. Ebbinghaus et al. *Numbers*. Springer New York, 1991.
- [20] H. M. Edwards. Kronecker on the foundations of mathematics. In *From Dedekind to Gödel*. A cura di J. Hintikka, pp. 45–52. Springer, 1995.
- [21] H. M. Edwards. *Essays in Constructive Mathematics*. Springer New York, 2005.
- [22] Euclide. *Tutte le opere*. Bompiani, 2007.
- [23] H. G. Forder. Grundlagen der Geometry by D. Hilbert (7th ed.). *The Mathematical Gazette*, 15(213):397–400, 1931.
- [24] G. Frege. *Scritti postumi*. Bibliopolis, 1986.
- [25] H. Freudenthal. Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, zugleich eine Besprechung der 8. aufl. von Hilberts "Grundlagen der Geometrie". *Nieuw Arch. Wisk.*, (4):105–142, 1957. Trad. it. disponibile al sito [http://math.unipa.it/brig/sds/MATERIALI/MATEMATICA/sitofondamenti/Freudenthal nuovocarattereago2005.htm](http://math.unipa.it/brig/sds/MATERIALI/MATEMATICA/sitofondamenti/Freudenthal%20nuovocarattereago2005.htm).
- [26] H. Freudenthal. The main trends in the foundations of geometry in the 19th century. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 44:613–621, 1966.
- [27] S. Gandon. Pasch entre Klein et Peano. *Dialogue*, 44(4):653–692, 2005.
- [28] E. N. Giovannini. Bridging the gap between analytic and synthetic geometry: Hilbert's axiomatic approach. *Synthese*, 193(1):31–70, 2016.
- [29] Paul Gordan. Beweis, dass jede covariante und invariante einer binären form eine ganze function mit numerischen coefficienten einer endlichen anzahl solcher formen ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 69:323–354, 1868.

- [30] T. H. Gronwall. David Hilbert, Grundlagen der Geometrie (4th ed.). *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20(6):325–325, 1914.
- [31] M. Hallett e U. Majer. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [32] G. B. Halsted. The Foundations of Geometry by D. Hilbert. *Science*, 16(399):307–308, 1902.
- [33] R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer, 2000.
- [34] Charles Hermite. Sur la fonction exponentielle. *Compte Rendus*, 77:18–24, 1873.
- [35] Gerhard Hessenberg. Beweis des desarguesschen satzes aus dem pascalschen. *Mathematische Annalen*, 61(2):161–172, 1905.
- [36] D. Hilbert. *Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen*. Tesi di Dottorato di Ricerca, Universität Königsberg, 1885.
- [37] D. Hilbert. Über die Theorie der algebraischen Formen. *Mathematische annalen*, 36(4):473–534, 1890.
- [38] D. Hilbert. Projektive geometrie. Lectures notes for a course held during the year 1891. In *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*. A cura di M. Hallet e U. Majer, pp. 21–55. 1891.
- [39] D. Hilbert. Über die Transzendenz der Zahlen e und π . *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pp. 113–116, 1893.
- [40] D. Hilbert. Über die vollen Invariantensysteme. *Mathematische Annalen*, 42(3):313–373, 1893.
- [41] D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Lectures notes for a course held during the year 1894 In *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*. A cura di M. Hallet e U. Majer, pp. 72–127. 1893.
- [42] D. Hilbert. Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale. *Mathematische Annalen*, 44:1–8, 1894.
- [43] D. Hilbert. *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, 1897.
- [44] D. Hilbert. *The Theory of Algebraic Number Fields*. Springer Berlin Heidelberg, [1897]-1998.

- [45] D. Hilbert. Grundlagen der Euklidischen Geometrie. Lectures notes for a course held during the year 1898. In *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*. A cura di M. Hallet e U. Majer, pp. 221–286. 1898.
- [46] D. Hilbert. Elemente der euklidischen geometrie. Lecture notes for a course held during the wintersemester 1898/99. In *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*. A cura di M. Hallett e U. Majer. 1899.
- [47] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen. Herausgegeben von dem Fest-Comitee. I. Theil*. Teubner, 1899.
- [48] D. Hilbert. *Les principes fondamentaux de la géométrie*. Gauthier-Villars Paris, 1900.
- [49] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie. Zweite Auflage*. Teubner, 1903.
- [50] D. Hilbert. Adolf hurwitz. *Göttinger Nachrichten. Geschäftliche Mitteilungen*, pp. 75–83, 1920.
- [51] D. Hilbert e S. Cohn-Vossen. *Geometria intuitiva*. P. Boringhieri, [1932]-1960.
- [52] D. Hilbert e F. Klein. *Der Briefwechsel David Hilbert-Felix Klein: 1886-1918*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1985.
- [53] A. Hurwitz. Über die Zahlentheorie der Quaternionen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 313–340, 1896.
- [54] A. Hurwitz. Über die Komposition der Quadratischen Formen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 309–316, 1898.
- [55] I. Kleiner. From Numbers to Rings: The Early History of Ring Theory. *Elemente der Mathematik*, 53(1):18–35, 1998.
- [56] M. Koecher e R. Remmert. Real division algebra. In *Numbers*. A cura di H. D. Ebbinghaus et al. Springer Verlag, 1991.
- [57] F. Lindemann. Über die Zahl π . *Mathematische Annalen*, 20:213–225, 1882.
- [58] P. Mancosu. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford University Press, 1998.

- [59] C. Mangione e S. Bozzi. *Storia della logica*. CUEM, 2004.
- [60] C. McLarty. Hilbert on theology and its discontents. In *Circles Disturbed: the Interplay of Mathematics and Narrative*, pp. 105–129. Princeton University Press, 2012.
- [61] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. Teubner, [1896]-1910.
- [62] F. R. Moulton. A simple non-desarguesian plane geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 3(2):192–195, 1902.
- [63] P. Nabonnand. La théorie des Würfe de von Staudt. Une irruption de l’algèbre dans la géométrie pure. *Archive for History of Exact Sciences*, 62(3):201–242, 2008.
- [64] M. Noether. Paul Gordan. *Mathematische Annalen*, 75(1):1–41, 1914.
- [65] P. Odifreddi. *Divertimento geometrico: le origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert*. Bollati Boringhieri, 2003.
- [66] M. Pasch. *Vorlesungen Über Neuere Geometrie*. Teubner, 1882.
- [67] H. Poincaré. Les fondements de la géométrie. *Journal de savants*, pp. 252–271, maggio 1902.
- [68] H. Poincaré. Les fondements de la géométrie. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, pp. 249–272, settembre 1902.
- [69] C. Reid. *Hilbert*. Springer New York, 1996.
- [70] B. Rosenfeld. *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*. Springer New York, 1988.
- [71] B. Rosenfeld e B. Wiebe. *Geometry of Lie Groups*. Springer US, 1997.
- [72] D. E. Rowe. The philosophical views of Klein and Hilbert. In *The intersection of history and mathematics*. A cura di S. Chikara et al., pp. 187–202. Springer, 1994.
- [73] D. E. Rowe. The calm before the storm: Hilbert’s early views on foundations. In *Proof theory*. A cura di V. F. Hendricks, pp. 55–93. Springer, 2000.
- [74] D. E. Rowe. Hilbert’s early career: Encounters with allies and rivals. *The Mathematical Intelligencer*, 27(1):72–82, 2005.

- [75] C. Segre. CGCV Staudt ed i suoi lavori In *von Staudt, Geometria di posizione*. A cura di M. Pieri. Bocca Editori, 1888.
- [76] C. Segre. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. *Mathematische Annalen*, 40(3):413–467, 1892.
- [77] F. Siacci. Degli invarianti e covarianti delle forme binarie ed in particolare di quelle di 3° e 4° grado. *Annali di matematica pura ed applicata*, tomo VII:73–140, 1865.
- [78] I. Smadja. Local axioms in disguise: Hilbert on Minkowski diagrams. *Synthese*, 186(1):315–370, 2012.
- [79] J. Sommer. Hilbert's foundations of geometry. *Bulletin of the AMS*, 6(7):287–299, 1900.
- [80] J. Stillwell. *The Four Pillars of Geometry*. Springer New York, 2005.
- [81] J. Stillwell. *Mathematics and Its History*. Springer New York, 2010.
- [82] J. Stillwell. Ideal elements in Hilbert's Geometry. *Perspectives on Science*, 22(1):35–55, 2014.
- [83] M. Toepell. On the origins of David Hilbert's "Grundlagen der Geometrie". *Archive for History of Exact Sciences*, 35(4):329–344, 1986.
- [84] M. Toepell. The origins and the further development of Hilbert's "Grundlagen der Geometrie". *Le Matematiche*, 55(3):207–226, 2000.
- [85] R. Torretti. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Springer Netherlands, 1978.
- [86] O. Veblen. A system of axioms for geometry. *Transactions of the AMS*, 5(3):343–384, 1904.
- [87] G. Venturi. A note on the introduction of Hilbert's Grundlagen der Geometrie. *Manuscrito*, 40(2):5–17, 2017.
- [88] G. von Staudt. *Geometrie der Lage*. Verlag, 1847.
- [89] G. von Staudt. *Beitrag zur Geometrie der Lage*, volume I(1856), II(1857), III(1860). Verlag, 1856-1860.
- [90] B. L. Waerden. *A history of algebra: from al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Springer-Verlag, 1985.

- [91] C. Weibel. Survey of non-desarguesian planes. *Notices of the AMS*, 54(10):1294–1303, 2007.
- [92] H. Weyl. David Hilbert and his mathematical work. *Bullettin of the AMS*, 50(9):612–654, 1944.

The Pedagogist's Professional Practice and the Clinical Method (L'Esercizio Professionale del Pedagogista e il Metodo Clinico)

¹Franco Blezza

Received: 30-11-2018. Accepted: 25-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.431

© Franco Blezza



Abstract

The "clinical" method is one of the possible methodological choices for Pedagogy as a profession and as a research, for Social Sciences and for other sciences, as well as for the professions that refer to these sciences. It can also be called "casuistic and situational method", and it is an exclusive alternative to the statistical operational method, with a full community of scientific rigor and technical applicativeness. It consists in the consideration of the individual case and of the single person with all its specific symptomatic and phenomenal characteristics, through the mediation of the professional to a general case within the limited number of general cases whose corpus makes science, profession and scientific and professional community, and in obtaining the indications for the help and the service to whom the professional has addressed.

A particular reflection is dedicated to the specific technique for the transition from the particular to the general through the mediation provided by the professional, that is through human mediation, according to a non-tautological technique known from ancient Greece with the name of "abduction" or "retroduction" "Ἐπιχείρημα" or "Reductio ad absurdum" by Zeno from Elea (489-430), or 'ἀπαγωγή known to Aristoteles (384-322). The theme offers a precious opportunity for

¹ Università G. D'Annunzio di Chieti-Pescara, Italia; fblezza@unich.it.

various reflections on the profession of pedagogist and on his practice: a profession that has recently had its legal recognition in Italy too.

Keywords: Pedagogy, Professional Pedagogist, Social Sciences, Methodology, Aid's Relationship

Sunto

Il metodo “clinico” è una delle possibili scelte metodologiche per la Pedagogia come professione e come ricerca, per le Scienze Sociali e per altre scienze, nonché per le professioni che a queste scienze fanno riferimento.

Può essere chiamato anche “metodo casistico e situazionale”, ed è alternativa esclusiva al metodo statistico operativo, nella comunanza piena di rigore scientifico e di applicatività tecnica.

Esso consiste nella considerazione del singolo caso e della singola persona con tutte le sue specifiche caratteristiche sintomatiche e fenomeniche, nel riconducimento attraverso la mediazione del professionista ad un caso generale entro il numero ristretto di casi generali il cui corpus fa scienza, professione e comunità scientifica e professionale, e nel ricavarne le indicazioni per l'aiuto e il servizio a chi al professionista si è rivolto.

Una particolare riflessione viene dedicata alla tecnica specifica per il passaggio dal particolare al generale attraverso la mediazione provveduta del professionista, cioè attraverso la mediazione umana, secondo una tecnica non tautologica nota dai tempi dell'antica Grecia con il nome di “abduzione” o “retroduzione”, ἐπιχείρημα o “Reductio ad absurdum” di Zenone da Elea (489-430), od ancora ἀπαγωγή noto ad Aristoteles (384-322).

Il tema offre un'occasione preziosa per svariate riflessioni sulla professione di Pedagogista e sul suo esercizio: una professione che ha avuto recentemente il suo riconoscimento legale anche in Italia.

1. Presentazione

In un articolo precedente abbiamo trattato della “*interlocuzione pedagogica*”, come forma di esercizio professionale specifico e come sede nella quale implementarne gli strumenti concettuali ed operativi ². Tutta la materia ha acquistato una rilevanza particolare con l'approvazione al termine della scorsa legislatura della legge n. 205 del 27/12/17 “*Bilancio di previsione dello Stato per l'anno finanziario 2018 e bilancio pluriennale per il triennio 2018-2020*”.

² *Pedagogical Interlocution (L'Interlocuzione Pedagogica)*. “Science & Philosophy”, Vol. 5, fascicolo 1, gennaio-giugno 2017, pp. 39—56.

Essa sarebbe stata pubblicata sulla Gazzetta Ufficiale del 29 dicembre 2017, con entrata in vigore l'1/1/2018. I commi 594-601 dell'articolo 1, in effetti, hanno tradotto in legge in via definitiva l'essenziale del DdL 2443 a prima firma Vanna Iori "*Disciplina delle professioni di educatore professionale socio-pedagogico, educatore professionale socio-sanitario e pedagogista*" che era stato approvato dalla Camera.

Nel saggio presente, offriremo un tassello importante per questa professione e il relativo esercizio, delineando l'essenziale della metodologia maggiormente indicata e rilevante per la relazione d'aiuto professionale del pedagogista, come anche degli educatori professionali, cioè appunto il metodo "clinico". Peraltro, essa è indicata con una rilevanza non inferiore, più in generale, per le professioni sociali e sanitarie, della scuola e intellettuali, della cultura, per i relativi esercizi e per la relativa ricerca.

La pedagogia si conferma, anche nel senso metodologico, una scienza sociale a pieno titolo, la cui professione apicale è dello stesso livello di quelle delle altre professioni intellettuali.

2. Non si Tratta di Terapia, ma di un Prendersi Cura

La nostra esperienza ci suggerisce di premettere l'avvertenza secondo la quale quando si parla di "clinico" e derivati *non* si intende nel modo più assoluto far riferimento diretto alla dimensione medica o a procedure terapeutiche. A rigore non ci si riferisce nemmeno necessariamente o primariamente alla dimensione della salute, se non con riguardo alla definizione molto ampia che è stata offerta dalla World Health Organization, secondo la quale "*Health is a state of complete physical, mental and social well-being and not merely the absence of disease or infirmity*". Il pedagogista, per ragioni essenziali alla sua cultura, non è un terapeuta e non si occupa, quindi, di combattere *diseases or infirmities*; vale lo stesso per altre professioni sociali. Egli ha il suo compito essenziale proprio nel conseguimento di un profondo ed integrale stato di *well-being*, del quale sono fattori essenziali l'educazione, la socialità, la relazionalità, le scelte di valore, la ricerca del *Lebenssinn*.

In ogni caso, il pedagogista non attribuisce a sé stesso i compiti riconducibili al verbo "*to cure*", quanto piuttosto considera il proprio compito espresso dal verbo "*to care of*". In lingua italiana i due verbi hanno la stessa traduzione, il che dà spesso luogo a fraintendimenti e ambiguità:

dovremmo precisare che *il pedagogo* “*si prende cura di qualcuno*” e non “*cura*” alcuno né alcunché.

Si può riprendere lo “*I care!*” di Martin Luther King (1929-1968), con maggiore coerenza e pertinenza di quanto non si sia fatto in sedi e contesti non professionali.

3. La Clinica e il Metodo Clinico

Quando si parla di “metodo clinico”, ha la dovuta rilevanza il discorso etimologico. In greco classico, la lingua di Ippocrate di Kos (470-377 circa), impiegata poi da alessandrino anche da Claudio Galeno di Pergamo (129-199 circa), κλινικός era aggettivo riferito all'intervento del medico sul lettuccio o κλίνη dove si trovava il paziente.

L'intervento clinico è, quindi, un intervento propriamente “*in situazione*”. Non risultano sostantivazioni: la “clinica” di oggi può corrispondere a ἡ κλινική τέχνη, cioè all’“*arte clinica*”, grosso modo.

Converge a questa etimologia una derivazione alternativa dal verbo κλίνω, inchinarsi, avvicinarsi, inclinarsi, e cioè ancora una volta un calarsi da parte del professionista nella situazione problematica di colui che ne ha richiesto l'opera.

L'aggettivo “clinico” con i suoi derivati indica, in pedagogia come nelle scienze sociali, una ben precisa scelta di metodo.

Una tale scelta è alternativa esclusiva rispetto alla metodologia statistica operativa. Sono due scelte di metodo entrambe scientifiche e rigorosissime, va detto con la massima chiarezza, ma polarizzate in modo complementare.

Potremmo chiamare il metodo clinico anche “*metodo casistico*”, oppure “*metodo situazionale*”, cioè che ha riguardo primario per la logica di ciascuna situazione. L'alternativa statistico-operativa è ricerca di standard, medie, frequenze, ricorrenze, varianze, deviazioni, devianze, correlazioni, e quant'altro, all'interno di dati ripetibili raccolti tra i componenti di una popolazione, o “individui” o “elementi”, con un ampio ricorso a strumenti matematici, statistici, simbolici e di rappresentazioni grafiche. L'aggettivo “clinico” compendia efficacemente la nostra scelta, anche in quanto ha una valenza enormemente più ampia nel contesto della Pedagogia e delle relative professioni come più in generale nel contesto delle scienze e delle professioni sociali.

D'altra parte, va tenuta nel giusto conto l'esistenza e la frequenza crescente nell'inglese americano del sostantivo “*clinic*”. Si tratta di un'operatività educativa, di formazione e di addestramento nonché di perfezionamento, molto ben individuata e riconoscibile, originatasi nello sport e nella musica, in particolare nella musica Jazz, ma in via di canonica estensione.

A differenza del “seminario” che può durare giorni e settimane, il “clinic” di solito è un incontro di poche ore, di una giornata od anche di pochi giorni, da tenersi in un contesto e in un setting piuttosto contenuto, intimo, familiare e fin domestico. Esso si svolge tra un personaggio di rilievo del settore, un campione dello sport ovvero un prestigioso musicista negli esempi portati, con gruppi non strutturati di allievi e una conduzione non formale, basata essenzialmente sulla testimonianza e sull'esempio del personaggio, che si cala nel contesto degli allievi con i quali, sempre rimanendo agli esempi portati, pratica lo sport in alcune azioni di particolare interesse ovvero suona su tema o improvvisa, senza alcuna preclusione per le ipotesi di strumenti musicali anche molto diversi. In questi casi e in ogni altro, l'educazione e l'apprendimento si sviluppano proprio nel contesto della particolare situazione creata.

Nello sport è un giocare insieme, ma senza necessità della dimensione agonistica; nella musica può anche dar luogo a musiche d'assieme con improvvisazioni e *choruses*, senza una partitura definita, ma con il suggerimento del tema musicale da parte del maestro.

In ogni caso, siamo sempre nell'idea di un intervento educativo e didattico il più possibile calato dall'esperto nella situazione degli allievi educandi e in formazione.

4. Le Implicazioni della Clinica come Scelta di Metodo

Metodo “casistico clinico” significa prima di tutto centralità di ogni singolo caso, tenendo in conto primario la sua specificità, la sua irripetibilità, anche la sua inviolabilità che è l'inviolabilità della persona umana coinvolta. “*Persona*” è termine latino, ed è termine tecnico della Pedagogia e delle Scienze Sociali, ad indicare il soggetto umano come portatore di un proprio sistema di valori, di un proprio senso della vita, soggetto di socialità e di relazionalità, nodo di una rete di comunicazione con altre persone, in senso molto lato soggetto politico.

Tale considerazione tiene nel giusto conto le caratteristiche individuali che non sono sopprimibili né trascurabili, e che si considerano nella loro non ripetibilità. Il che è esattamente reciproco a ciò che si è chiamati a fare quando si lavora anche in Pedagogia, anche in Scienze Sociali, anche nelle relative professioni, seguendo una qualsiasi scelta di metodo che abbia a che fare comunque con la dimensione statistico-operazionale.

In buona sostanza, il procedere nell'esercizio professionale e nella ricerca con metodo clinico si può riassumere nelle fasi seguenti:

1) si rilevano e si studiano accuratamente la sintomatologia, la fenomenologia, il racconto di vita e le altre anamnesi, la situazione problematica e quant'altro caratterizza inizialmente ogni singolo caso;

2) il professionista fa appello alla sua scienza, alla sua competenza professionale, alla sua esperienza;

3) il professionista riconduce questo caso particolare ad un caso generale o ad una casistica; ad esempio, per quel che riguarda l'opera del medico chirurgo clinico, egli riconduce il singolo malato alla diagnosi di ben precise malattie, e questo è l'esempio più immediato; ma anche nell'esercizio professionale del pedagogo vi è il necessario riconducimento ai casi generali o "casistiche"; e questo avviene anche per altri professionisti come l'architetto, il fisico, l'avvocato e via elencando;

4) da questo ricongiungimento al caso generale il professionista può ricavare le prescrizioni e le indicazioni del caso: nell'esempio del medico chirurgo clinico la prognosi, la terapia; nel caso del pedagogo, le forme di aiuto perché l'interlocutore possa porsi il problema e ideare le sue possibili soluzioni; nel caso dell'architetto il progetto e la direzione dei lavori; e così via.

5. L'abduzione e il Ruolo di Mediazione del Professionista

Proprio con specifico riguardo per la scelta del metodo in senso clinico, un problema fondamentale è costituito dal *come si possa operare il passaggio dai casi particolari, ciascuno a sé stante e trattato e valorizzato per tale, con le proprie peculiarità che non sono sopprimibili, ai casi generali*. Al riguardo, va tenuto presente che senza casi generali non si danno scienze (né Scienze Sociali né Scienze Pedagogiche ma neppure Scienze della Natura o scienze propriamente dette d'altro genere), né le professioni intellettuali superiori corrispondenti.

D'altra parte, senza casi generali non si danno neppure tecnica né professioni tecniche o tecnologiche, che sarebbe tutto un altro discorso.

Insomma, così osservando, evidentemente non ci si riferisce solo alla Pedagogia e alle relative professioni, e neppure al pur ampio complesso delle professioni sociali superiori: ci si riferisce al complesso delle professioni intellettuali. Qualunque tipo di professione ha la necessità imprescindibile dei propri casi generali, che fanno scienza, che fanno cultura, che fanno comunità scientifica con il lessico che ne discende, con le problematiche che hanno un significato comune e condiviso da parte dei componenti di quella comunità scientifica. Non si avrebbe avvocato o giurista senza le leggi generali, pur essendo scontato che egli tratta singoli casi umani e sociali; non si avrebbe

medico chirurgo senza le malattie e le teorie fisiologiche e patologiche generali, pur essendo scontato che egli cura malati e non malattie; non si avrebbe ingegnere edile od architetto senza la Scienza delle Costruzioni, pur essendo scontato che egli progetta singoli edifici e non astrazioni; non si avrebbe farmacista senza una farmacopea generale, pur essendo evidente che egli commercializza e, se del caso, prepara singoli farmaci per singoli assuntori; e via esemplificando.

Tutto ciò rimarca fortemente l'importanza irrinunciabile del professionista nel collegare e nel ricondurre i casi particolari ai casi generali, nel compiere una mediazione essenziale.

Esiste un procedimento di generalizzazione o di induzione empirica che permetta questo passaggio dal particolare al generale, dal caso particolare al caso generale? No, non esiste, non esiste nessun tipo di induzione empirica, come Popper (1902-1994) ha insegnato, lasciandoci tra le più importanti eredità metodologiche del XX secolo.

Questa transizione viene invece operata attraverso la mediazione del professionista, da lui compiuta con la sua cultura, con la sua professionalità e con la sua esperienza, tenendo conto della sua casistica clinica e del tipo di maturazione professionale che ha potuto compiere proprio affrontando casi particolari e riconducendo ciascuno di essi ad un numero ristretto di casi generali che appartengono alla sua cultura e al suo sapere, Viene operata, quindi, dall'uomo.

Si tratta di un modo notevole di riproporre il *principio antropologico*.

Il termine che impieghiamo per questo operare la transizione dal particolare al generale mediante l'opera o la mediazione del professionista, cioè dell'uomo, è "*abduzione*". Esistono altri termini che potremmo impiegare in alternativa con assoluto rigore: è un concetto che era già presente nella cultura greco-classica e nei suoi seguiti latini. Si può parlare (impiegando anche termini latini corrispondenti) di "*retroductio*", *ἐπιχείρημα* o "*reductio ad absurdum*" di Zenone d'Elea (489-430), oppure di *'απαγωγή*, concetto che era presente ad Aristotele (384-322).

La capacità di collegare il quadro fenomenico all'ipotesi di caso generale con relativa immediatezza prende spesso la denominazione di "*occhio clinico*", e questo non solo nel campo medico.

L'*abduzione* è una mediazione dal caso particolare al caso generale, compiuta attraverso l'irrinunciabile opera del professionista. Questa non dà verità, non è un sillogismo tautologico, al contrario era già noto e discusso nell'antichità che esso poteva dare sia verità che falsità.

6. Storia Antica e Storia Contemporanea

È questo uno dei tanti casi che esemplificano come noi pedagogisti attingiamo proprio da quel contesto antico i primi strumenti concettuali ed operativi per la nostra cultura e per il nostro esercizio professionale, e di conseguenza possiamo annoverare 2500 anni di storia ed oltre. Basterà esemplificare con la ῥητορεία, con il διάλογος di Socrate e Platone, con la πολιτεία come socializzazione e partecipazione attiva alla vita politica, con la Logica classica, con il γνῶθι σεαυτόν o *nosce te ipsum*, e la consapevolezza piena dei propri limiti e delle proprie potenzialità, e la condanna della ὑβρις, superba violazione di tale limitatezza, e via elencando come si è fatto in manuali comprensivi.

Il concetto di *abduzione* è stato poi ripreso e reso rigoroso nel XIX secolo da Charles S. Peirce (1839-1914) all'interno di una visione pragmatista, ed è stato ulteriormente raffinato in anni più vicini a noi da Pavel Tichy (1936-1994), da quel personaggio che è ben noto a tutti noi che abbiamo studiato l'epistemologia del '900 ed in particolare gli sviluppi del Razionalismo Critico di Karl R. Popper negli ultimi anni della sua vita, per la confutazione su base logica dell'idea secondo la quale all'evoluzione della conoscenza scientifica sarebbe corrisposto un aumento della verisimiglianza, a cui Popper stesso ha creduto per decenni e che ha dovuto riconoscere essere falsa nel *Postscript to the Logic of Scientific Discovery*, apparso circa cinquant'anni dopo l'opera fondamentale.

Come il teorema di Tichy è stato fondamentale a questo scopo, proprio lo stesso personaggio è stato fondamentale per rendere ancor più rigoroso il concetto di *abduzione*.

Fra l'altro, queste riflessioni ci consentiranno di cogliere come non casuale l'evidenza che la prima formulazione dell'idea della scienza come sapere fallibile, concetto fondamentale della proposta di Popper, sia stata operata proprio da Peirce decenni prima che Popper nascesse.

In pratica, noi professionisti abbiamo la competenza per dire che un certo caso generale sia caratterizzato da un ventaglio di sintomi, di fenomenologie e di evidenze connessi, come conseguenze. La nostra mediazione consiste nell'individuare in tutta una serie di evidenze proprio il quadro che rimanda ad un caso generale, cioè l'ipotesi diagnostica a premessa, cioè quel caso generale che costituisce l'ipotesi più potente, più semplice, più diretta e "canonica" e più comprensiva, per spiegare tutte le evidenze del caso particolare e, quindi, per individuare la possibile linea d'azione conseguente. Si può presentare il caso nel quale tale ipotesi, cioè tale caso generale, è l'unico in grado di consentire tutto questo.

7. Non c'è Verità, “Alles Leben Ist Problemlösen” und/and “Unended is the Quest”

E infatti, noi pedagogisti come tutti i professionisti del sociale, come a ben vedere anche professionisti di altre categorie, lavoriamo sempre attraverso *ipotesi*: non ci sono certezze nella nostra scienza e nel nostro esercizio professionale, ci possono essere semmai convincimenti o regole di metodo.

Quali sono le nostre certezze, o meglio quali i convincimenti che ne possono prendere il posto? Vediamone alcuni esempi tra gli innumerevoli possibili.

- Che possiamo lavorare ancora.
- Che l'educazione non ha fine.
- Con Popper, *Alles Leben ist Problemlösen*.
- Abbiamo regole di metodo alle quali ottemperiamo, ma certamente noi non metteremo mai l'ultima parola, la parola “fine”, in nessun discorso che ci riguarda.
- Non abbiamo verità, e esercitiamo nella piena consapevolezza di non averla.
- Abbiamo da porre ed aiutare a porre dei problemi, in seguito alle situazioni problematiche che hanno indotto altre persone a rivolgersi a noi e alla nostra competenza professionale.
- Non abbiamo soluzioni, ed invece possiamo e dobbiamo aiutare l'interlocutore a creare delle ipotesi di soluzioni, delle possibili soluzioni, le sue.
- Queste soluzioni sono sempre interlocutorie, sono sempre provvisorie, sono sempre contestualizzate al momento, possono reggere in questo momento ma nulla ci può far escludere che esse cadano in un momento successivo.
- Anzi, questa caduta la attendiamo come un'ipotesi positiva e progressiva, ce l'auguriamo, perché grazie a questa un domani prossimo o remoto cercheremo e potremo trovare delle ipotesi migliori per qualche verso.

Anche questo procedere di mediazione dal particolare al generale è un fatto tipicamente umano. Esso richiede necessariamente l'intervento e l'apporto di un professionista a ciò qualificato, che abbia la competenza e l'esperienza per tradurre le richieste che gli provengono da chi abbia bisogno d'aiuto in un modo di procedere come *ricerca*.

Di questa “ricerca” il professionista stesso è un esempio e un componente, egli è parte del dialogo, ne è un elemento.

Strettamente connesso con l'umanità del professionista è il suo *Fallibilismo*.

Ancora: è l'interlocutore stesso che deve essere guidato a porsi come problema la situazione problematica per la quale si è rivolto al professionista e, con l'aiuto di questi, deve escogitare possibili ipotesi di soluzioni, che poi metterà alla prova. La ricerca è continua e senza fine, *Unended Quest* è il titolo dell'autobiografia intellettuale di Popper, e consiste nell'esercizio della creatività: un esercizio che è sempre normato, soggetto a regole.

Non esiste creatività senza regole, come invece si riteneva nell'Ottocento seguendo lo slogan "*genio e sregolatezza*". Uno slogan ingannevole, escogitato per non saper spiegare i geni, e per costringere ad una vita violentemente disciplinata i "comuni mortali"

8. Il Seguito nell'esercizio Professionale

Il seguito del discorso, al di là di tante possibili argomentazioni, non può che essere nell'esercizio professionale e nei relativi Feedback. Questo rimettersi, pragmaticamente, alla "esperienza futura", come è ben noto, è condizione di apertura all'evoluzione futura, di scientificità e quindi di trasferibilità interpersonale di quanto asserito, di democrazia e società aperta nel rispetto del popolo sovrano e di ogni singolo cittadino. Ma esso è anche intrinseco alla pedagogia per come essa è nata e si è sviluppata, una scienza sociale che è scienza in senso pieno e stretto, tentativo continuo di porre e di risolvere problemi mediante ipotesi coerenti e controllabili, e scienza sociale cui corrisponde un ventaglio di professioni intellettuali, anche se in Italia ce ne siamo accorti con grave ritardo.

Il pedagogista è un professionista intellettuale e sociale tra i professionisti intellettuali dei livelli superiori.

Egli esercita essenzialmente ponendo in essere una relazione d'aiuto, la quale è fortemente caratterizzata da una salda ed essenziale componente metodologica, e un irrinunciabile riferimento storico, che porta alla necessità di contestualizzare gli eventi tanto nel tempo quanto nei luoghi. Il pedagogista è un metodologo nella storia, persona umana tra le persone umane.

Bibliografia

William W. Bartley III (ed.): *Postscript to the Logic of Scientific Discovery* by Karl R. Popper, Vol. I, *Realism and the Aim of Science* (Hutchinson, London 1983), Vol. II, *The Open Universe* (Hutchinson, London 1982), Vol. III, *Quantum Theory and the Schism in Physics* (Hutchinson, London 1982).

Franco Blezza: *La pedagogia sociale – Che cos'è, di che cosa si occupa, quali strumenti impiega* (Liguori, Napoli 2005, n.e. 2010).

Franco Blezza: *Pedagogia della vita quotidiana – Dodici anni dopo* (Luigi Pellegrini ed., Cosenza 2011).

Franco Blezza: *Pedagogia professionale: che cos'è, quali strumenti impiega e come si esercita* (Libreria Universitaria, Limena – PD 2018).

Michele Borrelli und Jörg Ruhloff (herausgegeben von) *Deutsche Gegenwartspädagogik*, Band 1, 2 u. 3. (Schneider Verlag Hohengeren, Baltsmannweiler 1993-1996-1998). Edizione italiana *La pedagogia tedesca contemporanea* (Pellegrini, Cosenza 1995-1996-1999).

Piero Crispiani: *Pedagogia clinica – La Pedagogia sul campo, tra scienza e professione* (Junior, Bergamo 2001).

Piero Crispiani: *Didattica cognitivista* (Junior Bergamo 2008).

Piero Crispiani: *Hermes 2016 - Glossario scientifico professionale* (Junior, Bergamo 2015).

Charles Hartshorne, Paul Weiss, and Arthur W. Burks (eds.): *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 8 vols. (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1931–1958; vols. 1–6 edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss, 1931–1935; vols. 7–8 edited by Arthur W. Burks, 1958).

Karl R. Popper: *Logik der Forschung. Zur Erkenntnistheorie der modernen Naturwissenschaft* (J. Springer, Wien 1935). *The Logic of Scientific Discovery* (Hutchinson, London 1957).

Karl R. Popper: *Unended Quest; An Intellectual Autobiography* (Fontana/Collins, Glasgow 1976).

Karl R. Popper: *Alles Leben ist Problemlösen - Über Erkenntnis, Geschichte und Politik* (R. Piper, München 1996).

Vladimír Svoboda; Bjørn Jespersen; Colin Cheyne (Eds.): *Pavel Tichý's Collected Papers in Logic and Philosophy* (Prague and Otago University Press, Dunedin 2004).

Franco Blezza

Pavel Tichý: *On Popper's Definitions of Verisimilitude* (*The British Journal for the Philosophy of Science* 25, 155-160, 1974).

Leonardo Trisciuzzi: *La pedagogia clinica* (Laterza, Roma-Bari 2003).

**Is the golden section a key for
understanding beauty?
Part II
(La sezione aurea è una chiave per la
comprensione del bello?)
Parte II**

Franco Eugeni* and Luca Nicotra°

Received: 01-12-2018. **Accepted:** 26-12-2018. **Published:** 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.421

®Eugeni and Nicotra



Abstract

Our goal is to prove that the golden section, however important, is not the only key to understand a mathematical-formalizing approach to the idea of beauty. Having developed, from this point of view, reading keys linked to the post-modern, it is necessary to link together the multiple rivulets of knowledge that gather in this direction. Moreover the canons of the approaches presented up to now are very indicative for the understanding of many aspects of beauty,

* Teramo University. Full Professor of Logics and Science Philosophy, Teramo, Italy; eugenif3@gmail.com.

° Cultural Association “Arte e Scienza”, President. Mechanical Engineer and Editor in charge of the *ArteScienza* magazine, Rome, Italy; luca.nicotra1949@gmail.com.

which however depends on the historical moment and the cultures created in the various civilizations. Therefore we can affirm that there is no effective definition of "beauty" that can be codified through fixed canons, but that the concept is expressed by a series of stratifications and interpretations that tend to link several major variations, expressing the various answers given by man to the question: what is the beauty?

Keywords: Golden section, golden number, beauty, golden rectangle, fractals

Sunto

Nostro obiettivo è provare che la sezione aurea, per quanto di importanza notevole, non è l'unica chiave per comprendere un approccio matematico-formalizzante dell'idea di bellezza. Essendosi sviluppate, da questo punto di vista, chiavi di lettura legate al post-moderno, occorre legare tra loro i molteplici rivoli di saperi che si addensano in questa direzione. Inoltre i canoni degli approcci fino ad oggi presentati sono molto indicativi per la comprensione di numerosi aspetti della bellezza, che però dipende dal momento storico e dalle culture createsi nelle varie civiltà. Pertanto possiamo affermare che non esiste una effettiva definizione del "bello" che possa essere codificata attraverso canoni fissi, ma che il concetto si esprime con una serie di stratificazioni e interpretazioni che tendono a collegare fra loro numerose varianti principali, esprimenti a loro volta le varie risposte date dall'uomo alla domanda: cosa è il bello?

Parole chiave: Sezione aurea, numero aureo, bellezza, rettangolo aureo, frattali

6 Una disamina del numero aureo

Ciò che definisce la sezione aurea è la proporzione secondo la quale un segmento è diviso in due parti disuguali. Per numero aureo, dunque, si dovrebbe intendere un numero che caratterizza tale proporzione. L'assegnazione dell'aureola di "aureo" all'uno o all'altro dei due numeri $\Phi = 1,618$ e $\phi = 0,618$ è quindi arbitraria, in quanto entrambi caratterizzano la sezione aurea di un segmento. Normalmente si chiama numero aureo Φ e numero aureo coniugato ϕ .

Anche il legame con la successione di Fibonacci è mantenuto sia da Φ sia da ϕ . Infatti Φ è il limite, al tendere all'infinito, dei rapporti fra un termine e il

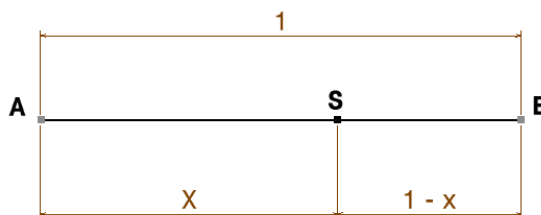
precedente della successione di Fibonacci, mentre ϕ è il limite, al tendere all'infinito, dei rapporti fra un termine e il successivo della stessa successione.

Tuttavia ci sono altri due numeri che caratterizzano la proporzione della sezione aurea, ma sono normalmente ignorati. I quattro numeri “aurei” che caratterizzano la sezione aurea emergono dai possibili modi in cui algebricamente si può impostare la relazione che intercorre fra i suoi tre elementi: l'intero segmento e le sue parti maggiore e minore.⁴⁶

La soluzione algebrica della divisione di un segmento in media ed estrema ragione si trova facilmente assumendo come incognita x la misura di uno dei tre segmenti coinvolti e scegliendo come unità di misura uno dei due rimanenti.⁴⁷ I casi possibili sono dunque le disposizioni di classe 2 (il primo elemento è uno dei tre segmenti della sezione aurea assunto come unità di misura e il secondo elemento è un altro dei rimanenti due segmenti assunto come incognita) di 3 oggetti (i tre segmenti della sezione aurea) e sono pertanto sei.⁴⁸

1° caso

L'unità di misura è l'intero segmento e l'incognita il segmento di media ragione:



$1 : x = x : (1 - x)$, da cui $x^2 = (1 - x)$ e infine: $x^2 + x - 1 = 0$. Le due radici di questa equazione di 2° grado, sono:⁴⁹

⁴⁶ Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*. “Convegno “Matematica, Natura, Architettura”, 17 novembre 2017, Mathesis- Dipartimento di Architettura, Napoli.

⁴⁷ Si potrebbe scegliere anche una unità di misura diversa dai tre segmenti della sezione aurea, ma sceglierla all'interno di tale terna permette di avere come radici dell'equazione algebrica direttamente i rapporti fra i tre segmenti stessi.

⁴⁸ Dato un insieme di n oggetti distinti e $q < n$ le disposizioni semplici degli n oggetti presi a gruppi di q sono tutti i possibili raggruppamenti di q oggetti scelti fra gli n in modo tale che ciascun gruppo contenga q degli n oggetti e che due gruppi siano distinti per almeno un oggetto o per l'ordine degli oggetti contenuti. Il numero di disposizioni di classe q di n oggetti è $D_{n,q} = n! / (n - q)! = (n-1) \times \dots \times (n-q+1)$, ovvero il prodotto di q numeri naturali decrescenti a partire da n .

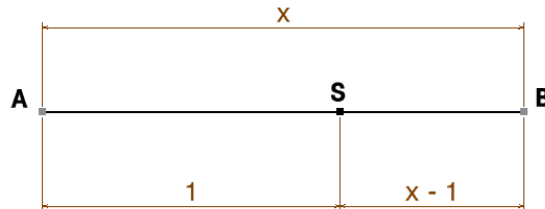
⁴⁹ x_1 e x_2 sono irrazionali e quindi risultano costituiti da un numero infinito di cifre decimali prive di periodicità. Normalmente si considerano tre cifre decimali.

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1,618... \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618...$$

La radice negativa corrisponde a un punto esterno all'intero segmento che lo divide esternamente secondo la proporzione aurea. Essa per tale motivo non viene presa in considerazione. Dunque è $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618$.

2° caso

L'unità di misura è il segmento di media ragione e l'incognita è l'intero segmento:



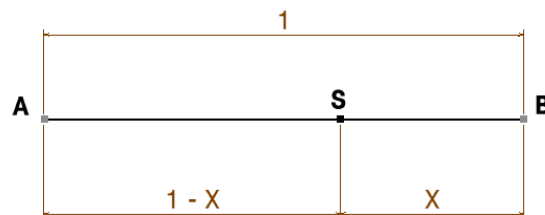
$x : 1 = 1 : (x - 1)$, da cui $x(x-1) = 1$ e infine: $x^2 - x - 1 = 0$. Le due radici di questa equazione di 2° grado, sono:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618... \quad ; \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$$

La prima, come nel caso precedente, non ha significato geometrico e per tale motivo non viene presa in considerazione. Dunque è $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$.

3° caso

L'unità di misura è l'intero segmento e l'incognita il segmento di estrema ragione:



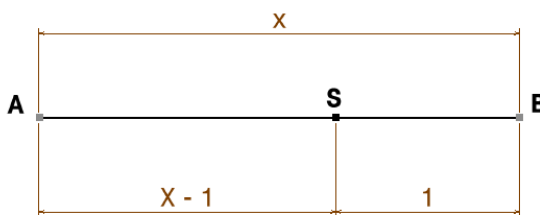
$1 : (1 - x) = (1 - x) : x$ da cui $(1 - x)^2 = x$ e infine: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Le due radici di questa equazione di 2° grado, sono:

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,382 \quad ; \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,618.$$

La seconda ovviamente non ha significato geometrico. Dunque è $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,382$.

4° caso

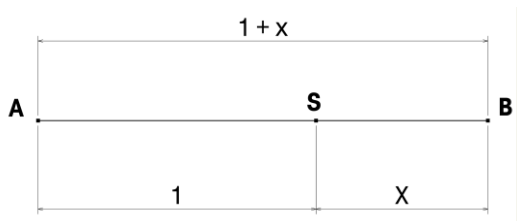
L'unità di misura è il segmento di estrema ragione e l'incognita l'intero segmento:



$x : (x - 1) = (x - 1) : 1$, da cui $(x - 1)^2 = x$ e infine: $x^2 - 3x + 1 = 0$, come nel 3° caso, ma ora delle due radici reali e distinte quella accettabile è $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,618$.

5° caso

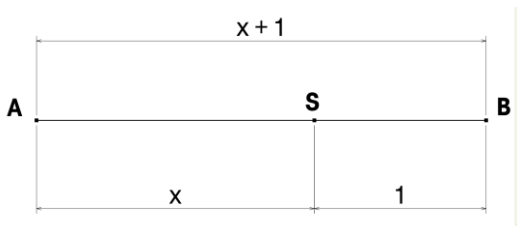
L'unità di misura è il segmento di media ragione e l'incognita il segmento di estrema ragione:



$(1 + x) : 1 = 1 : x$, da cui $x(1 + x) = 1$, e infine: $x^2 + x - 1 = 0$, come nel 1° caso. Delle due radici reali e distinte quella accettabile è $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618$.

6° caso

L'unità di misura è il segmento di estrema ragione e l'incognita il segmento di media ragione:



$(x + 1) : x = x : 1$, da cui $(x + 1) = x^2$, e infine: $x^2 - x - 1 = 0$, come nel 2° caso. Delle due radici reali e distinte quella accettabile è $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$.

In conclusione, tutte le possibili impostazioni algebriche della divisione di un segmento in media ed estrema ragione mostrano l'esistenza di quattro distinti rapporti che possono caratterizzarla:

- rapporto fra l'intero segmento e la parte maggiore $\Phi = \frac{AB}{AS} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$;
- l'inverso del precedente rapporto $\varphi = \frac{AS}{AB} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618$;
- rapporto fra l'intero segmento e la parte minore $\Phi_1 = \frac{AB}{SB} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,618$;
- l'inverso del precedente rapporto $\varphi_1 = \frac{SB}{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,382$.

Fra di essi intercorrono le seguenti relazioni:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

$$\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi = 2 + \varphi$$

$$\varphi_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi_1}$$

6.1 Proprietà del numero aureo $\Phi = 1,618$

Il numero $\Phi = 1,618\dots$, in quanto radice dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ (vedi 2° e 6° caso del parag. 6), soddisfa la relazione: $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, da cui:

$$(13) \quad \Phi^2 = \Phi + 1 = \Phi_1$$

dalla quale moltiplicando ripetutamente entrambi i membri per Φ si ottiene:

$$(13)' \quad \begin{aligned} \Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi \\ \Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 \\ \Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3 \\ \Phi^6 &= \Phi^5 + \Phi^4 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}.$$

La (13) mostra che il quadrato del numero aureo Φ contiene la stessa parte decimale di Φ stesso: $\Phi^2 = 2,618\dots$. Inoltre le (13), (13)' mostrano che la potenza n -esima di Φ è uguale alla somma delle due potenze precedenti di Φ stesso.

Dalla (13) dividendo entrambi i membri per Φ si ha: $\Phi = 1 + 1/\Phi = 1 + \varphi$. I due numeri aurei Φ e φ differiscono per l'unità.

Le (13), (13)' si possono scrivere anche per sostituzioni successive:

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \Phi + 1 \\ \Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1 \\ \Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 = 2\Phi + 1 + \Phi + 1 = 3\Phi + 2 \\ \Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3 = 3\Phi + 2 + 2\Phi + 1 = 5\Phi + 3 \\ \Phi^6 &= \Phi^5 + \Phi^4 = 5\Phi + 3 + 3\Phi + 2 = 8\Phi + 5 \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi^n &= f_n \Phi + f_{n-1} \end{aligned} \quad (13)''$$

essendo f_n l' n -esimo numero della successione di Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144\dots$$

Le (13)'' forniscono un modo diretto per calcolare le successive potenze intere del numero aureo Φ tramite i numeri di Fibonacci: la potenza n -esima di Φ si può ottenere moltiplicando Φ per l' n -esimo numero della successione di Fibonacci e addizionandovi il numero precedente.⁵⁰

6.2 Proprietà del numero aureo $\varphi = 0,618$

Il numero $\varphi = 0,618\dots$, in quanto radice dell'equazione $x^2 + x - 1 = 0$ (vedi 1° e 5° caso), soddisfa la relazione: $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$, da cui:

$$\varphi^2 = 1 - \varphi = \varphi_1 \quad (14)$$

dalla quale moltiplicando ripetutamente entrambi i membri per φ si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi^3 &= \varphi - \varphi^2 \\ \varphi^4 &= \varphi^2 - \varphi^3 \\ \varphi^5 &= \varphi^3 - \varphi^4 \end{aligned} \quad (14)'$$

⁵⁰ Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Op. cit.

$$\begin{aligned}\varphi^6 &= \varphi^4 - \varphi^5 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^n &= \varphi^{n-2} - \varphi^{n-1}.\end{aligned}$$

Le (14), (14)' mostrano che la potenza n -esima di φ è uguale alla differenza fra le due potenze precedenti di φ stesso cambiata di segno.

Le (14), (14)' si possono scrivere anche per sostituzioni successive:

$$\begin{aligned}(14)'' \quad \varphi^2 &= 1 - \varphi \\ \varphi^3 &= \varphi - \varphi^2 = \varphi - 1 + \varphi = 2\varphi - 1 \\ \varphi^4 &= \varphi^2 - \varphi^3 = 1 - \varphi - 2\varphi + 1 = -3\varphi + 2 \\ \varphi^5 &= \varphi^3 - \varphi^4 = 2\varphi - 1 + 3\varphi - 2 = 5\varphi - 3 \\ \varphi^6 &= \varphi^4 - \varphi^5 = -3\varphi + 2 - 5\varphi + 3 = -8\varphi + 5 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^n &= (-1)^{n-1} f_n \varphi + (-1)^n f_{n-1}.\end{aligned}$$

La potenza n -esima di φ si può ottenere moltiplicando φ per l' n -esimo numero della successione di Fibonacci preso col segno negativo se n è pari e col segno positivo se n è dispari e addizionandovi il numero precedente se n è pari, sottraendolo se n è dispari.⁵¹

6.3 Proprietà dei numeri aurei $\Phi_1 = 2,618$ e $\varphi_1 = 0,382$

Poiché $\Phi_1 = 2,618$ e $\varphi_1 = 0,382$ sono radici della stessa equazione, per essi valgono le stesse proprietà da questa ricavabili. Infatti entrambi soddisfano l'equazione $x^2 - 3x + 1 = 0$ (vedi 3° e 4° caso del parag. 6) e quindi si può scrivere per Φ_1 (lo stesso per φ_1):

$$(15) \quad \Phi_1^2 = 3\Phi_1 - 1$$

dalla quale moltiplicando ripetutamente entrambi i membri per Φ_1 si ottiene:

$$\begin{aligned}(15)' \quad \Phi_1^3 &= 3\Phi_1^2 - \Phi_1 \\ \Phi_1^4 &= 3\Phi_1^3 - \Phi_1^2 \\ \Phi_1^5 &= 3\Phi_1^4 - \Phi_1^3 \\ \Phi_1^6 &= 3\Phi_1^5 - \Phi_1^4 \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_1^n &= 3\Phi_1^{n-1} - \Phi_1^{n-2}.\end{aligned}$$

⁵¹ Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Op. cit.

Le (15), (15)' si possono scrivere anche per sostituzioni successive:

$$\begin{aligned}
 (15)'' \quad & \Phi_1^2 = 3\Phi_1 - 1 \\
 & \Phi_1^3 = 3(3\Phi_1 - 1) - \Phi_1 = 8\Phi_1 - 3 \\
 & \Phi_1^4 = 3(8\Phi_1 - 3) - (3\Phi_1 - 1) = 21\Phi_1 - 8 \\
 & \Phi_1^5 = 3(21\Phi_1 - 8) - (8\Phi_1 - 3) = 55\Phi_1 - 21 \\
 & \Phi_1^6 = 3(55\Phi_1 - 21) - (21\Phi_1 - 8) = 144\Phi_1 - 55
 \end{aligned}$$

Osservando la successione di Fibonacci, si conclude facilmente che nelle (15)'' Φ_1 viene moltiplicato per il numero di Fibonacci che occupa il posto doppio del grado n della potenza di Φ_1 considerata e gli viene sottratto il numero di Fibonacci che precede quel numero di due posti:

n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	grado
1,	1,	2,	3,	5,	8,
13,	21,	34,	55,	89,	144,.....
	4°	6°	8°	10°	12° posto

Pertanto possiamo scrivere così il termine generale delle (15)'':⁵²

$$\Phi_1^n = f_{2n} \Phi_1 - f_{2n-2}.$$

6.4 I numeri Φ e ϕ come radici e frazioni continue

La sezione aurea gode di interessanti espressioni numeriche infinite. Infatti Φ e ϕ si possono rappresentare come radice continua o come frazione continua in modo singolare: l'unica cifra presente è 1.

Consideriamo l'estrazione di radice continua:

$$R = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

Il suo quadrato è:

$$R^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + R,$$

da cui si ottiene l'equazione:

⁵² Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Op. cit..

$$R^2 - R - 1 = 0$$

ovvero la stessa equazione del 1° caso del paragrafo 6, ove l'incognita è indicata con R anziché con x e la cui radice positiva sappiamo già essere il numero aureo Φ . Pertanto possiamo scrivere:

$$\Phi = R = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

Aggiungendo successivamente radici di 1, si ottengono valori sempre più approssimati del numero aureo Φ : 1, 1.41, 1.594, 1.612, 1.616, 1.617, 1.618,

Analogamente possiamo considerare la frazione continua:

$$F = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

che si può scrivere:

$$F = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = 1 + \frac{1}{F}$$

da cui si ottiene l'equazione:

$$F^2 - F - 1 = 0$$

ovvero ancora una volta la stessa equazione del 1° caso del paragrafo 6, ove l'incognita è ora indicata con F anziché con x e la cui radice positiva sappiamo già essere il numero aureo Φ . Pertanto possiamo scrivere:

$$\Phi = F = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Cioè abbiamo ottenuto un'altra espressione che permette di calcolare i successivi valori approssimati di Φ .

Consideriamo ora la frazione continua:

$$F = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

che si può scrivere:

$$F = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \frac{1}{1 + F}$$

da cui si ottiene l'equazione:

$$F^2 + F - 1 = 0$$

ovvero la stessa equazione del 2° caso del paragrafo 6, ove l'incognita è indicata ora con F anziché con x e la cui radice positiva sappiamo già essere il numero aureo φ . Pertanto possiamo scrivere:

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

espressione che permette di calcolare i successivi valori approssimati di φ .

7 Costruzioni geometriche della sezione aurea

Le costruzioni geometriche della sezione aurea, dirette e inverse, possono essere realizzate con la geometria sintetica o con la geometria analitica.

Il problema diretto della costruzione della sezione aurea è quello in cui è dato un segmento e si vuole individuare il punto al suo interno che lo divide in media ed estrema ragione; il problema inverso del precedente consiste nel costruire il segmento che ammette come parte maggiore o come parte minore della sua sezione aurea un dato segmento.

Le costruzioni geometriche sintetiche della sezione aurea fanno ricorso unicamente a proprietà della geometria sintetica e sono piuttosto laboriose. Le costruzioni geometriche analitiche, invece, si basano su interpretazioni geometriche delle soluzioni delle equazioni algebriche che definiscono la sezione aurea nei vari casi indicati al. paragrafo 6; esse sono generalmente molto più agili e rapide di quelle sintetiche.

7.1 Costruzione geometrica sintetica della sezione aurea

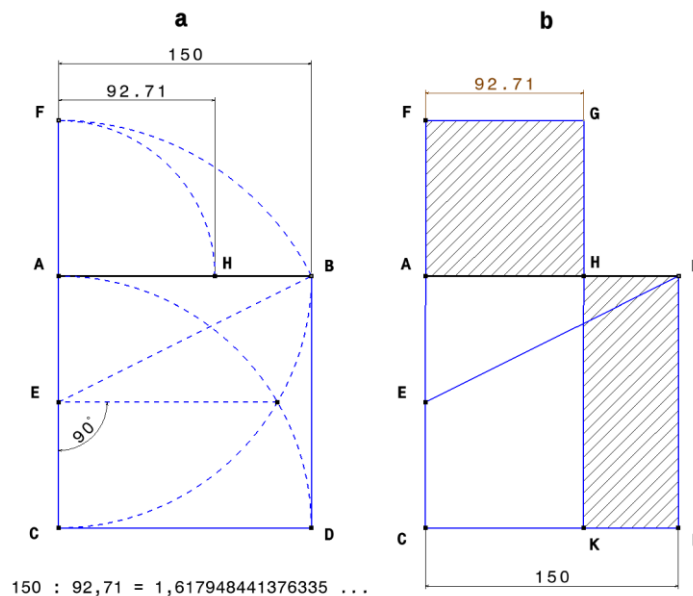


Figura 14 – Costruzione geometrica sintetica diretta della sezione aurea del segmento AB secondo Euclide (*Elementi*, Libro II, Prop. 11). Fig. 14a: la costruzione con riga e compasso in termini moderni. Fig. 14b: la costruzione originale di Euclide basata su proposizioni precedenti degli *Elementi*. La costruzione è avvalorata dall'equivalenza fra il quadrato AHGF e il rettangolo HBDK.

Nell'ambito della geometria sintetica, la prima costruzione diretta della sezione aurea di un segmento di cui si abbia notizia è quella proposta da Euclide nella Proposizione 11 del Libro II degli *Elementi*. Espressa in termini semplificati, la costruzione si svolge con riga e compasso secondo quanto da

noi indicato in figura 14a. Nella figura 14b, invece, è riportata la costruzione originale di Euclide che non fa uso di riga e compasso, ricorrendo soltanto a proposizioni da lui precedentemente dimostrate (le denominazioni dei punti sono quelle originali di Euclide).

Sia AB il segmento sul quale costruire la sezione aurea. Costruito su AB il quadrato $ABCD$, facendo successivamente centro in A e in C si traccino due archi di circonferenza di raggio AB e dal loro punto di intersezione si tracci la perpendicolare a CA che interseca CA nel suo punto medio E . Quindi si congiunga questo con B . Facendo centro in E si tracci un arco di circonferenza di raggio EB e sia F il suo punto di intersezione con la retta CA . Ebbene, l'arco di circonferenza con centro in A e raggio AF interseca in H il segmento AB dividendolo in media ed estrema ragione, essendo:

$$AB : AH = AH : HB,$$

poiché il rettangolo che ha per lati AB , HB è equivalente al quadrato di lato AH :

$$AB \times HB = AH^2.$$

La dimostrazione fornita da Euclide (figura 14b) consiste proprio nel dimostrare l'equivalenza fra il quadrato $AHGF$ costruito su AH e il rettangolo $HBDK$ avente per lati HB e $BD = AB$; essa è piuttosto macchinosa e si basa soltanto su precedenti proposizioni degli *Elementi*.⁵³ La possiamo seguire nella traduzione moderna di Fabio Acerbi:⁵⁴

Sia data la retta AB : si deve pertanto secare AB cosicché il rettangolo compreso da quella totale e dall'uno o dall'altro dei segmenti uguali al quadrato sul restante segmento.

Si descriva su AB il quadrato $ABDC$ (Prop.1-46), e si sechi AC a metà nel punto E (Prop.1-10) e si congiunga B con E ; e si prolunghi CA

⁵³ Nell'ordine richiamato sono le seguenti:

Libro I - Prop. 46: *Descrivere sulla retta data un quadrato*

Libro I - Prop. 10: *Secare a metà la retta limitata data*

Libro I - Prop. 3: *Di due rette disuguali date, sottrarre dalla maggiore una retta uguale alla minore.*

Libro II – Prop. 6: *Qualora una linea retta sia divisa a metà, e una certa retta sia sommata ad essa in linea retta, il rettangolo compreso da quella totale insieme con quella sommata e da quella sommata più il quadrato sulla metà è uguale al quadrato su quella composta sia dalla metà sia da quella sommata).*

Libro I - Prop. 47: *Nei triangoli rettangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo retto è uguale ai quadrati sui lati che comprendono l'angolo retto.*

⁵⁴ <http://www.scienzaatscuola.it/euclide/home/libro2/prop2-11.html>.

fino a F (Prop.1-3), e si ponga BE uguale a EF; si descriva su AF il quadrato FH e si conduca GH fino a K (Prop.1-46): dico che AB risulta secata secondo H in modo da formare il rettangolo AB pr BH uguale al quadrato su AH.

Poiché infatti la retta AC risulta secata a metà in E, e ad essa risulta sommata FA, il rettangolo CF per FA più il quadrato su AE è uguale al quadrato su EF (Prop.2-6). Ma EF è uguale a EB, il rettangolo CF per FA insieme al quadrato su AE è uguale al quadrato su EB

Poiché infatti la retta AC risulta secata a metà in E, e ad essa risulta sommata FA, il rettangolo CF per FA più il quadrato su AE è uguale al quadrato su EF (Prop.2-6). Ma EF è uguale a EB, il rettangolo CF per FA insieme al quadrato su AE è uguale al quadrato su EB.

Ma la somma dei quadrati su BA e AE è uguale al quadrato su EB (Prop.1-47), l'angolo su A è infatti retto, il rettangolo CF per FA insieme al quadrato su AE è uguale è uguale alla somma dei quadrati su BA e AE. Si sottragga quello su AE comune; il rettangolo restante CF per FA

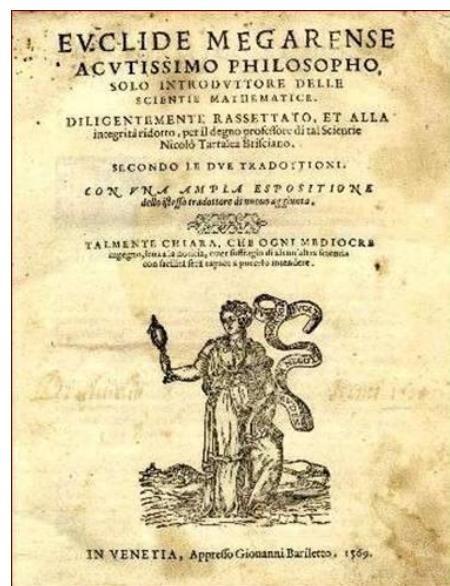


Figura 15 - *Elementi* di Euclide, tradotti in italiano da Niccolò Tartaglia (1543). Edizione del 1569.

è uguale quindi al quadrato su AB.

Il rettangolo FA per FK è FK, AF è infatti uguale a FG, e il quadrato su AB è AD, FK è quindi uguale a AD. Si sottragga AK comune: FH restante è allora uguale a HD.

E HD è il rettangolo AB per BH, AB è infatti uguale a BD, e FH è il quadrato su AH; il rettangolo AB per BH è quindi uguale a quadrato su AH.

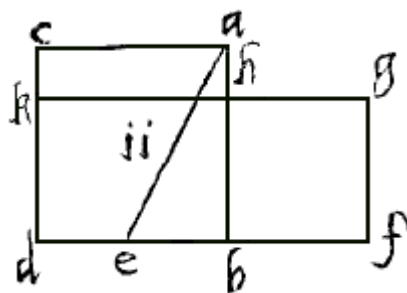
La retta data AB risulta quindi secata secondo H così da fare il rettangolo AB per BH uguale al quadrato su AH.

A titolo informativo riportiamo la versione della stessa costruzione tratta dagli *Elementi* di Euclide tradotti in italiano da Niccolò Tartaglia nel 1543:⁵⁵

Problema .1. Propositione .11.

[11/11] Puotemo segare una data linea retta si conditionatamente che il rettangolo che è contenuto sotto di tutta la linea, & di una parte, sia eguale al quadrato che uien fatto dell'altra parte. figura 47r.

Sia data la linea ,a,b, la qual uolemo diuidere così conditionatamente che quel che uien prodotto da tutta la linea in la sua menor parte sia eguale al quadrato dell'altra maggior parte, & per far tal cosa descriuerò il quadrato sopra la detta linea .a.b. (per la quadragesima sesta del primo) il qual, sia ,a,b,c,d, & diuido il lato ,b,d, in due parti



eguale in ponto ,e, et produco la ,a,e, & slongo etiam la ,e,b, fina in ponto ,f, talmente che la ,e,f, sia eguale alla ,a,e, et sopra la parte intrinseca ,b,f, descriuo (per la quadragesima sesta del primo) il quadrato ,b,f,g,h, il quale sega dalla linea ,a,b, la parte ,b,h, eguale alla parte ,b,f, hor dico che la linea ,a,b, è diuisa talmente in ponto ,h, che quello che è fatto da tutta la linea

,a,b, in la sua minor parte ,a,h, è eguale al quadrato dalla parte ,b,h. Et per dimostrar questo slongo la ,g,h, per fin al k laqual serà equidistante al ,a,c. perche adonque la linea ,d,b, è diuisa in due parti eguale in ponto ,e, & a quella gliè aggiunta la linea ,b,f. Il rettangolo compreso sotto a tutta la linea ,d,f, & alla linea ,b,f, col quadrato della e.b. per la sesta di questo, serà eguale al quadrato della ,e,f, & perche .e.f. si è eguale alla .e.a. il rettangolo adonque fatto della ,d,f, in la ,b,f, con lo quadrato della ,e,b, serà eguale al quadrato della .e.a. & perche il quadrato della ,e.a. (per la penultima del primo) si è eguale alli duoi quadrati delle due linee .e.b. & .a.b. seguita adunque che'l rettangolo della .d.f. in la .b.f. con lo quadrato della .e.b. sia eguale al medesimo quadrato della .e.b. insieme con lo quadrato della ,a,b, leuando uia da l'una & l'altra summa il quadrato della ditta .e.b. li duoi rimanenti (per la tertia concettione) seranno fra loro equali, delli quali rimanenti l'uno serà il rettangolo fatto della d.f. nella .b.f. & l'altro è il quadrato della .a.b. & perche il

⁵⁵È la prima versione degli *Elementi* di Euclide pubblicata in italiano e anche la prima edizione in una lingua europea moderna, basata sia sulla traduzione latina dall'arabo di Campano da Novara del 1482 (che è la prima edizione stampata degli *Elementi*), sia sulla traduzione latina dal greco di Bartolomeo Zamberti del 1505.

rettangolo fatto della d.f. nella .b.f. si è la superficie ,d,g, perche .f.g. è equale al .b.f. (per esser ciascun di loro lato del quadrato .b.f.g.h.) adonque la superficie .d.g. serà equale al quadrato della .a.b. cioè al quadrato .a.d. hor se communamente ne cauamo la superficie .d.h. li duoi rimanenti seranno anchora equali (per la detta tertia concettione) l'uno di quali rimanenti è la superficie .a.k. l'altro serà il quadrato .b.f.g.h. & perche la superficie .a.k. è contenuta sotto a tutta la linea .a.b. & alla sua minor parte .a.h. (per essere .a.c. equale à .a.b.) & lo quadrato .b.f.g.h. è il [pag. 47v] quadrato de ,b,h, cioè de l'altra sua maggior parte, adonque la linea ,a,b, serà diuisa secondo il proposito nel ponto ,h, perche la superficie, ouer rettangolo de tutta la linea ,a,b, in la sua minor parte .a.h. è equale al quadrato dell'altra sua maggior parte ,h,b, Et nota che non bisogna afaticarsi in uoler diuidere in questo modo un numero perche è impossibile, come in la uigesima nona del sesto si manifesterà.

7.2 Costruzione geometrica analitica della sezione aurea

7.2.1 Costruzioni dirette

Le interpretazioni geometriche delle soluzioni delle equazioni dei casi 1, 3 del paragrafo 6 permettono altrettante costruzioni analitiche dirette della sezione aurea, in quanto in quei casi è dato il segmento AB (assunto come unità di misura) e le soluzioni delle equazioni forniscono le misure rispetto ad esso o della parte maggiore (caso 1) o della parte minore (caso 3) della sezione aurea di AB , permettendo quindi di individuare al suo interno il punto S che lo divide in media ed estrema ragione.

Costruzione geometrica diretta della sezione aurea: 1° caso parag. 6

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento AB nel caso 1 in cui si sceglie come incognita x la misura della parte maggiore e come unità di misura AB stesso: $x^2 + x - 1 = 0$.

Abbiamo già visto che delle due radici reali e distinte ha significato geometrico soltanto quella positiva:

$$(16) \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618\dots$$

Per ottenere una costruzione geometrica diretta della sezione aurea basterà trovare una interpretazione geometrica della (16). A tal fine possiamo scrivere

$$(16)' \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 0,618.$$

Orbene, l'interpretazione geometrica della (16)' è immediata: il radicale è la misura dell'ipotenusa CA di un triangolo rettangolo i cui cateti AB e BC misurano 1 e $1/2$.⁵⁶ Sottraendo da tale ipotenusa un segmento di misura $1/2$ (ovvero un segmento congruente con il cateto BC) otterremo il segmento AS' congruente con la parte maggiore della sezione aurea di AB , poiché la sua misura rispetto ad AB è data dalla (16)' ovvero è $x = 0,618...$

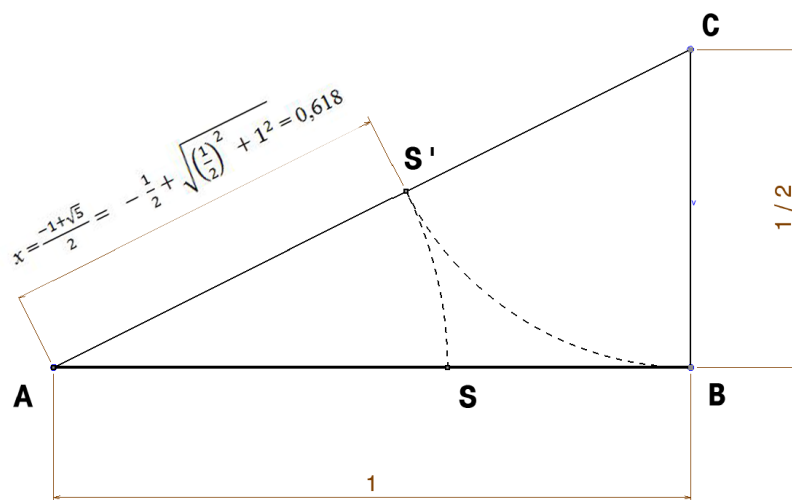


Figura 16 – Costruzione geometrica analitica diretta della sezione aurea: dato il segmento AB individuare il punto S al suo interno che lo divide in media ed estrema ragione.

La costruzione geometrica analitica diretta della sezione aurea del segmento AB è pertanto immediata (figura 16): costruito il triangolo rettangolo ABC tale che $AB = 1$ e $BC = \frac{1}{2}$, puntiamo il compasso in C e con raggio CB riportiamo il cateto BC su CA in CS' . Pertanto, puntando il compasso in A con apertura pari ad AS' , basta tracciare l'arco di circonferenza $S'S$ per ottenere su AB il punto S che divide AB in media ed estrema ragione, ovvero secondo la sua sezione aurea.

7.2.2 Costruzioni inverse

Le interpretazioni geometriche delle soluzioni delle equazioni dei casi 2, 4 del paragrafo 6 permettono altrettante costruzioni analitiche inverse della

⁵⁶ Questo caso è trattato in Federigo Enriques e Ugo Amaldi, *Elementi di geometria, Parte Seconda*, Bologna, Zanichelli, 1963, p. 195.

sezione aurea, in quanto in quei casi sono date rispettivamente o la parte maggiore o quella minore della sezione aurea (assunte come unità di misura) e le soluzioni delle equazioni forniscono la misura dell'intero segmento (assunto come incognita).

Anche le interpretazioni geometriche delle soluzioni delle equazioni dei casi 5, 6 del paragrafo 6 permettono altrettante costruzioni analitiche inverse della sezione aurea, poiché anche in quei casi sono date rispettivamente o la parte maggiore o quella minore della sezione aurea (assunte come unità di misura), ma le soluzioni delle equazioni forniscono questa volta rispettivamente la misura della parte minore o di quella maggiore, cosicché dalla somma delle due parti si può ricostruire l'intero segmento.

Costruzione geometrica inversa della sezione aurea: 2° caso parag. 6

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento AB nel caso 2, in cui si sceglie come incognita x il segmento AB stesso e come unità di misura la parte maggiore AS della sua sezione aurea: $x^2 - x - 1 = 0$. Delle due radici reali e distinte sappiamo già che ha significato geometrico soltanto quella positiva:

$$(17) \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$$

Analogamente al caso precedente possiamo scrivere la (17) nella forma:

$$(17)' \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 1,618.$$

L'interpretazione geometrica della (17)' è immediata: il radicale è la misura dell'ipotenusa CA di un triangolo rettangolo i cui cateti AS e SC misurano 1 e $1/2$. Aggiungendo a tale ipotenusa un segmento di misura $1/2$ (ovvero un segmento congruente con il cateto SC) otterremo il segmento AD congruente con l'intero segmento AB della sezione aurea, poiché la sua misura rispetto ad AS è data dalla (17)' ovvero è $x = 1,618...$

La costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea del segmento AB è pertanto immediata (figura 17): costruito il triangolo rettangolo ASC tale che $AS = 1$ e $SC = 1/2$, puntando il compasso in C riportiamo CS sul prolungamento di AC . Infine, puntando il compasso in A , si tracci un arco di circonferenza di raggio AD fino a intersecare in B la retta AS : il segmento AB è il segmento cercato.

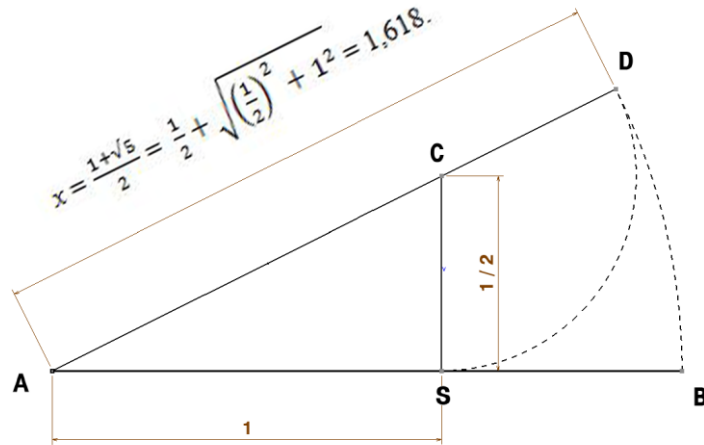


Figura 17 – Costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea: dato il segmento AS trovare il segmento AB che ammette AS come parte maggiore della sua sezione aurea.

Costruzione geometrica inversa della sezione aurea: 4° caso parag. 6

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento AB nel caso 4, in cui si sceglie come incognita x il segmento AB stesso e come unità di misura la parte minore SB della sua sezione aurea: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Delle due radici reali e distinte sappiamo già che ha significato geometrico soltanto:

$$(18) \quad x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,618$$

che possiamo riscrivere così:

$$(18)' \quad x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 2,618$$

Il radicale della (18)' è la misura dell'ipotenusa SC di un triangolo rettangolo i cui cateti SB e BC misurano 1 e 1/2. Aggiungendo a tale ipotenusa un segmento di misura 1/2 (ovvero un segmento congruente con il cateto BC) otterremo il segmento $SD = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$ che sommato al segmento $SB = 1$

dà come risultato il segmento cercato AB poiché la misura di questo è data proprio dalla (18)'.

La costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea del segmento AB è pertanto immediata (figura 18): costruito il triangolo rettangolo SBC tale che $SB = 1$ e $BC = 1/2$, puntando il compasso in C riportiamo CB sul

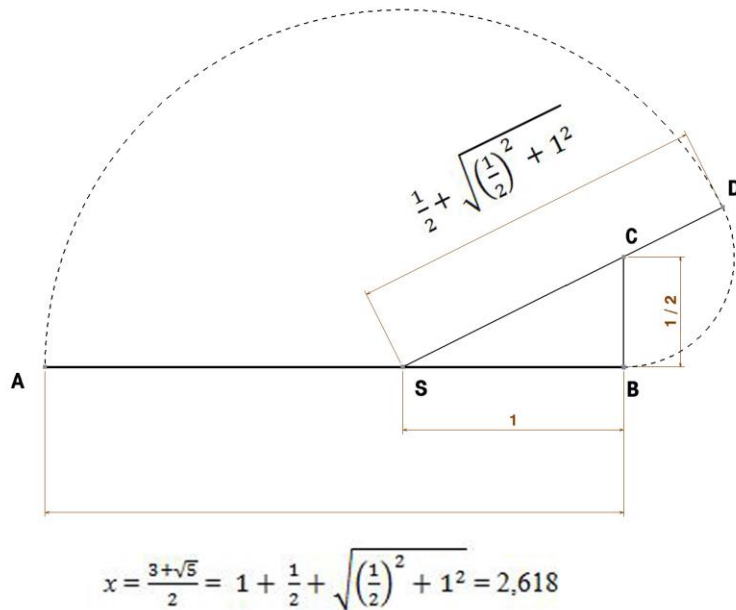


Figura 18 – Costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea: dato il segmento SB trovare il segmento AB che ammette SB come parte minore della sua sezione aurea.

prolungamento di BC . Infine, puntando il compasso in S , si tracci un arco di circonferenza di raggio SD fino a intersecare in A la retta BS : il segmento AB è il segmento cercato.

Costruzione geometrica inversa della sezione aurea: 5° caso parag. 6

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento AB nel caso 5, in cui si sceglie come incognita x la parte minore SB e come unità di misura la parte maggiore AS della sezione aurea di AB : $x^2 + x - 1 = 0$. Delle due radici reali e distinte quella accettabile è:

$$(19) \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618.$$

che possiamo riscrivere così:

$$(19)' \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 0,618$$

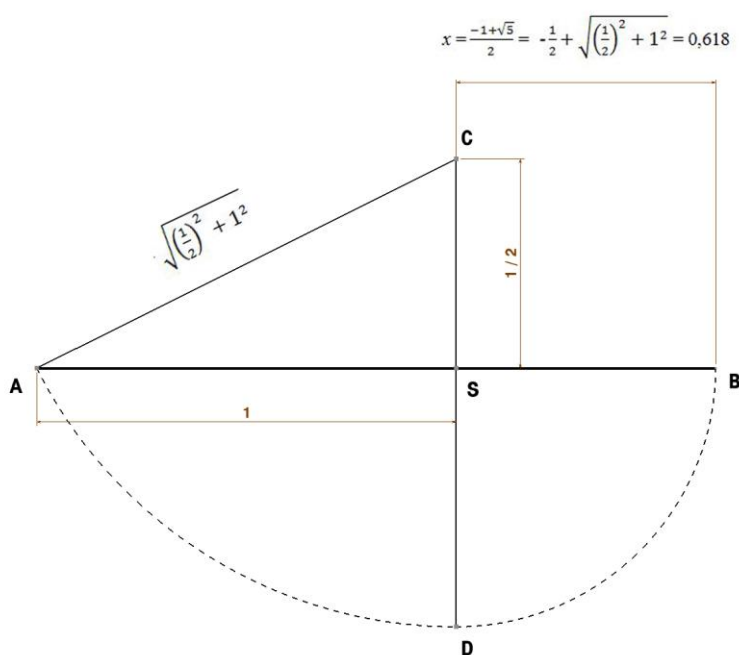


Figura 19 – Costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea:
dato il segmento maggiore AS trovare il segmento minore SB che
addizionato ad AS fornisce l'intero segmento AB della sezione aurea.

Il radicale della (19)' è la misura dell'ipotenusa AC di un triangolo rettangolo i cui cateti AS e SC misurano 1 e 1/2. Sottraendo da tale ipotenusa un segmento di misura 1/2 (ovvero un segmento congruente con il cateto SC) otterremo il segmento $SD = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$ congruente alla parte minore SB della sezione aurea essendo la sua misura dalla (19)'. Il segmento cercato è dunque $AB = AS + SB$.

La costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea del segmento AB è pertanto la seguente (figura 19): costruito il triangolo rettangolo ABC tale che $AB = 1$ e $BC = 1/2$, puntando il compasso in C riportiamo il segmento CA in CD sulla retta C. Quindi con centro in S si tracci

l'arco di circonferenza di raggio SD fino a intercettare in B il prolungamento di AS dalla parte di S . Il segmento AB è il segmento cercato che ha AS come parte maggiore della sua sezione aurea.

Costruzione geometrica inversa della sezione aurea: 6° caso parag. 6

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento AB nel caso 6, in cui si sceglie come incognita x la parte maggiore AS e come unità di misura la parte minore SB della sezione aurea di AB : $x^2 - x - 1 = 0$. Delle due radici reali e distinte quella accettabile è :

$$(20) \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$$

che possiamo riscrivere così:

$$(20)' \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 1,618$$

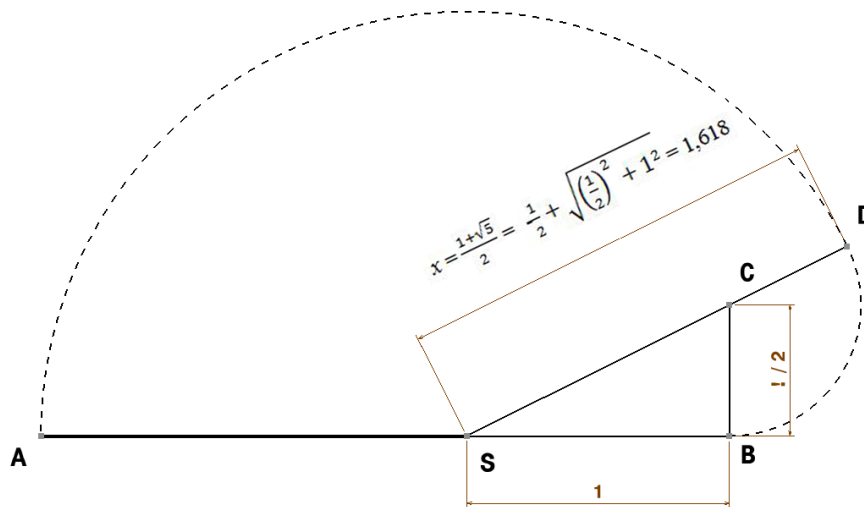


Figura 20 – Costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea:
dato il segmento minore SB trovare il segmento maggiore AS che
addizionato ad SB fornisce l'intero segmento AB della sezione aurea.

Il radicale della (20)' è la misura dell'ipotenusa AC di un triangolo rettangolo i cui cateti SB e BC misurano 1 e $1/2$. Addizionando a tale ipotenusa

un segmento di misura $1/2$ (ovvero un segmento congruente con il cateto BC) otterremo il segmento $SD = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$ congruente alla parte maggiore AS della sezione aurea, essendo la sua misura data dalla (20)'. Il segmento cercato è dunque $AB = AS + SB$.

La costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea del segmento AB è pertanto la seguente (figura 20): costruito il triangolo rettangolo SBC tale che $SB = 1$ e $BC = 1/2$, puntando il compasso in C riportiamo il segmento CB in CD sul prolungamento di SC . Quindi con centro in S si tracci l'arco di circonferenza di raggio SD fino a intercettare in A il prolungamento di SB dalla parte di S . Il segmento AB è il segmento cercato che ha SB come parte minore della sua sezione aurea.

Un'altra costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea è quella stessa già indicata precedentemente nella parte I di questo articolo per la costruzione del rettangolo aureo. Con riferimento, quindi, alla stessa figura allora utilizzata, assunto il segmento $AB = 1$ e indicato con M il suo punto medio, risulta:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$$

e quindi:

$$ME = MC = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad AE = AM + ME = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}.$$

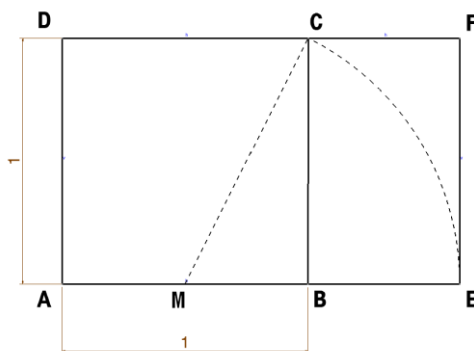


Figura 21 – La costruzione geometrica del rettangolo aureo interpretata come costruzione inversa della sezione aurea.

Dunque AE è il segmento cercato che ammette AB come parte maggiore della sua sezione aurea essendo il suo rapporto ad AB dato dalla (17)' ovvero $x = 1,618$. Di conseguenza BE è la parte minore della sezione aurea di AE .

7.3 Costruzioni tecnologiche della sezione aurea

La costruzione geometrica della sezione aurea di un segmento può essere realizzata molto rapidamente anche per mezzo di opportuni strumenti. Un esempio è fornito dal compasso di Goeringer.

Nel 1893 il pittore tedesco Adalbert Goeringer ideò un compasso a tre punte⁵⁷ con la proprietà che quando le due punte estreme sono agli estremi di un segmento, la terza punta individua la sezione aurea di questo (figura 22).

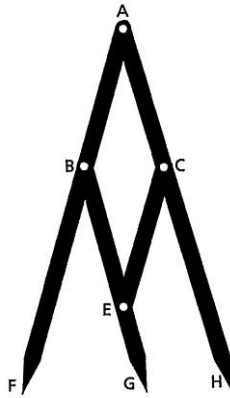


Figura 22 - Il compasso di Goeringer.

Il principio su cui si fonda il compasso di Goeringer è molto semplice: l'utilizzo di aste le cui lunghezze sono numeri di Fibonacci consecutivi e la similitudine dei triangoli da esse formate. In una possibile realizzazione si ha:

$$AF=AH=34 \text{ cm}, \quad BF=BG=CH=21 \text{ cm}, \quad AB=BE=EC=CA = 13 \text{ cm}.$$

Dalla similitudine dei triangoli ABC, BFG si ha: $BF : AB = FG : BC$ ovvero, essendo $BC=GH$, $BF : AB = FG : GH$. Poiché le misure di BF e AB sono due numeri consecutivi della successione di Fibonacci (21, 13) il rapporto $BF : AB$ approssima il numero aureo $\Phi = 1,618...$ (cfr. parag. 10). Cosicché possiamo scrivere $FG : GH = \Phi$ qualunque sia l'apertura FH fra le aste estreme del compasso.

⁵⁷ Adalbert Goeringer, *Der Goldene Schnitt*, Paperback – 1911

8 La sezione aurea nel pentagono e nel decagono regolare

Mostreremo ora in qual modo la sezione aurea sia presente nel pentagono e nel decagono regolare.

Iniziamo dal decagono regolare e supponiamo risolto il problema della sua costruzione con riga e compasso inscrivendolo nel cerchio di raggio OA (figura 23a). L'angolo al centro $\widehat{BOA}$ misura 36° in quanto insiste sull'arco AB che è la decima parte dell'intera circonferenza.

Il triangolo ABO è isoscele essendo $OA = OB$ in quanto raggi della stessa circonferenza. Pertanto è $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 72^\circ$. Tracciata la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABO}$ sia C il suo punto di intersezione con OA . Essendo $\widehat{OAB} = 72^\circ$ e $\widehat{ABC} = 36^\circ$ risulta $\widehat{BCA} = 72^\circ$. Dunque il triangolo ABC è isoscele ed è $AB = BC$.

I triangoli ABO e ABC sono simili, avendo entrambi un angolo di 36° e due di 72° . Gli angoli corrispondenti sono: $\widehat{ABC} = \widehat{BOA} = 36^\circ$, $\widehat{OAB} = 72^\circ$ (comune ai due triangoli), $\widehat{ABO} = \widehat{BCA} = 72^\circ$.

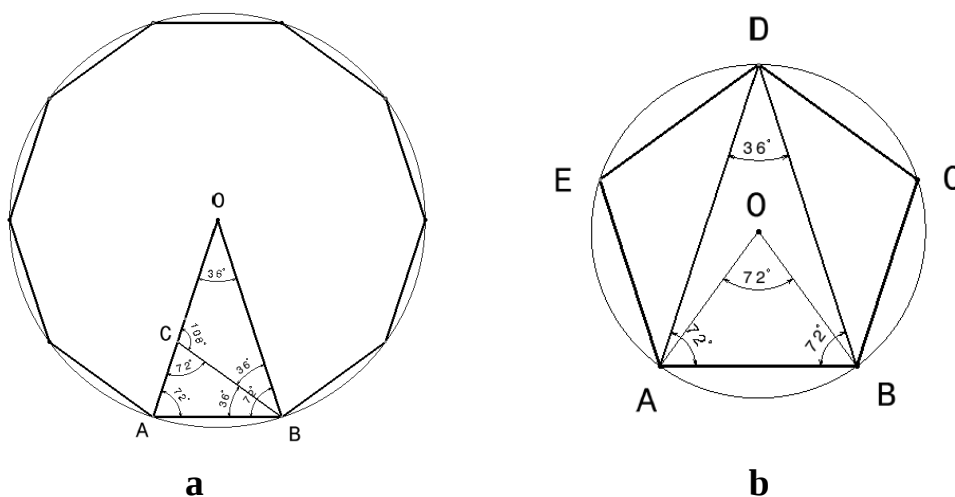


Figura 23 – Triangolo aureo: AOB nel decagono (a) e ADB nel pentagono (b) regolare.

Pertanto si ha: $OA : AB = AB : CA$ e anche $AB = BC = OC$ in quanto il triangolo OCB è isoscele sulla base BO . Dunque possiamo scrivere infine: $OA : OC = OC : CA$ e concludere che *il lato del decagono regolare è la parte maggiore della sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto essendo OC congruente con il lato AB del decagono.*

Possiamo anche concludere che *un qualsiasi triangolo isoscele con angolo al vertice di 36° è aureo, in quanto la base è la parte maggiore della sezione*

aurea di ciascuno dei lati uguali, ovvero il rapporto fra ciascuno dei lati uguali e la base è $\Phi = 1,618\dots$

Il triangolo aureo si trova anche nel pentagono regolare: è ciascuno dei triangoli isosceli aventi per base un lato del pentagono e per lati uguali due diagonali (figura 23b). Infatti, considerato per esempio uno di tali triangoli, ABD , l'angolo alla circonferenza $\hat{BDA}$ è la metà dell'angolo al centro $\hat{BOA}$ che insiste sullo stesso arco AB , ma è $\hat{BOA} = 72^\circ$ in quanto l'arco AB è la quinta parte dell'intera circonferenza e pertanto $\hat{BDA} = 36^\circ$. Inoltre essendo $DA = BD$ in quanto diagonali del pentagono, il triangolo ABD risulta isoscele sulla base AB e pertanto risulta $\hat{DAB} = \hat{ABD} = 72^\circ$. Possiamo allora concludere che *il lato del pentagono regolare è la parte maggiore della sezione aurea della diagonale*.

Inoltre, tracciando la bisettrice di uno dei due angoli di 72° si ottiene un nuovo triangolo isoscele con angolo al vertice di 36° e angoli alla base di 72° , ovvero si ottiene un altro triangolo aureo dal quale si può ottenere ancora un altro triangolo aureo, e così via all'infinito. Si ritrova, dunque, nel triangolo aureo lo stesso meccanismo di autorigenrazione all'infinito che abbiamo già riscontrato nel rettangolo aureo, fenomeno evidentemente legato alla natura irrazionale del rapporto che definisce la sezione aurea.

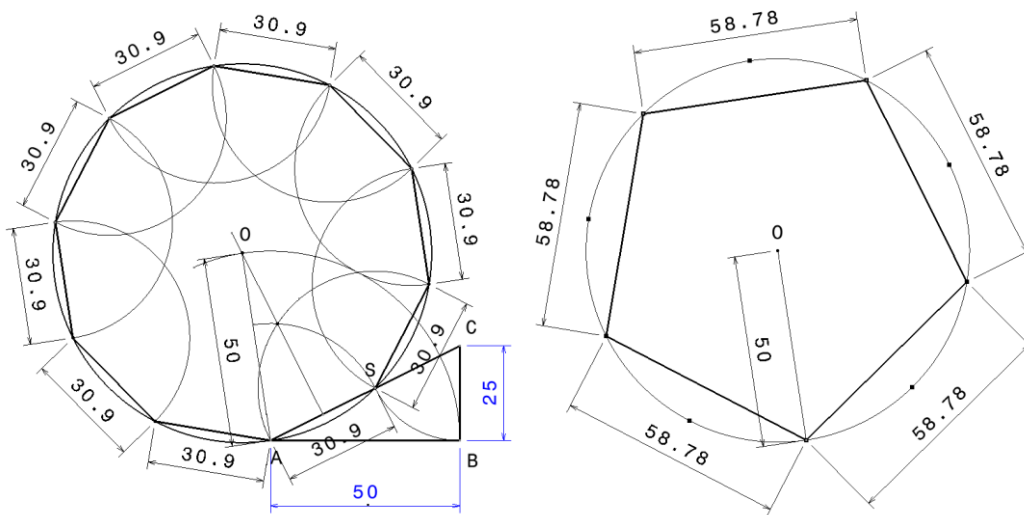


Figura 24 – Costruzione del decagono (a) e del pentagono (b) regolare inscritti in un cerchio.

Il risultato raggiunto ci permette di costruire il decagono regolare inscritto in un cerchio di dato raggio AB . Sul segmento AB ripetiamo la costruzione della parte maggiore della sezione aurea di AB vista precedentemente all'inizio del paragrafo 7: otteniamo il segmento AS , lato del decagono regolare (figura

24a). Quindi tracciata la mediana di AS facendo centro in A con apertura AB con il compasso possiamo individuare il centro O del cerchio circoscritto al decagono e disegnarlo. Successivamente facendo centro in S con apertura del compasso SA si traccia un arco di circonferenza che interseca il cerchio nel vertice del decagono successivo ad S. Ripetendo lo stesso procedimento si trovano tutti i successivi vertici del decagono. Per costruire il pentagono regolare inscritto nello stesso cerchio basta congiungere fra loro uno sì e uno no i dieci vertici del decagono (figura 24b).

9 La sezione aurea e la spirale logaritmica

La sezione aurea risulta collegata alla spirale logaritmica proprio tramite il numero aureo (Φ o ϕ).

La spirale logaritmica, in coordinate polari ha equazione:⁵⁸

$$\rho = a e^{b\theta},$$

che in forma logaritmica⁵⁹ si scrive:

$$\theta = (1/b) \ln (\rho/a)$$

ed è detta anche “spirale proporzionale”⁶⁰ poiché la distanza radiale fra le successive spire aumenta proporzionalmente all’angolo di rotazione, a differenza della spirale di Archimede nella quale invece rimane costante.⁶¹ Le

⁵⁸ La spirale logaritmica fu scoperta indipendentemente e quasi contemporaneamente da Evangelista Torricelli (1608-1647) e da René Descartes (1596-1650) nel 1638. Successivamente il grande matematico Jacob Bernoulli (1654-1705) rimase talmente affascinato dalle sue proprietà da chiamarla *spira mirabilis* e dedicarle anni di studio. Sarebbe più appropriato chiamarle spirali esponenziali.

⁵⁹ Da qui il nome di spirali logaritmiche.

⁶⁰ Le spirali logaritmiche godono di numerose proprietà, investigate dal grande matematico Jacob Bernoulli. Fra esse: 1) è una curva congruente a tutte le sue evolute successive; 2) è congruente alla sua antevoluta; 3) se si pone il lume nel suo polo, anche le caustiche di riflessione e di rifrazione sono curve ad essa congruenti. La prima proprietà (auto somiglianza), esprime la congruenza della curva a se stessa a meno di trasformazioni di similitudine ed è così evidenziata da Bernoulli: «Aut, si mavis, quia Curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis et numero eadem, poterit esse vel fortitudinis et constantiae in adversitatibus; vel etiam Carnis nostrae post varias alterationes, et tandem ipsam quoque mortem, ejusdem numero resurrecturae symbolum; adeo quidem, ut si Archimede imitandi hodiernum consuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulto meo juberem incidi cum Epigraphe: *Eadem numero mutata resurgo*». (citazione tratta da Gino Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, vol. II, Milano, Hoepli, 1930, p. 67).

⁶¹ Dal punto di vista meccanico, la spirale di Archimede può pensarsi generata da un punto che si muove a velocità costante lungo una semiretta che contemporaneamente ruota con velocità angolare costante attorno alla sua origine. Nella spirale logaritmica, invece, il punto si

costanti che figurano nell'equazione in forma polare hanno il seguente significato: a è il valore “iniziale” del raggio vettore ρ in corrispondenza di $\theta = 0$; b è invece il fattore di accrescimento della spirale.⁶² Infatti si ha:

$$\rho(\theta+2\pi) = ae^{b(\theta+2\pi)} = a e^{b\theta} e^{2\pi b} = \rho(\theta)e^{2\pi b},$$

da cui si conclude che la distanza radiale fra le spire successive della spirale logaritmica, ad ogni giro, aumenta secondo una progressione geometrica di ragione $e^{2\pi b}$, cioè è costante e uguale a $e^{2\pi b}$ il rapporto fra le distanze dei punti della spirale situati in spire successive e di uguale anomalia (modulo 2π).

La spirale aurea è un particolare tipo di spirale logaritmica, essendo per essa il fattore di accrescimento proprio il numero aureo: $b = \Phi = 1,618...$. Molti oggetti naturali (galassie, disposizione delle foglie negli alberi,

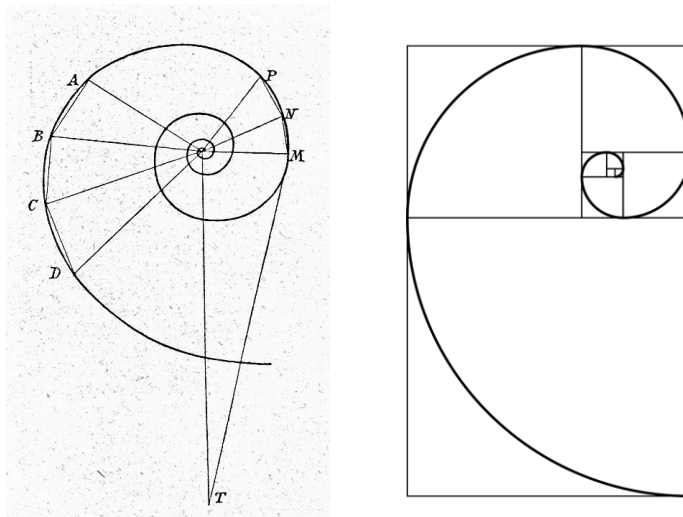


Fig. 25 – A sinistra la costruzione esatta della spirale logaritmica e a destra la costruzione della spirale aurea approssimata da archi di circonferenza.

muove di moto uniformemente accelerato lungo la semiretta. In particolare la velocità del punto lungo la semiretta aumenta proporzionalmente all'angolo di rotazione (quindi anche proporzionalmente al tempo essendo uniforme il moto circolare della semiretta attorno alla sua origine).

⁶² Un'altra proprietà caratteristica delle spirali logaritmiche è l'inclinazione costante rispetto a qualunque retta uscente dal polo, per cui esse sono dette anche “spirali equiangole”. In altri termini, la tangente alla spirale logaritmica, in ogni suo punto, mantiene la stessa inclinazione rispetto alla congiungente il punto con il polo. L'inclinazione della spirale logaritmica è regolata dal fattore di accrescimento “ b ” ed è: $\arctan(1/\ln b)$. Nelle spirali auree tale inclinazione è $\arctan(1/\ln 1,618)$ cioè è determinata dal numero aureo.

conchiglie, ecc..) hanno la forma di spirali auree.⁶³

In figura 25 sono riportate a sinistra la costruzione esatta della spirale logaritmica e a destra la costruzione della spirale aurea approssimata con archi di circonferenza inscritti nei quadrati aventi per lato la dimensione minore di successivi rettangoli aurei.

10 La sezione aurea e la successione di Fibonacci

In stretta connessione con la sezione aurea è la cosiddetta successione di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Leonardo Pisano Bigollo, detto Fibonacci (1175?-1235?), si può ritenere il più grande matematico europeo del Medioevo e oggi è ricordato soprattutto perché, nel XIX secolo, Lucas chiamò con questo nome una successione che si presenta in un problema del suo *Liber Abbaci*.⁶⁴ La prima edizione di questa opera (1202) è andata perduta ma nel 1228 Fibonacci ne elaborò una seconda, di cui sono rimaste tre copie quasi complete, su richiesta del suo maestro, Scottas, astrologo di corte dell'Imperatore Federico II. A tal fine è interessante conoscere l'esistenza di un giornale trimestrale della Fibonacci Association, *The Fibonacci Quarterly*, che ancora oggi si occupa delle rappresentazioni dei numeri di Fibonacci, delle sue proprietà e altro.

Nel XIV capitolo del *Liber Abbaci* Leonardo Pisano (1170-?) propone al lettore un curioso problema la cui domanda finale è: «*Quot paria cuniculorum ex uno pario in uno anno germinentur?*».

Si tratta di risolvere il seguente quesito:

Un allevatore ha una coppia di conigli adulti (maschio e femmina).
Quante coppie di conigli troverà dopo un anno, supponendo che ogni mese una coppia generi una nuova coppia (maschio e femmina) che dal secondo mese di vita diventa produttiva, e che nessun coniglio muoia?

Si può costruire una successione numerica intrigante:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

⁶³ Per quanto detto, è più esatto specificare “spirali auree”.

⁶⁴ La scrittura corretta è *Liber Abbaci* e non come spesso si legge *Liber Abaci*. La traduzione del titolo corretto è *Libro del calcolo* e non *Libro dell'abaco*, facendo riferimento al titolo errato *Liber abaci*. Infatti il libro fu scritto da Leonardo Pisano per far conoscere il nuovo modo di calcolare reso possibile dalla notazione posizionale decimale (indo-arabica) in contrapposizione al vecchio modo di calcolare con l'uso dell'abaco. L'errata traduzione nasce dalla confusione fra i termini *abacus* e *abbacus*: il primo indica l'abaco, mentre il secondo indica l'algoritmo ovvero (come veniva chiamata in quell'epoca) la tecnica di calcolo con le dieci cifre del sistema posizionale indo-arabico (cfr. Keith Devlin, *I numeri magici di Fibonacci*, Milano, BUR Rizzoli, 2013, pp. 21,22. Titolo originale: *The Man of Numbers*).

la cui regola di costruzione è esprimibile mediante il seguente sistema ricorrente:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 1; F_1 = 1 \end{cases}$$

È noto come il termine generico F_n può essere calcolato con l'uso di formule dirette. La prima di esse fu scoperta da Abraham de Moivre (1667 – 1754) ma prende il nome da Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) che la rese nota:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Formula binomiale:

$$F_n = \sum_{k \geq 0} F_{n-k,k} = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k}$$

Il profondo legame fra la sezione aurea e la successione numerica F_n è espresso dal rapporto fra termini consecutivi. Infatti:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803.....$$

$$\frac{F_{n-1}}{F_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803.....$$

e dunque:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n - (-1)^n \varphi^n)$$

Il numero aureo risulta, dunque, il limite all'infinito della successione numerica formata dai successivi rapporti fra due numeri consecutivi della serie di Fibonacci. Già dopo il 14° termine della serie di Fibonacci, tale rapporto si stabilizza su un valore molto prossimo al numero aureo. Per tale motivo la successione di Fibonacci può essere considerata (per termini sempre più grandi) anche una progressione geometrica avente per ragione il numero aureo.

Proponiamo ora una possibile generalizzazione della successione numerica di Fibonacci.

Generalizziamo il sistema alle ricorrenze che definisce la successione numerica di Fibonacci nel seguente sistema, sempre omogeneo a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} H_n = aH_{n-1} + bH_{n-2} \\ H_0 = p, H_1 = q \end{cases}$$

che consente di ottenere una nuova successione i cui termini sono:

$$(H_n) = (p, q, bp + aq, abp + (a^2 + b)q, (a^2b + b^2)p + (a^3 + 2ab)q, \dots)$$

e che oltre al caso particolare di Fibonacci (per $a=1, b=1, p=0, q=1$) presenta altri casi notevoli:

$$\begin{aligned} a=1, b=1, p=2, q=1 & \text{ Numeri di Lucas;} \\ a=2, b=1, p=1, q=1 & \text{ Numeri di Pell;} \\ a=2, b=1, p=2, q=1 & \text{ Numeri di Pell-Lucas;} \\ a=m, b=1, p=0, q=1 & \text{ Numeri di Fibonacci Generalizzati;} \\ a=m, b=1, p=2, q=m & \text{ Numeri di Lucas Generalizzati.} \end{aligned}$$

L'analogo della formula di Binet, dopo opportuni calcoli, è però naturalmente dipendente dai valori particolari che assumono le costanti a, b, p, q . Anzi nella ricerca delle soluzioni - tra le progressioni geometriche - si possono distinguere tre casi a seconda che le radici della equazione polinomiale associata ($h^2 = ah + b$) siano reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate. A noi interessa soltanto il primo caso, che si verifica quando $a^2 + 4b > 0$. In tale situazione la soluzione può essere così espressa:

$$H_n = \left(\frac{p}{2} + \frac{2q - ap}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \right) \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n + \left(\frac{p}{2} - \frac{2q - ap}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \right) \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \right)^n$$

Si evince allora come i rapporti fra termini consecutivi della nuova successione siano ancora una volta convergenti verso valori abbastanza singolari:

$$\frac{H_{n-1}}{H_n} \rightarrow \varphi_{a,b} = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2b} \quad \frac{H_n}{H_{n-1}} \rightarrow \Phi_{a,b} = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} + a}{2}$$

per i quali valgono le identità seguenti:

$$a + b\varphi_{a,b} = \frac{1}{\varphi_{a,b}} \quad a + \frac{b}{\Phi_{a,b}} = \Phi_{a,b}$$

e inoltre:

$$\Phi_{a,b} \cdot \varphi_{a,b} = 1 \qquad \Phi_{a,b} - b\varphi_{a,b} = a$$

la cui verifica è una semplice conseguenza della natura dei due numeri:

$$\Phi_{a,b}, \varphi_{a,b}$$

Ovviamente si può riscrivere la stessa soluzione per H_n in termini di tali rapporti, cioè:

$$H_n = \left(\frac{p}{2} + \frac{2q - ap}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \right) (\Phi_{a,b})^n + \left(\frac{p}{2} - \frac{2q - ap}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \right) (-b\varphi_{a,b})^n$$

Procedendo in modo analogo al caso particolare (cfr. parte prima del presente lavoro) si possono scrivere interessanti formulazioni alternative utilizzando frazioni continue:

$$\varphi_{a,b} = \frac{1}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \dots}}}}$$

$$\Phi_{a,b} = a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \dots}}}}$$

e radici continue:

$$\varphi_{a,b} = \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{a}{b} \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{a}{b} \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{a}{b} \sqrt{\frac{1}{b} - \dots}}}}$$

valida se $a > -\sqrt{b}$

$$\Phi_{a,b} = \sqrt{b + a \sqrt{b + a \sqrt{b + a \sqrt{b + \dots}}}}$$

valida se $a < \sqrt{b}$.

Così si possono considerare i nuovi oggetti, proprio per la strettissima somiglianza delle loro proprietà a quelle della sezione aurea, come una naturale generalizzazione della stessa.

11 Dalla sezione aurea nella musica alla legge universale della bellezza: eco sentimentale della Logica

Il ripetersi in natura di elementi estetici con una certa regolarità ha indotto molti studiosi a credere che essa, nelle sue multiformi espressioni, segua una “legge della bellezza”, la quale, in quanto legge naturale, deve possedere tre attributi: universalità, immutabilità e necessità.

Si è quindi più volte tentato di ottenere per la legge della bellezza una formalizzazione matematica, la quale soltanto può possedere queste tre caratteristiche.

Uno dei primi tentativi – in verità più filosofico che matematico – fu fatto dal filosofo olandese Frans Hemsterhuis (1721-1790) nel secolo XVIII, il quale più che formulare una legge della bellezza ne diede la seguente definizione: «Il bello presenta il massimo numero di idee nel minimo tempo».⁶⁵

Lo svizzero Andreas Speiser (1885-1970) si spinse oltre, associando ai motivi ornamentali dell’architettura classica il concetto matematico di gruppo finito.

Più dettagliato e analitico è stato, invece, il tentativo del matematico statunitense George David Birkhoff (1884 – 1944),⁶⁶ il quale escogitò una formula matematica per misurare la bellezza dei vasi rotondi, giungendo a risultati in accordo con il senso di bellezza che comunemente ispira la vista di questo tipo di vasi. Secondo la sua formula, la bellezza di un vaso rotondo può essere “misurata” con il rapporto tra il suo “ordine” e la sua “complessità”: maggiore è tale rapporto, più il vaso è bello. Birkhoff considera le curve meridiane di un vaso rotondo e, di esse, i punti notevoli che l’occhio umano facilmente rileva: i punti terminali, i punti di flesso, i punti a distanza minima e massima dall’asse di rotazione del vaso, i punti angolosi, i punti in cui la tangente è perpendicolare all’asse: il numero complessivo di tali punti costituisce la “complessità” del vaso. Per “ordine” del vaso, invece, assume il numero di relazioni che intercedono fra le distanze dei punti notevoli misurate nella direzione dell’asse o in quella perpendicolare a questo.⁶⁷

⁶⁵ Enrico Bompiani, *Matematica e arte. Periodico di matematiche*, n. 4-5, ottobre 1974, pp. 53-54.

⁶⁶ Noto soprattutto per quello che oggi viene chiamato “teorema ergodico”. Birkhoff fu uno dei matematici statunitensi più influenti della sua generazione.

⁶⁷ Enrico Bompiani, *Op cit.*

Un'analisi del bello è riscontrabile anche nella musica fin dall'antichità ed è connessa alla presenza in essa della matematica,⁶⁸ come affermava già Pitagora (580/570-495 a. C.). La parola chiave con la quale riassumere la grande intuizione dei pitagorici è "armonia". Essa va filosoficamente intesa in senso etico, matematico e musicale. I pitagorici insegnavano la musica e compresero il nesso tra musica, matematica e geometria. L'armonia è il fulcro del loro pensiero filosofico e si estende perfino ai gesti, alla politica del corpo, all'economia della vita, al modo in cui ci si comporta nei rapporti sociali. Scrive Jean-Philippe Rameau (1683-1764):⁶⁹

La musica è una scienza che deve avere regole certe: queste devono essere estratte da un principio evidente, che non può essere conosciuto senza l'aiuto della matematica. Devo ammettere che, nonostante tutta l'esperienza che ho potuto acquisire con una lunga pratica musicale, è solo con l'aiuto della matematica che le mie idee si sono sistemate, e che la luce ne ha dissipato le oscurità.

Lo stretto rapporto che intercorre tra musica e matematica secondo la Scuola Pitagorica risiede, come è ben noto, nella scoperta delle relazioni fra i differenti toni delle note musicali e le lunghezze della corda vibrante:

Mentre sono risultati esatti i rapporti numerici di Pitagora fra le lunghezze delle corde corrispondenti alle diverse note, non altrettanto esatti sono i rapporti fra i pesi ovvero fra le tensioni applicate ad esse. Per Pitagora, infatti, le frequenze dei suoni sarebbero proporzionali ai pesi, mentre in realtà sono proporzionali alle radici quadrate dei pesi. A noi basta la notizia che già nel VI sec. a. C., da parte di Pitagora o qualcun altro per lui, c'è stato un primo tentativo, in parte riuscito, di comprendere l'esistenza di rapporti numerici fra certe grandezze geometriche e fisiche che caratterizzano le diverse note musicali. È inutile dilungarsi sui particolari di questo errore, che fu posto in evidenza nel 1589 da Vincenzo Galilei, padre di Galileo, nella sua opera *Discorso intorno alle opere di Messer Zarlino da Chioggia*, dove però giunse a una errata relazione fra la frequenza del suono e l'area della sezione della corda. Tale errore, dovuto a un falso ragionamento e alla noncuranza di "interpellare" la Natura, non poteva essere riparato che dal padre del metodo sperimentale, il figlio Galileo, che finalmente nel 1638, nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, enunciò la relazione corretta che lega la frequenza fondamentale del

⁶⁸ Per più dettagliati collegamenti della musica con la matematica e la scienza in generale cfr. Luca Nicotra, *Musica: ragione e sentimento. ArteScienza, Anno III, N. 5*, 2016, pp. 91-138.

⁶⁹ Jean-Philippe Rameau è stato un compositore, clavicembalista, organista e teorico della musica francese. Ricordiamo il suo: *Trattato dell'armonia ridotto ai suoi principi fondamentali* del 1722.

suono emesso da una corda alle caratteristiche fisico-geometriche della corda, che noi oggi esprimiamo sinteticamente con la formula:⁷⁰

La storia narrata da Giamblico a proposito del modo in cui Pitagora, sentendo i suoni emessi dall'incudine di un fabbro, arrivò a stabilire il legame fra i diversi toni delle note emesse da una corda vibrante e la sua lunghezza ha più l'aria di una leggenda che di verità storica. Sembra più verosimile, invece, che Pitagora abbia compiuto degli esperimenti sul monocordo, uno strumento costituito da una sola corda, di cui poteva essere variata la lunghezza della parte vibrante. Tali esperimenti gli fecero concludere, utilizzando termini moderni, che detta "fondamentale" la frequenza della corda intera liberamente vibrante, e considerato il suono da essa emesso (in termini moderni la nota musicale "Do₁"), la stessa corda dimezzata emette un suono di frequenza doppia (in termini moderni la nota "Do₂" della seconda ottava) giudicato da Pitagora consonante con il primo. Inoltre, risultavano a lui "gradevoli" i suoni emessi dalla stessa corda ridotta ai suoi $\frac{3}{4}$ e ai suoi $\frac{2}{3}$, che sono rispettivamente un "Fa" (quarta nota dell'ottava) e un "Sol" (quinta nota dell'ottava). È rimarchevole il fatto che con queste quattro note (Do₁, Fa, Sol, Do₂),⁷¹ scoperte da Pitagora, si è potuto realizzare lo strumento a corda più diffuso e rappresentativo dell'antichità: la lira. Inoltre i numeri 1, 2, 3, 4, che figurano nei rapporti delle lunghezze delle corde che emettono tali note, avevano per i pitagorici un significato particolare: la loro somma, 10, era il loro numero magico!

Ma le questioni dei rapporti tra matematica e musica sono legati anche e misteriosamente alla sezione aurea e ai numeri di Fibonacci. Il musicista ungherese Ernő Lendvai (1925-1993) ha analizzato le opere del famoso compositore ungherese Béla Janos Bartók (1881-1945) basandosi su due sistemi opposti: la sezione aurea e la scala acustica,⁷² mentre altri studiosi di musica rifiutano questa analisi.⁷³

Il compositore e pianista francese Erik Satie (1866-1925)⁷⁴ ha utilizzato il rapporto aureo in molti dei suoi pezzi, tra cui *Sonneries de la Rose + Croix*.

⁷⁰ Luca Nicotra, *Musica: ragione e sentimento*, Op. cit., p. 110.

⁷¹ Che costituiscono la scala diatonica pitagorica.

⁷² Ernő Lendvai, Béla Bartók, *An Analysis of His Music*. London, Ed. Kahn and Averill, 1971.

⁷³ Piotr Sadowski, *The Knight on his quest: symbolic patterns of transition in Sir Gawain and the Green Knight*, University of Delaware Press., 1996, p. 124.

⁷⁴ Satie viene iniziato nell'Ordine Cbalistico dei Rosa+Croce, fondato da Joséphin Péladan e Stanislas de Guaita. In qualità di tesoriere prima e gran sacerdote e quindi di influente membro della confraternita, compone la *Sonneries de la Rose-Croix, les fils des étoiles*. Nel suo slancio mistico, che in quel periodo aveva, Satie crea la sua chiesa, la *Église métropolitaine d'art de Jésus-Conducteur* e lancia anatemi contro i «malfattori che speculano

Tuttavia tutti questi tentativi, pur apprezzabili, erano limitati a formalizzare la bellezza in casi particolari e non avevano quindi la caratteristica della universalità.

Invece, una ricerca sistematica, e a trecentosessanta gradi, di una vera e propria legge della bellezza con i caratteri della universalità, permanenza e necessità è stata compiuta negli anni '70 del secolo scorso dal filosofo siciliano Carmelo Ottaviano (1906-1980),⁷⁵ attraverso un originale approccio filosofico-scientifico, partendo dalla applicazione della sezione aurea alla musica. I risultati dei suoi lunghi anni di studio sull'argomento sono stati raccolti ed esposti, con grandi dettagli di prove fotografiche, in un grosso volume dal titolo *La legge della bellezza come legge universale della natura*.⁷⁶

Ottaviano comincia la sua indagine sul "bello" proprio dalla musica, ritenendola l'arte che «racchiude in sé il segreto della bellezza nella sua espressione più completa e piena»,⁷⁷ essendo più evidente in tale disciplina ciò che può darci una sensazione di godimento estetico e per converso ciò che può darci una sensazione opposta. Per tale motivo analizza in dettaglio l'accordo perfetto maggiore (accordo di terza-quinta-ottava), detto anche "perfettamente consonante" per la sua capacità di produrre una sensazione armoniosa.

Considerando le frequenze delle note di tale accordo riferite a quella del do_1 :

do_1	mi	sol	do_2
1	$1 + 1/4$	$1 + 1/2$	2

Ottaviano nota che gli intervalli formano una progressione addizionale:

intervallo do_1 -mi	intervallo mi-sol	intervallo sol- do_2
$1/4$	$1/4$	$1/2$

sulla corruzione umana». Incredibile che Satiè, da student, non fu molto apprezzato dai professori, dai quali ebbe numerose critiche.

⁷⁵ Considerato uno dei pensatori più originali del Novecento. Docente universitario già a 33 anni, dal 1942 fu ordinario di storia della filosofia a Catania, Napoli e Cagliari. Fu anche docente di paleografia. Nel 1933 a Roma fondò l'importante rivista internazionale «Sophia, rassegna critica di filosofia e storia della filosofia». È autore di numerosi studi sul pensiero medievale, di scritti pedagogici e di notevoli lavori teoretici, molti dei quali di critica all'idealismo, che spiegano la sua posizione defilata rispetto alla filosofia dominante in quell'epoca e ne rilanciano l'importanza nel dibattito culturale attuale.

⁷⁶ Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Padova, Cedam, 1970.

⁷⁷ La seguente parte relativa agli studi di Carmelo Ottaviano sulla sezione aurea e sulla legge universale della natura cui pervenne è ripresa, con qualche leggera modifica, da Luca Nicotra, *La legge della bellezza di Carmelo Ottaviano. Notizie in.. controluce*, nn. 6,7, 8, 9, 10,11, 12 anno 2011.

Infatti, gli intervalli fra le prime tre note sono uguali ($1/4$ e $1/4$), mentre quello relativo alle ultime due risulta essere la somma dei precedenti: $1/2 = 1/4 + 1/4$: quindi costituiscono l'inizio di una progressione addizionale, nella quale, come è noto, ciascun termine è dato dalla somma dei due precedenti, come nella progressione di Fibonacci costruita a partire dalla coppia 1,1: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

Ottaviano applica la stessa analisi ai colori, ricordando l'analogia fra i colori e i suoni già posta in evidenza da Isaac Newton: «...i colori dello spettro visibile si susseguono con gli stessi intervalli o rapporti, con cui si susseguono le note musicali». Espresse in trilioni di vibrazioni al minuto, le frequenze dei colori fondamentali dello spettro luminoso risultano essere:

Porpora	Rosso	Arancio	Giallo	Verde	Azzurro	Violetto	Viola scuro
396	446	495	528	594	660	743	792

che rapportate alla prima danno luogo alla stessa successione di frazioni delle frequenze delle note musicali:

1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$	2
---	-------	-------	-------	-------	-------	--------	---

Preso atto delle numerose analogie fra le note musicali e i colori fondamentali, già rilevate da altri studiosi,⁷⁸ Ottaviano applica ai colori fondamentali la stessa legge di armonia costituita dalla progressione addizionale dell'accordo perfetto maggiore:

Quattro colori sono intonati tra loro quando il quarto di essi differisce dal terzo per il doppio della differenza in frequenza esistente tra il primo e il secondo e tra il secondo e il terzo, uguale essendo la differenza in frequenza tra il primo e il secondo, e tra il secondo e il terzo.⁷⁹

Considera diversi esempi, fra cui la combinazione di colori porpora-arancio-verde-viola scuro la quale corrisponde all'accordo perfetto maggiore do_1 -mi-sol- do_2 . Infatti le frequenze di quei colori (in trilioni di vibrazioni al minuto) sono:

396, 495, 594, 792

e, quindi, riferite alla prima:

⁷⁸ Ottaviano cita in particolare G. Russo, La musica nei colori, in *Bollettino dell'Associazione Ottica Italiana*, n.3, maggio 1932.

⁷⁹ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p.34.

1, $1 + 1/4$, $1 + 1/2$, 2

ovvero gli intervalli seguono la stessa disposizione degli intervalli dell'accordo perfetto maggiore:

$1/4$, $1/4$, $1/2$

Il quartetto di colori porpora-arancio-verde-viola scuro è proprio quello che, con accenti molto poetici, Ottaviano rileva «in uno dei più belli tra i fenomeni della natura, il sorgere dell'aurora, quando il viola scuro o nero del cielo e del mare si tinge tremolando in arancio e si smorza in verde al tocco del raggio purpureo del Sole che sorge, e a mano a mano trionfa delle tenebre».⁸⁰ Proseguendo sulla stessa via, estende la sua ricerca al campo della metrica in poesia, analizzando gli intervalli sillabici dell'«endecasillabo consonante», che comporta l'accento sulla seconda, quarta e decima sillaba, giungendo a risultati analoghi a quelli ottenuti per le note musicali e per i colori. A questo punto Ottaviano si chiede: «Il rapporto armonico è rappresentato da una relazione necessaria parzialmente costante o uniforme tra valori numerici diversi?» Trova una risposta nella sua originalissima analisi filosofica del problema, che lo porta a individuare, in aggiunta ai giudizi analitici e sintetici, un terzo tipo di giudizi che battezza con il termine «sineterico», composto dal greco *sin* (*sýn*) = con ed *eteros* (*šteroj*) = diverso. Mentre nel giudizio analitico il predicato è identico al soggetto («il circolo è rotondo»), nel giudizio sintetico il predicato è diverso dal soggetto («Giovanni è balbuziente»). Il giudizio analitico è necessario e universale, ma è una pura tautologia in quanto afferma l'identità fra soggetto e predicato ($A = A$) ed è quindi infecondo poiché, di conseguenza, il predicato non aggiunge null'altro che non sia già nel soggetto. Il giudizio sintetico, invece, è un giudizio fecondo, perché fornisce «intorno al soggetto una connotazione che non è implicita in esso, e quindi accresce il nostro sapere». Il rapporto fra predicato e soggetto, in esso, non è però necessario e universale. Il fatto di essere Giovanni non implica necessariamente l'essere balbuziente e non tutti i Giovanni sono balbuzienti. Il giudizio sintetico, dunque, è accidentale e contingente. I due tipi di giudizi hanno, pertanto, qualità complementari ma – osserva Ottaviano – «se la scienza umana non disponesse che di questi due tipi di giudizi, sarebbe senz'altro impossibile». Il geniale filosofo siciliano indica proprio nel giudizio sineterico l'unico tipo «con cui la mente umana ragiona, cioè da un lato *pensa concetti e non parole*, e dall'altro *inventa e scopre*

⁸⁰Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p.34.

relazioni o leggi nuove». Il giudizio sineterico, infatti, esprime la «connessione necessaria (*sýn*) nella diversità logica (*šteroj*) tra soggetto e predicato». Oltre ai giudizi sineterici Ottaviano individua anche dei «nessi sineterici». Mentre i primi constano di due membri (soggetto e predicato), i secondi constano di tre o quattro membri fra i quali quindi intercedono due o tre relazioni. I nessi sineterici sono per Ottaviano veri e propri tipi di ragionamento, poiché collegano tra loro giudizi sineterici. Giunge così a una prima conclusione:

Orbene - e questo è il punto che merita particolare attenzione - *la legge che regola i fenomeni del bello, sia naturale che artistico, è proprio una legge di tipo sineterico*, e precisamente della struttura a duplice o a triplice rapporto, e a tre o quattro membri o facce, come abbiamo visto.

L'accordo perfetto maggiore ci rivela infatti un legame necessario tra le quattro note do_1 , mi , sol , do_2 , evidentemente diverse tra loro, legame dal quale nasce un rapporto triplice formalmente, duplice contenutisticamente, negli intervalli $1/4$, $1/4$, $1/2$, e triplice sia formalmente che contenutisticamente nei valori 16, 17, 31 delle frequenze delle vibrazioni secondo il corista normale, tutti e tre diversi tra loro.⁸¹

E trae la seguente conclusione filosofica:

Tutte le espressioni del bello in tutte le arti sono rappresentate da nessi sineterici, quegli stessi nessi cioè con cui la mente umana ragiona e inventa o scopre nell'intero ambito del sapere scientifico.

Il che significa: la bellezza non è che l'espressione della Razionalità o Logicità dal punto di vista del sentimento: per così dire, l'eco sentimentale della Razionalità o Logica.⁸²

L'analisi logico-filosofica-scientifica delle espressioni di bellezza conduce Ottaviano a individuare una legge comune a tutte le arti (scultura, architettura, poesia, pittura) e quindi a connetterla tramite la logica a tutte le discipline dello scibile umano. Infine, dimostra l'universalità della legge trovata mostrandone l'applicabilità, oltre che al mondo delle arti, anche al mondo organico e inorganico, trovando ivi la sua espressione geometrica nella spirale logaritmica aurea, già da tempo, tuttavia, presa come modello matematico della bellezza.

Della spirale aurea Ottaviano considera la costruzione approssimata tramite il rettangolo aureo, già presente in alcuni lavori di Jay Hambidge e di

⁸¹ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, pp. 43-44. I corsivi sono nel testo originale.

⁸² Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 44.

John Crawford Pierce,⁸³ e fa rilevare esplicitamente che essa è costituita di quarti di circonferenza raccordati tangenzialmente e aventi raggi che si incrementano secondo la successione di Fibonacci.

La curva così costituita è da lui assunta come *curva della bellezza*. I successivi rettangoli aurei utilizzati per la sua costruzione sono stati ottenuti ciascuno sommando al precedente rettangolo aureo un quadrato di lato pari al lato maggiore di questo.

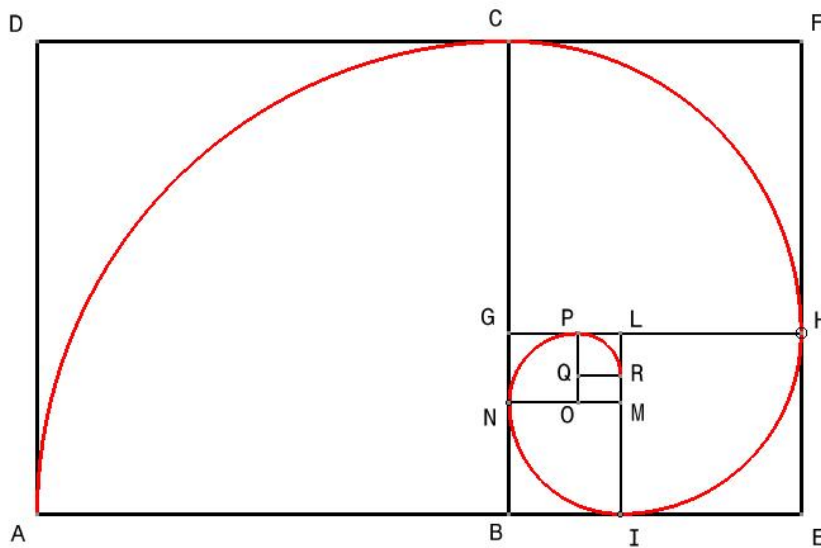


Figura 26 - Costruzione approssimata della spirale aurea con rettangoli aurei.

Per esempio, il rettangolo aureo $Aefd$ (figura 26) è ottenuto sommando al rettangolo aureo $BEFC$ il quadrato $ABCD$ di lato uguale al lato maggiore BC del rettangolo $BEFC$. È facile verificare che ogni arco circolare che compone la spirale ha raggio uguale alla somma dei raggi dei due archi precedenti. Per esempio, l'arco AC ha raggio $BC = BG + GC = LI + GC$ (essendo $BG = LI$) e così via. Inoltre, i raggi degli archi circolari componenti costituiscono una progressione geometrica avente come ragione il numero aureo: infatti il rapporto fra due raggi consecutivi è il rapporto fra i lati consecutivi di un rettangolo aureo. Per esempio, $BC/GH = \Phi$, essendo BC e $BE = GH$ i lati maggiore e minore del rettangolo aureo $BEFC$.

⁸³ Jay Hambidge, *The Elements of Dynamic Symmetry*, New Haven, Yale University Press, 1926. Agli studi dell'Hambidge (oltre che al numero aureo) si riferisce ampiamente Ugo Maraldi in un suo articolo intitolato Il numero della bellezza. *L'Illustrazione del Medico*, gennaio 1954, pp. 22-24; cfr. anche John Crawford Pierce, *The Fibonacci Series*. *Scientific Monthly*, October 1951, pp. 224-228.

Ottaviano, in quanto filosofo, non si accontenta di trovare i nessi causali tra i fenomeni e s'interroga sul perché ultimo di tali nessi: se tutto il mondo organico e inorganico segue una legge della bellezza, perché ciò deve accadere necessariamente?

La progressione addizionale – ovvero la generica successione numerica generata dalla formula di ricorrenza $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ – è per Ottaviano, in ultima analisi, la vera legge matematica della bellezza, nella sua forma aritmetica. Infatti, in tutte le progressioni addizionali – ed è questa una sua scoperta originale⁸⁴ – il rapporto fra un termine e il successivo tende indefinitamente al numero aureo $\varphi = 0,618...$ Ottaviano considera, in aggiunta a quella di Fibonacci, altre sei diverse progressioni addizionali: quella di Hambidge costruita a partire da 1 e 5, e cinque costruite da lui stesso a partire da 1 e 3, 1 e 4, 1 e 6, 1 e 7, 1 e 20. Ottaviano prima costruisce le due progressioni addizionali intermedie fra quella di Fibonacci e quella di Hambidge, poi va oltre quest'ultima costruendo le progressioni a partire da 1 e 6, 1 e 7, quindi intuendo la loro proprietà comune ne sceglie a caso un'altra: quella costruita da 1 e 20. Per tutte verifica che il rapporto fra un termine e il successivo tende al numero aureo 0,618. Quindi generalizza affermando:

La progressione di Fibonacci e la progressione di Schimper-Braun, o della fillotassi, rientrano dal punto di vista algebrico come casi particolari nella “teoria dei limiti”: per qualunque successione, ottenuta partendo da due numeri qualsiasi e sommando successivamente i due elementi precedenti, il limite di un elemento diviso per il successivo coincide con la parte aurea di 1.⁸⁵

E conclude da filosofo:

Ciò non può significare se non questo: tutte le progressioni addizionali sono da considerare come *espressioni successivamente approssimate della relazione designata con il termine di “sezione aurea di un segmento”*.⁸⁶

È questo particolare modo di divisione dell'unità in parti disuguali che costituisce l'essenza della legge della bellezza nella sua espressione aritmetica.

Ma perché la natura, e inconsapevolmente l'uomo nell'uniformarsi a questa legge naturale e quindi universale, fra gli infiniti modi di dividere

⁸⁴ Tuttavia soltanto intuita e verificata per alcuni casi particolari. La dimostrazione matematica rigorosa generale è dovuta invece a Franco Eugeni e Raffaele Mascella, pubblicata per la prima volta nell'articolo *A Note in Generalize Fibonacci Numbers*, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography* v.4, n. 1, 2001, pp. 33-45

⁸⁵ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 123. Per «parte aurea di 1» Ottaviano intende il numero aureo $\varphi = 0.618...$

⁸⁶ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 45. Il corsivo è nel testo originale.

l'intero in parti disuguali sceglie proprio il dividere secondo la "media ed estrema ragione", propria della sezione aurea? Ottaviano trova la ragione di ciò nella conservazione di una simmetria (dinamica) pur nella diversità delle parti, cioè nel ripetersi sempre identico a se stesso del procedimento di divisione:

Questo è l'unico modo razionale secondo cui si possa dividere un segmento in due parti disuguali, essendo un procedimento simmetrico, cioè che si ripete identico a intervalli regolari, pur variando la grandezza degli elementi tra cui esso si pone. Dividendo invece il segmento secondo qualsiasi altro procedimento, si ottiene una varietà di risultati non retti da alcuna simmetria, cioè si ottiene una molteplicità disordinata, caotica.⁸⁷

La sezione aurea appare a Ottaviano il «procedimento obbligato» di divisione dell'unità in parti disuguali, per una duplice «interiore giustificazione logica». In primo luogo per il principio di ragion sufficiente: non esiste un motivo valido per cambiare procedimento e non mantenerlo uniforme nelle successive divisioni delle parti. Inoltre, per il principio economico del massimo rendimento: con esso si «ottiene il massimo risultato, la molteplicità simmetrica invece di quella asimmetrica, con il minimo mezzo».⁸⁸

Ma se la regolarità spaziale della divisione dinamica in parti disuguali della sezione aurea (il rapporto fra le parti rimane infatti lo stesso pur variando le dimensioni delle parti) rende conto della bellezza nelle opere dell'uomo e, in natura, nel mondo inorganico, v'è un'altra ragione ancora che ne giustifica l'«obbligato» uso da parte della natura negli esseri viventi. È la dinamica stessa dell'accrescimento – caratteristico dello sviluppo di un essere vivente – che «richiede una legge della crescita o sviluppo del vivente stesso (il vivente è tale in quanto cresce), e se la crescita suppone un rapporto di parti disuguali, cioè un procedimento per divisione in parti disuguali, quale divisione in parti disuguali la natura potrebbe scegliere, se non quella che si impone per una ragione logica o necessaria, cioè la divisione in media ed estrema ragione, ossia il rapporto che nasce dal procedimento addizionale?»⁸⁹

Dunque la sezione aurea e le progressioni addizionali, che ad essa conducono come limite dei rapporti fra termini successivi, sono certamente la base dell'armonia, ma in ultima analisi sono soprattutto finalizzate a permettere la vita. E così come per il fisico teorico Paul Dirac la bellezza porta alla verità, per Ottaviano la bellezza porta alla vita:

⁸⁷ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 44.

⁸⁸ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 46.

⁸⁹ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 147.

Infine, in quanto legge dello sviluppo della natura vivente, il rapporto della serie addizionale mostra di essere un rapporto finalizzato, ossia ordinato a sviluppare la vita, in altri termini a diffondere la vita. Ciò significa che lo sviluppo della vita nasce dalla ragione stessa, in quanto lo stesso ritmo di questa (il giudizio sineterico) comanda il ritmo di quella (il procedimento addizionale).

Non è quindi dubbio che la Bellezza rappresenti la condizione ideale della Vita, il maggiore possibile trionfo della Vita sulla Morte.⁹⁰

Ottaviano, tramite diverse centinaia di fotografie di soggetti vari,⁹¹ fornisce la dimostrazione dell'applicabilità della *curva della bellezza* a tutti gli enti naturali, viventi e non-viventi: piante, fiori, pesci, insetti, uccelli, rettili, mammiferi, lo scheletro, gli organi del corpo umano e animale, onde, cascate, correnti marine, coste, scogli, banchi coralliferi, nubi, eruzioni della corona solare, macchie solari, testa delle comete, aurore boreali, l'occhio dei cicloni e degli uragani, microrganismi e galassie. Sovrapponendo la spirale aurea con le immagini di numerosi esempi di tali categorie di enti ritenuti belli, Ottaviano avvalorava il suo asserto secondo il quale le loro forme sono delineate da tratti di quella spirale e mostra come, al contrario, le forme di oggetti o esseri viventi giudicati brutti o malati devino da essa (figure 27-37).

Risulta difficilmente spiegabile come pura coincidenza questo ampio e multiforme richiamo alla sezione aurea, alla progressione di Fibonacci e alla spirale aurea, non tanto nell'opera dell'uomo quanto piuttosto in natura.

Insomma, si ripresenta, anche in questo caso, l'insoluta questione di quanto della verità matematica è in noi e quanta è fuori di noi. Dilemma che riguarda il fisico più che il matematico – che a differenza del primo può ritenersi soddisfatto della sua costruzione, anche se non corrispondente alla realtà fisica, purché logicamente corretta – e tanta meraviglia suscitava in Albert Einstein: «La matematica non smetterà mai di stupirmi: un prodotto della libera immaginazione umana che corrisponde esattamente alla realtà».

Il sommo Galilei, invece, nella sua opera *Il saggiaiore* non mostra a tal riguardo alcun dubbio: la matematica è nella natura:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo) che «è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto».⁹²

⁹⁰ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 148.

⁹¹ Carmelo Ottaviano, *Op. cit.* "Appendice figure".

⁹² Galileo Galilei, *Il Saggiaiore*, VI, 232 .

Concetto ripetuto in tempi più recenti dal grande fisico-matematico Richard Feynman (1918-1988):

A quelli che non conoscono la matematica è difficile percepire come una sensazione reale la bellezza, la profonda bellezza della natura ... Se volete conoscere la natura, apprezzarla, è necessario comprendere il linguaggio che essa parla.⁹³

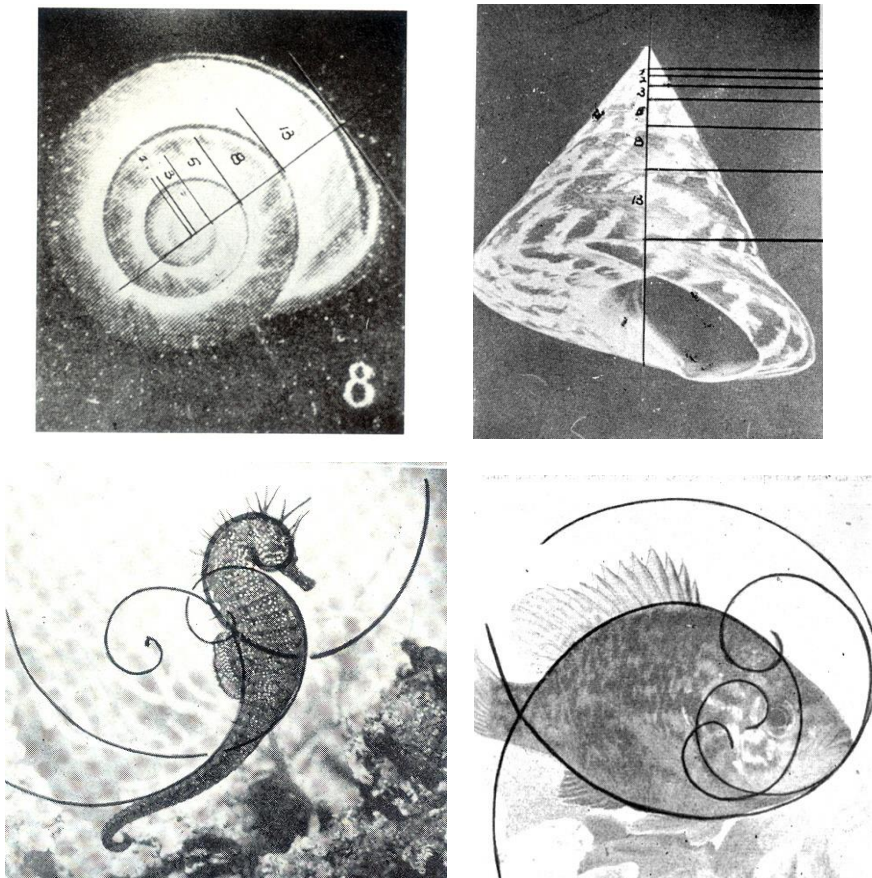


Figure 27, 28, 29, 30 – Da Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Padova, Cedam, 1960 fig. 21, fig. 34, fig. 225, fig. 215.

⁹³ Richard Feynman, *The Character of Physical Law*.

Is the Golden Section a Key for Understanding Beauty? Part II

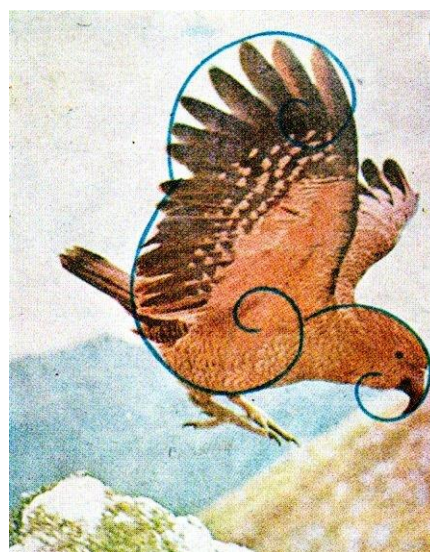
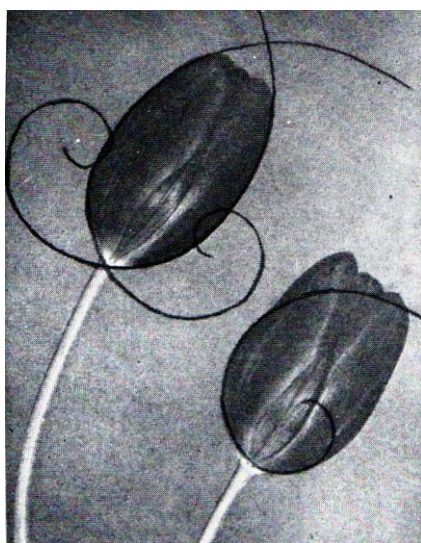
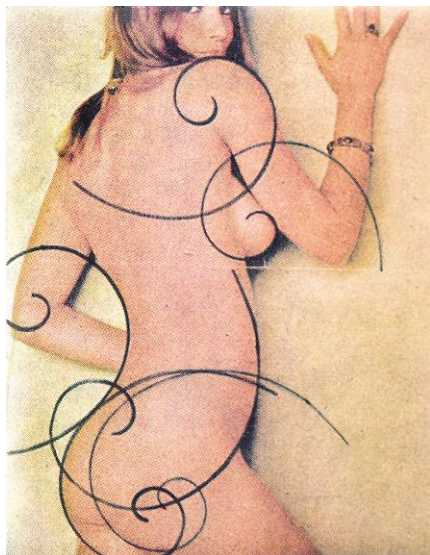


Figure 31, 32, 33, 34 – Da Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Padova, Cedam, 1960, fig. 588, fig. 439, fig. 178, fig. 250.

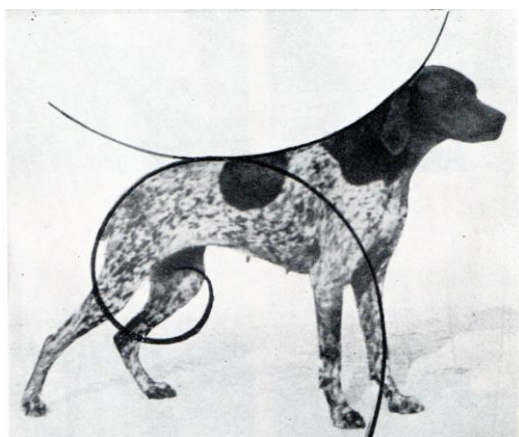
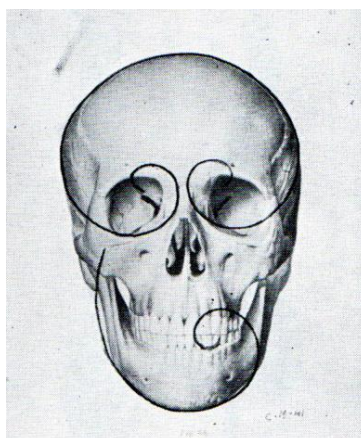
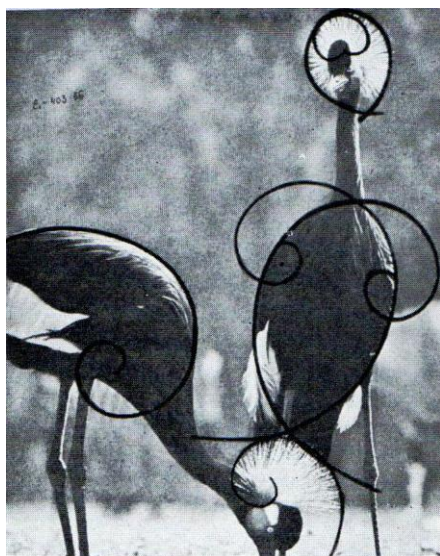


Figure 35, 36, 37 – Da Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Padova, Cedam, 1960, fig. 255, fig 314, fig. 293.

Bibliografia

Berardi L., Beutelspacher A. (1990). Il pentagono regolare e la sezione aurea. *Periodico di Matematiche. Serie VI, Vol. 66, N. 1*, Roma.

Bompiani E. (1974). Matematica e arte. *Periodico di matematiche*, n. 4-5, ottobre 1974, pp. 53-54.

Crawford Pierce J. C. (1951). The Fibonacci Series. *Scientific Montly, October 1951*, pp. 224-228.

Devlin K. (2013). *I numeri magici di Fibonacci*, Milano, BUR Rizzoli, 2013, pp. 21, 22. Titolo originale: *The Man of Numbers*.

Enriques F., Amaldi U. (1963). *Elementi di geometria, Parte Seconda*. Bologna, Zanichelli, p. 195.

Eugeni F., Mascella R. (2001). A Note in Generalize Fibonacci Numbers. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography* v.4, n.1, pp. 33-45.

Feynman R. P. (1965). *The Character of Physical Law*. Modern Library.

Galilei G. (1623). *Il Saggiatore*, VI, 232 .

Goeringer A. (1911). *Der Goldene Schnitt*, Paperback .

Hambidge J. (1926). *The Elements of Dynamic Symmetry*, New Haven, Yale University Press.

Lendvai E., Bartók B. (1971). *An Analysis of His Music*. London, Ed. Kahn and Averill.

Loria G. (1930). *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, vol. II, Milano, Hoepli.

Maraldi U. (1954). Il numero della bellezza. *L'Illustrazione del Medico*, gennaio 1954, pp. 22-24.

Nicotra L. (2011). La legge della bellezza di Carmelo Ottaviano. *Notizie in...controluce*, nn. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Nicotra L. (2016). Musica: ragione e sentimento. *ArteScienza, Anno III, N. 5*, pp. 91-138.

Nicotra L. (2017). *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*. Convegno "Matematica, Natura, Architettura", 17 novembre 2017, Mathesis-Dipartimento di Architettura, Napoli.

Ottaviano C. (1970). *La legge della bellezza come legge universale della natura*. Pavia, Cedam.

Russo G. (1932). La musica nei colori. *Bollettino dell'Associazione Ottica Italiana*, n.3, maggio 1932.

Sadowski P. (1996). *The Knight on his quest: symbolic patterns of transition in Sir Gawain and the Green Knight*, University of Delaware Press., p. 124.

Mathematics, Arts and Literature (Matematica, Arte e Letteratura)

Ferdinando Casolaro¹ e Giovanna Della
Vecchia²

Received: 30-11-2018. Accepted: 25-12-2018. Published: 31-12-2018

doi:10.23756/sp.v6i2.433

©Casolaro e Della Vecchia



Abstract

This work, in continuity with the article published by Ferdinando Casolaro and Giovanna Della Vecchia in Vol 5 (2), 2017 of this series, in which we noted that in the centuries since the eight century B.C. at the 13th century A.D. the evolution of Astronomy and historical events have influenced the development of Mathematics, intends to demonstrate how the Architecture and Literature of the following centuries have further conditioned the development of the sciences in Italy and, in particular, of Mathematics, identifying the affinities and, in some cases, the coincidences between the different forms of thought that invite us to make a serious reflection on the uniqueness of culture.

Keywords: Mathematics, Architecture, Literature

Sunto

Il presente lavoro, in continuità con l'articolo pubblicato da Ferdinando Casolaro e Giovanna Della Vecchia nel Vol 5 (2), 2017 di questa collana, nel quale si metteva in evidenza come nei secoli dall'VIII a.C. al XIII d.C. l'evoluzione dell'Astronomia e gli eventi storici abbiano influenzato lo sviluppo della Matematica, intende sinteticamente dimostrare come l'Architettura e la Letteratura dei secoli successivi abbiano ulteriormente condizionato lo sviluppo delle scienze in Italia e, in particolare, della Matematica cogliendo le

¹ Dipartimento di Architettura Università "Federico II" di Napoli, ferdinando.casolaro@unina.it.

² I.I.S. "G. Minzoni" Giugliano in Campania, giovanna.dellavecchia@gmail.com.

affinità e, in qualche caso, le coincidenze tra le diverse forme di pensiero che ci invitano a fare una seria riflessione sull'unicità della cultura.

Parole chiave: Matematica, Architettura, Letteratura

1. Introduzione

Un'analisi corretta delle questioni storico-epistemologiche che hanno contribuito allo sviluppo dell'evoluzione scientifica che ha caratterizzato gli ultimi tre secoli, dalla rivoluzione industriale del periodo dell'illuminismo ad oggi, non può prescindere dai risultati ottenuti nell'arte e nella Geometria nei secoli dal XIV al XIX con la Prospettiva del periodo pre-Rinascimentale e la Geometria Proiettiva e Descrittiva (Kline, 1991).

E, attraverso i secoli, anche la letteratura ha sentito fortemente l'influenza dei cambiamenti del mondo legati allo sviluppo della Scienza e, in particolare, della Matematica, come si evince dagli scritti di alcuni tra i maggiori letterati italiani: nell'ultimo paragrafo ci limiteremo, per brevità, a citarne chiari riferimenti nella produzione di due tra i maggiori esponenti della cultura italiana dei secoli XIX e XX.

2. La Matematica nell'arte

Già nei secoli XII e XIII l'Architettura, nell'individuare e perseguire i canoni dell'estetica, aveva mostrato un forte interesse per la Matematica e, in particolare per la Geometria. L'*Architettura gotica* promuoveva un principio di rappresentazione più rigorosamente razionale rispetto al passato: *il problema principale era quello di ottenere la massima luminosità possibile e la massima ampiezza degli ambienti con il minimo ingombro delle masse murarie e delle strutture*. Precedentemente, nell'XI sec., anche i costruttori dell'Île di France avevano pensato di eliminare progressivamente dagli edifici delle chiese ogni massa inerte, che risaliva all'arte romanica, per adottare l'arco acuto che permette di attenuare le spinte laterali. Con l'architettura gotica si accentuava maggiormente il verticalismo e lo spazio si configurava in forma indefinita, in modo da offrire, attraverso la complessità delle piante a più navate con cappelle radicali, *prospettive sempre più mutevoli* sotto la varia azione della luce, spesso filtrante attraverso le vetrate colorate. Quindi la cattedrale gotica, intorno alla quale fiorirono generazioni di costruttori e decoratori, risultò un edificio estremamente logico nel quale sono in rilievo tutte le parti aventi reale funzione statica, quasi un fascio di forze senza materie inerte. Carattere gotico ebbero le abbazie di Fossanova (*foto1 e 2*) e di Casamari (*foto3 e 4*), la chiesa

dei Servi a Bologna (*foto5*) e la Basilica di San Francesco d'Assisi (*foto6*) (Casolaro, 2003).



Foto1- Abbazia di Fossanova*



Foto2- Interno Abbazia di Fossanova*



Foto3- Abbazia di Casamari*



Foto4- Interno Abbazia di Casamari*



Foto5- Basilica S. Maria dei Servi*



Foto6- Basilica S. Francesco di Assisi*

Un passo significativo verso il superamento della concezione medioevale si riscontra nelle opere di *Giotto* (Colle di Vespignano, 1266 - Firenze, 1337), di *Duccio di Buoninsegna* (di cui si ignora l'anno di nascita, ma dalle sue opere si evince il periodo di lavoro, a Siena, tra il 1278 ed il 1318 circa) e, qualche decennio più tardi, nelle opere di *Ambrogio Lorenzetti* (si ignora la nascita, ma si pensa che sia morto a Firenze o a Siena durante la peste del 1348), in cui è evidente *la ricerca per definire lo spazio contenente i vari elementi della rappresentazione* (Loria, 1909).

Ma l'adozione di un preciso metodo di *PROSPETTIVA LINEARE GEOMETRICA* risale all'inizio del 1400 con il fiorentino *Filippo Brunelleschi*. (Firenze, 1377-1446), che per primo fissò le norme della *Prospettiva* ed aprì un'era nuova che segnava l'inizio dell'età del Rinascimento.

Sulla stessa linea si esprime *Leon Battista Alberti* (Genova 1404 circa - 1472) che dedicò al Brunelleschi il trattato "*De pictura*" in cui si legge che *nell'arte fiorentina di quegli anni si intravedeva già il superamento delle opere dell'antichità*. Il suo pensiero si basa sulla concezione della Prospettiva brunelleschiana che l'Alberti ripropone in modo più chiaro e preciso, sfruttando le conoscenze sia matematiche che umanistiche: ciò si riscontra in maniera ancora più evidente nella grande opera architettonica "*Il Tempio malatestiano di Rimini*" (*foto7 e 8*) in cui si intravede per la prima volta l'applicazione della *similitudine* in un'opera d'arte (Casolaro, Cirillo, 1996).



Foto7*- Interno Tempio malatestiano di Rimini



Foto8*- Tempio malatestiano

A differenza del Brunelleschi che seguiva passo passo le opere da lui progettate, l'Alberti, convinto che l'architetto non avesse un compito artigianale, affidava ad altri la realizzazione dei suoi disegni e dei suoi progetti creando una distinzione tra teorico e pratico, tra pensiero e tecnologia.

Leon Battista Alberti diffuse, tra i pittori del proprio tempo, anche il procedimento (forse già noto agli antichi egiziani) di utilizzare un reticolato a maglie quadrate per riprodurre in altra scala un dato disegno; è un procedimento fondato sul concetto di similitudine ed in cui si può individuare

un primo approccio alla geometria analitica ed alla geometria proiettiva che si svilupperà due secoli più tardi.

L'ingegno e la cultura dell'Alberti si manifestano anche nelle opere letterarie e pedagogiche; egli si può definire *il letterato dell'arte del XV secolo*, quasi in contrapposizione ad un altro grande artista dello stesso periodo, *Piero della Francesca (Arezzo, 1415 circa - 1492)*, che rappresenta invece *il matematico dell'arte del XV secolo*, tanto che Giorgio Vasari (1511-1574) nelle *"Vite dei più eccellenti scultori, pittori ed architettori"*, scrive che *"Piero non si ritrasse mai dalle matematiche nelle quali era stato tenuto maestro raro, tanto che i libri meritatamente gli hanno acquistato nome del miglior geometra che fusse nei tempi suoi"*

Tra questi eminenti pittori-geometri italiani emerge senza ombra di dubbio *Leonardo da Vinci (Firenze, 1452-1519)* anch'egli fedele all'idea che la pittura debba avere un fondamento scientifico. Nel capitolo VII del suo *"Trattato sulla pittura"* (foto 9 e 10) così si esprime: quelli che si innamorano della pratica senza la diligenza (la scienza) sono come i nocchieri che entrano in mare sopra nave senza timone o bussola, che mai non hanno certezza dove si vadino (Cundari, 1992).

Secondo il Vasari, Piero della Francesca e Leonardo da Vinci erano due personalità antitetiche: da un lato un Leonardo tanto "mirabile e celeste" quanto "vario ed instabile" che passa dagli affreschi agli specchi, dalle macchine all'anatomia; dall'altra invece un Piero razionale, sistematico, che costruisce teorema dopo teorema, problema dopo problema, i molti libri scritti con uno stile molto vicino a quello di Euclide.

L'interesse per la geometria proiettiva si diffondeva anche in altri paesi europei, in particolare in Francia.

Ed è proprio in Francia che, alcuni decenni dopo, si delineavano nuovi orizzonti per la Geometria. E' unanimemente considerato il padre del metodo generale per la *geometria descrittiva* (ed il precursore della *geometria proiettiva*) il matematico francese *Girard Desargues (1591-1661)* che, facendo uso del *metodo delle coordinate* nel periodo in cui si stava sviluppando la *geometria analitica* ad opera di *Renè Descartes (1596-1650)* e di *Pierre de Fermat (1601-1675)*, suggeriva un nuovo metodo di costruzione che rappresenta analiticamente il concetto di *assonometria* (Casolaro, 1992).

Nel 1639 il Desargues inaugurava il *Metodo delle proiezioni centrali* introducendo per la prima volta il concetto di *punto all'infinito* e gettando le basi per lo sviluppo della *geometria proiettiva*, *quella disciplina che studia le proprietà delle figure che non si alterano per proiezione e sezione*.

Ed è nella *geometria proiettiva* che è messa in risalto l'importanza dei *punti all'infinito* e l'analogia tra *punti* e *rette* espressa dal *principio di dualità*.

La geometria proiettiva ebbe un notevole sviluppo nel secolo successivo prima con *Gaspard Monge (1746-1818)* quindi col suo allievo, *Jean-Victor Poncelet (1788-1867)*, per trovare la sua rigorizzazione nel 1872 nel *"Il*

programma di Erlangen” di Felix Klein (1849-1925), il quale, nominato professore ordinario all’Università di Erlangen, pubblicò il suo “Program” in cui considerava le proprietà geometriche delle figure rispetto a gruppi di trasformazioni, favorendo l’applicazione della “Teoria dei gruppi” (nella sistemazione data poi da Jordan) alle teorie geometriche (Casolaro, 1993).



Foto9*

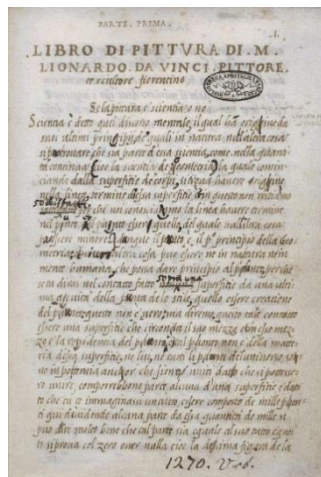


Foto10*

3. ... e nella Letteratura

I secoli XVIII e XIX rappresentano il periodo in cui la Matematica è stata completamente al centro della cultura.

A parte l’interesse dei filosofi intorno ai concetti di *infinito* e di *infinitesimo* che hanno condotto Leibnitz e Newton allo sviluppo del calcolo infinitesimale, sono stati indubbiamente i risultati dei grandi matematici a dare un contributo fondamentale alle grandi rivoluzioni che hanno ridisegnato la storia dell’umanità (prima fra tutte la *rivoluzione industriale*). Nel corso degli ultimi tre secoli particolarmente sensibili al fascino esercitato dalla Matematica risultano altresì poeti e narratori che, nelle loro opere, hanno più volte sottolineato il valore del pensiero matematico quale fonte di ispirazione e creatività e la funzione della Matematica nell’attività linguistica e nell’elaborazione del linguaggio.

Ripercorrere tutte le tappe del dialogo e delle interazioni tra le “due culture” sarebbe impresa ardua e riaprirebbe un dibattito mai concluso: noi vogliamo citare tra tutti Giacomo Leopardi che nella sua prima grande opera “*La storia dell’Astronomia*”, scritta all’età di quindici anni, fa una carrellata dei matematici e degli scienziati vissuti dal periodo ellenico all’inizio del XIX secolo, sottolineando il rapporto complesso ma profondo esistente tra scienza e arte, due modalità diverse di interpretare il mondo. La loro reciproca

contaminazione contribuisce a creare “visioni del mondo” differenti ma a rendere unica la cultura umana.

Il Leopardi pone un problema ancora attuale: *la comunicazione della matematica in modo da renderla non difficile ed alla portata di tutti*. Nello "Zibaldone" egli esprime il desiderio di una maggiore conoscenza e padronanza della Matematica e manifesta *il rammarico di non aver avuto bravi maestri in grado di far apprendere una disciplina così "severa"*.

Molti secoli prima anche Dante aveva trovato entusiasmo ed interesse allo studio della Matematica attraverso la logica: ma Dante era vissuto (oltre che nella grande Firenze) nel periodo dei *maestri d'abaco* (i cosiddetti "*mediocri*"), studiosi che organizzavano e legavano, in un unico processo logico, i risultati degli altri mentre Leopardi era vissuto nel XIX secolo (nella piccola Recanati), nel periodo dei grandi geni matematici (Gauss, Riemann, Lobachevskij, Weierstrass, Cauchy, Abel, Galois...) che operavano solo nell'ambito della propria disciplina con l'obiettivo del risultato e non avevano alcun interesse a trasmettere le proprie conoscenze agli altri. Certamente i matematici dell'epoca dibattevano tra loro, ma sempre su argomenti specifici.

Ed è per questo motivo che, intorno all'età di diciassette anni, il Leopardi si allontana dallo studio della Matematica, pur essendo convinto della grossa funzione che essa ha nella formazione dell'individuo. Nello Zibaldone così si esprime: *"La pratica delle matematiche, del loro modo di procedere e di giungere alle conseguenze, del loro linguaggio... aiuta infinitamente le facoltà intellettive e ragionatrici dell'uomo, compendia le operazioni del suo intelletto, lo rende più pronto a concepire, più veloce e spedito nell'arrivare alla conclusione dei suoi pensieri e dell'intero suo discorso; insomma, per una parte assuefà, per l'altra facilita all'uomo l'uso della ragione!"*

Ma è nelle *Lezioni americane* di Italo Calvino che le forti affinità semiotiche tra le due diverse forme di cultura si fondano al punto da fare affermare, oltre venti anni dopo la loro stesura, a Gabriele Lolli, docente di filosofia della Matematica presso l'Università di Pisa, che *"Le lezioni americane di Italo Calvino si possono leggere come una parabola della Matematica. Il matematico che legge il Calvino teorico della letteratura di queste Lezioni non può fare a meno di sentire che de te loquitur"* (Lolli, 2011).

Certamente la stretta affinità, quasi coincidenza, tra l'atteggiamento scientifico e quello poetico di Calvino si evidenzia nel continuo ricorso nella propria scrittura a strutture logiche, matematiche, combinatorie e si accentua negli anni grazie anche all'amicizia con Raymond Queneau e Georges Perec e alla frequentazione dell'OULIPO, il prestigioso circolo parigino di cui fu l'unico membro italiano:

“Seguendo il Discorso (calviniano) appaiono coincidere non solo l’atteggiamento, ma anche, nel caso della Matematica, le modalità del processo creativo e le qualità del prodotto finale.”

Le Lezioni sono un racconto filosofico sulla Matematica. Un racconto che, grazie alla raffinatezza di Calvino, trasmette alla Matematica tutta la bellezza e il fascino della letteratura” (Lolli, 2011).

Nel libro *Matematica. Stupore e poesia* Bruno D’Amore, uno dei maggiori fautori dell’unificazione delle 2 culture, affianca la definizione di insieme infinito, resa in versi, alla celeberrima *Ed è subito sera* di Salvatore Quasimodo

Ognuno sta solo sul cuor della terra
trafitto da un raggio di sole:
ed è subito sera

Un insieme si dice infinito quando
si può mettere in corrispondenza biunivoca
con una sua parte propria

“Per millenni gli esseri umani hanno cercato una definizione del concetto di infinito. Una intuizione di Galileo Galilei prima e una consapevolezza di George Cantor poi hanno spinto Richard Dedekind ad esprimere la precedente definizione, elegante e densissima di significato, 2500 anni di storia riassunti in poche parole; ma la loro densità semantica è per lo meno pari a quella di Quasimodo” (D’Amore, 2009).

4. Conclusioni

Le due grandi rivoluzioni scientifiche che hanno caratterizzato il XX secolo, la meccanica quantistica e la Teoria della Relatività, hanno radicalmente modificato la concezione di interpretare l’Universo. In particolare, la teoria della relatività ha modificato il concetto di spazio mettendo in evidenza che non ha senso, dal punto di vista fisico, l’ammissione dell’esistenza dello spazio in assenza di fenomeni osservabili, per cui non esiste lo spazio assoluto ma esiste uno spazio le cui proprietà sono relative allo stato di moto dei corpi.

E’ evidente che tale congettura, associata all’indeterminismo che emerge dalla meccanica quantistica, ha avuto ed ha risvolti notevoli nello sviluppo anche della Letteratura e delle altre Scienze.

Alla luce delle riflessioni fatte che meriterebbero un approfondimento difficilmente esauribile in questo contesto, siamo fermamente convinti che negare il dialogo e le interazioni esistenti tra cultura umanistica e cultura scientifica a favore di una contrapposizione netta, appare oggi un dibattito non solo sterile e artificioso ma in grado di generare effetti negativi sul piano educativo.

Bibliografia

- F. Casolaro - L. Cirillo (1996), “Le trasformazioni omologiche” - Atti del Congresso Nazionale Mathesis: “I fondamenti della matematica per la sua didattica e nei suoi legami con la scienza contemporanea” - Verona, 1996.
- F. Casolaro (1992), “Il Programma di Erlangen e le Trasformazioni geometriche”. *Disegno e Matematica: Proposte per una didattica finalizzata all’uso delle nuove tecnologie*; pag.101-103; 220-231.
- F. Casolaro, (1992), “Proiettività tra piani. Legge di dualità. Omografia ed omologia”. *Disegno e Matematica: Proposte per una didattica finalizzata all’uso delle nuove tecnologie*; pag. 104 -118.
- F. Casolaro (2003), “Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica”. Convegno internazionale "Arte e Matematica" - Vasto, 10-12 aprile 2003.
- C. Cundari (1992), Atti del corso “Disegno e Matematica: Proposte per una didattica finalizzata all’uso delle nuove tecnologie”, a cura di Cesare Cundari: Sorrento, 11-15 dicembre 1990; Roma, 6-10 maggio, 8-12 dicembre 1991 - M. P. I. e Dipartimento di Rappresentazione e Rilievo della Facoltà di Ingegneria dell’Università “La Sapienza” di Roma
- B. D’Amore (2009) “Matematica. Stupore e poesia”- Firenze, Giunti 2009
- M. Kline (1991), “Storia del pensiero matematico” - Einaudi Editori.
- G. Lolli (2011), “Discorso sulla Matematica. Una rilettura delle Lezioni americane di Italo Calvino” - Bollati Boringhieri, Torino 2011
- G. Loria (1909), “Storia della Geometria Descrittiva: dalle origini sino ai nostri giorni”. Hoepli Editore - Milano 1921.

*** Fonti delle immagini**

Foto1 [https://it.wikipedia.org/wiki/Abbazia di Fossanova](https://it.wikipedia.org/wiki/Abbazia_di_Fossanova)

Foto2 [https://it.wikipedia.org/wiki/Abbazia di Fossanova](https://it.wikipedia.org/wiki/Abbazia_di_Fossanova)

Foto3 [https://it.wikipedia.org/wiki/Abbazia di Casamari](https://it.wikipedia.org/wiki/Abbazia_di_Casamari)

Foto4 <http://www.assostato.it/abbazia-di-casamari/>

Foto5 [https://it.wikipedia.org/wiki/Basilica di Santa Maria dei Servi](https://it.wikipedia.org/wiki/Basilica_di_Santa_Maria_dei_Servi)

Foto6 <https://www.goticomania.it/gotico-italiano/basilica-di-s-francesco-ad-assisi.html>

Foto7 http://teatriemusei.ouest.com/it/tempio_malatestiano.php

Foto8 [https://it.wikipedia.org/wiki/Tempio Malatestiano](https://it.wikipedia.org/wiki/Tempio_Malatestiano)

Foto9 [https://it.wikipedia.org/wiki/Trattato della pittura](https://it.wikipedia.org/wiki/Trattato_della_pittura)

Foto10 [https://it.wikipedia.org/wiki/Trattato della pittura](https://it.wikipedia.org/wiki/Trattato_della_pittura)

Art Gallery Theorems (Teoremi della Galleria d'Arte)

Luigi Togliani*

Received: 30-09-2018. Accepted: 25-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.440

©Luigi Togliani



Abstract

Some important results about art gallery theorems are proposed, starting from Chvátal's essay, using also polygon triangulations and orthogonal polygons.

Keywords: art gallery; polygon triangulations; orthogonal polygon.

Sunto

Sono proposti alcuni importanti risultati sui teoremi della galleria d'arte, a partire dal contributo di Chvátal, usando anche triangolazioni di poligoni e poligoni ortogonali.

Parole chiave: galleria d'arte; triangolazioni di poligoni; poligoni ortogonali.

1 Introduzione

Quanti guardiani posti in posizioni fisse sono necessari per sorvegliare una galleria d'arte? Questo curioso problema fu posto dal matematico statunitense Victor Klee (1925-2007) durante un simposio a Stanford nel 1973 (O'Rourke,

* Liceo Scientifico "Belfiore", Mantova (Italy); luigi.togliani@gmail.com.

1987). Il problema si riferisce a guardiani che, stando in un punto fisso della galleria, siano in grado di sorvegliarla guardando a 360° , cioè in tutte le direzioni. Una questione equivalente è quella di chiedersi quante lampadine o videocamere è necessario posizionare per illuminare o controllare completamente una galleria d'arte.

2 Galleria d'Arte: il Teorema di Chvátal

Rappresentiamo la galleria d'arte come un poligono P piano e semplice (cioè tale che due suoi lati possano avere in comune al più un punto di P ; in tal caso il punto comune sarà un vertice di P). Il poligono P è costituito dal suo contorno (o frontiera) e dai suoi punti interni. Si dice che un punto A di P è *visibile* da un punto B di P se il segmento $[AB]$ è incluso in P . Un insieme di punti (detti *guardiani*, *watchmen*) di P *copre* P se ogni punto di P è visibile da almeno un guardiano. Il minimo numero di guardiani necessari per coprire il poligono P dipende dal numero n di lati di P , ma non solo (figura 1).

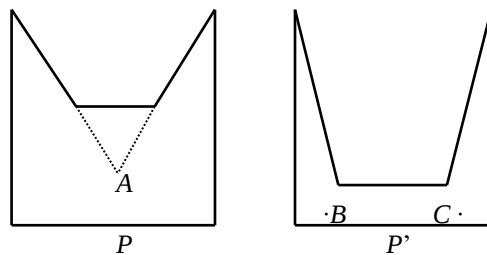


Figura 1. Il guardiano A copre P ; B non copre P' ; C non copre P' .

Si può provare che un guardiano basta per coprire un qualunque poligono convesso; un guardiano basta anche per coprire un quadrilatero o un pentagono, anche se sono concavi, o un poligono stellato (figura 2).

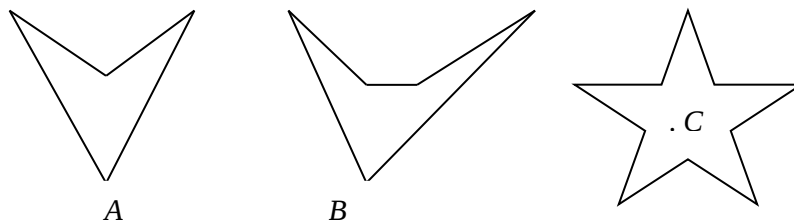


Figura 2. I guardiani posti in A , B e C coprono i rispettivi poligoni.

Ma per coprire un esagono possono essere necessari due guardiani: in figura 1 l'esagono P è coperto dal solo guardiano A , mentre l'esagono P' necessita di due guardiani, per esempio B e C .

Se n è multiplo di 3, un poligono di n lati (o n -agono) può avere la forma di un *pettine* (di Chvátal) con $n/3$ *denti*; esso presenta $2(n/3-1)$ angoli interni concavi, raggruppati a due a due; i gruppi di due angoli concavi sono intercalati da un angolo convesso (dente) o, in un solo caso, da 4 angoli convessi, due dei quali sono denti del poligono. Si nota che sono necessari $n/3$ guardiani per coprire un pettine con $n/3$ denti: in figura 3 il 18-agono, pettine con 6 denti, è coperto dai 6 guardiani A, B, C, D, E e F .

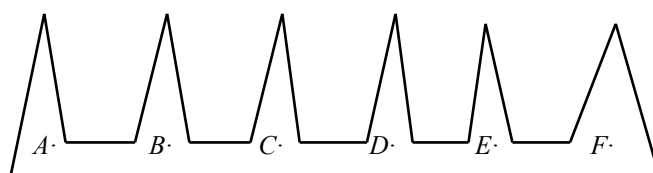


Figura 3. Occorrono 6 guardiani per coprire il 18-agono.

Quindi per il 18-agono di figura 3 sono necessari $\lfloor 18/3 \rfloor$ guardiani, mentre per il 6-agono P di figura 1 sono sufficienti $\lfloor 6/3 \rfloor - 1$ guardiani¹. Questi esempi sono casi particolari di una situazione generale trattata da un teorema formulato e dimostrato dal matematico di origine praghese Václav (Vásek) Chvátal (1946) nel 1975 (Chvátal, 1975). Il teorema è stato ripreso da altri matematici in varie occasioni (O'Rourke, 1987).

Teorema della galleria d'arte (Chvátal) - Per coprire un poligono di n lati (n -agono) sono sempre sufficienti $\lfloor n/3 \rfloor$ guardiani; per alcuni n -agoni sono necessari $\lfloor n/3 \rfloor$ guardiani.

L'esistenza degli n -agoni a pettine di Chvátal prova che per coprire certi n -agoni sono necessari $\lfloor n/3 \rfloor$ guardiani.

Il teorema della galleria d'arte di Chvátal può essere riformulato usando particolari classi di poligoni, come sarà detto nel seguito di questo articolo.

¹ Il simbolo $\lfloor k \rfloor$ indica la parte intera di k , cioè il più grande intero minore o uguale al numero reale k .

3 Una Prova del Teorema di Chvátal

Nel 1978 Steve Fisk diede una dimostrazione più breve di quella fornita da Chvátal al teorema della galleria d'arte (Fisk, 1978). Per riprendere tale dimostrazione è necessario premettere una definizione e un lemma facilmente dimostrabile.

Suddividiamo il poligono semplice P in triangoli usando solo diagonali e lati di P , in modo che le diagonali scelte non si intersechino tra loro, né intersechino lati di P in punti che non siano vertici di P . Questa suddivisione si chiama *triangolazione* del poligono P . Si dimostra la seguente proposizione.

Lemma – Ogni n -gono semplice P possiede almeno una triangolazione; ogni triangolazione di P è costituita da $n-2$ triangoli e da $n-3$ diagonali.

Dimostriamo ora il teorema della galleria d'arte. Una volta ottenuta una triangolazione di un poligono P , viene assegnato a ciascun vertice di P un colore (rosso, verde o blu) in modo che due vertici adiacenti (cioè collegati da un lato o da una diagonale di P) abbiano colori diversi. Si dimostra che i vertici di un poligono sono sempre colorabili con tre colori. Si nota che ogni triangolo ha i vertici di tre colori diversi. Inoltre ogni punto di ogni triangolo è visibile da un qualunque vertice del triangolo. Pertanto, scegliendo come guardiani di P solo i vertici di uno stesso colore, essi sono in grado di coprire l'intero poligono P . Quanti di tali guardiani servono per coprire P ? Detto n il numero dei vertici di P , per il principio della piccionaia (*pigeon-hole principle*) c'è almeno un colore cui competono al massimo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardiani che coprono P ; e questo prova quanto si voleva dimostrare.

Per il 11-agono in figura 4 le 3 guardie poste nei vertici blu D , H e K bastano per coprire l'intero poligono.

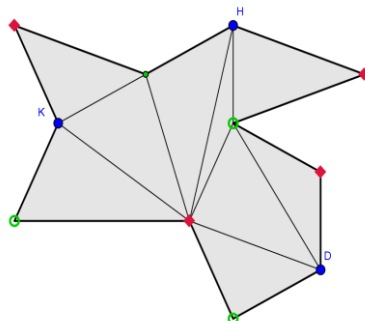


Figura 4. Le guardie poste in D , H e K coprono l'intero 11-agono.

4 Poligoni Ortogonali

Difficilmente una galleria d'arte presenta una planimetria del tipo di quelle illustrate nelle precedenti figure; più facilmente essa avrà le sembianze di un poligono ortogonale.

Un *poligono* semplice si dice *ortogonale* se i suoi lati sono tutti paralleli o ortogonali ad una retta prefissata del piano. Quindi in un poligono ortogonale un lato 'orizzontale' è sempre seguito da uno 'verticale' e un qualunque angolo interno o è retto o è l'esplementare di un angolo retto. I rettangoli sono gli unici poligoni ortogonali convessi. Un poligono ortogonale ha sempre un numero n pari di lati, con $n \geq 4$.

In figura 5, oltre al rettangolo P , è rappresentato l'esagono P' con un angolo interno concavo e il dodecagono P'' con 4 angoli interni concavi.

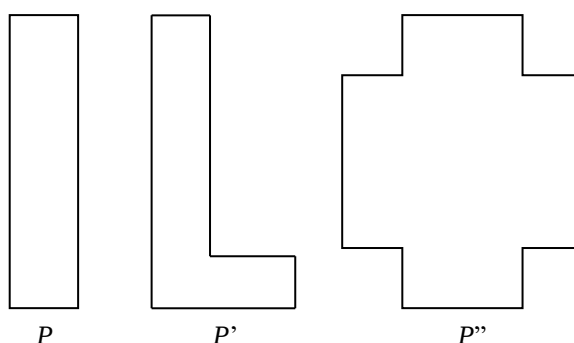


Figura 5. Poligoni ortogonali.

Relativamente agli angoli interni di un poligono ortogonale si può facilmente dimostrare il seguente teorema.

Teorema (O'Rourke) – In un n -agone ortogonale il numero k degli angoli interni retti è tale che: $k = 2 + n/2$.

Infatti se k è il numero degli angoli retti dell' n -agone, $n-k$ è quello degli angoli esplementari di un angolo retto. La somma degli angoli interni del poligono ha ampiezza pari a: $k \cdot 90^\circ + (n-k) \cdot 270^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ$. Da qui segue che $k = 2 + n/2$.

Quindi un esagono ortogonale ha 5 angoli interni retti, mentre un dodecagono ne avrà 8. Si osservi che affermare quanto sopra equivale a dire che “in un n -agone ortogonale il numero r degli angoli interni concavi è tale che: $r = n/2 - 2$ ” (Urrutia, 2004).

5 Galleria d'Arte Ortogonale

Quanti guardiani sono sufficienti per coprire un n -agone ortogonale? In figura 6: il 16-agono di sinistra (a 'pettine') necessita di 4 guardiani, posti per esempio in B , Q , R e C ; invece il 16-agono di destra (a 'scala') necessita solo di 3 guardiani, collocati per esempio in S , G e T .

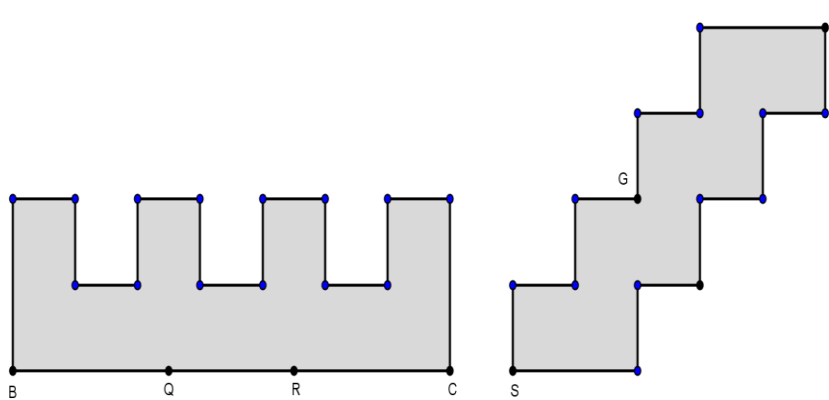


Figura 6. Guardiani per poligoni ortogonali.

Nel 1980 Jeff Kahn (1950), Maria Klawe (1951) e Daniel Kleitman (1934) provarono la seguente versione del teorema della galleria d'arte relativa a poligoni ortogonali (Kahn, 1980).

Teorema della galleria d'arte ortogonale (Kahn, Klawe, Kleitman) – Per coprire un poligono ortogonale di n lati sono sempre sufficienti $\lfloor n/4 \rfloor$ guardiani; per alcuni n -agoni sono necessari $\lfloor n/4 \rfloor$ guardiani.

Analogamente a quanto visto per il teorema di Chvátal, occorre suddividere il poligono ortogonale P in quadrilateri convessi non aventi punti interni in comune, ciascuno dei quali ha per lati sia lati che diagonali di P . Si dimostra che ogni poligono ortogonale P è suddivisibile in quadrilateri convessi (Kahn, 1980; O'Rourke, 1987). Fatta la suddivisione di P in quadrilateri convessi, si attribuisce a ciascun vertice di ogni quadrilatero un differente colore o simbolo tra quattro prescelti. Prendendo tutti i vertici (guardiani) di P con lo stesso colore si nota che tali vertici, in numero massimo di $\lfloor n/4 \rfloor$, bastano a coprire P .

In figura 7 nel dodecagono di sinistra occorrono $\lfloor 12/4 \rfloor = 3$ guardiani (per esempio quelli contraddistinti con un $+$) per coprire l'intero poligono; nel dodecagono di destra, invece, bastano 2 guardiani, quelli individuate dal simbolo $\times$.

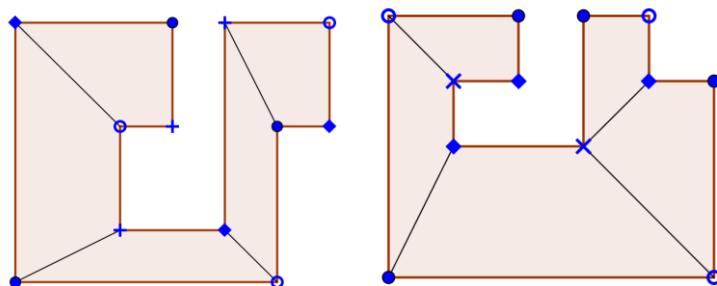


Figura 7. Poligoni ortogonali suddivisi in quadrilateri.

6 Poligoni Ortogonali con Buchi

Il problema di coprire o illuminare una galleria d'arte presenta formulazioni diverse a seconda della forma che tale galleria assume. Molto frequente è il caso della galleria d'arte pensata come un poligono da cui sono sottratti uno o più poligoni (detti *buchi*), caso che si presenta spesso nelle planimetrie di gallerie d'arte (o appartamenti) reali. Se il poligono è ortogonale anche i buchi saranno poligoni ortogonali con lati paralleli a quelli del poligono di partenza. Il numero n dei lati (o dei vertici) di un poligono ortogonale con h buchi è dato dalla somma del numero dei lati (o dei vertici) del poligono esterno con il numero di lati (o dei vertici) di ciascun buco (figura 8).

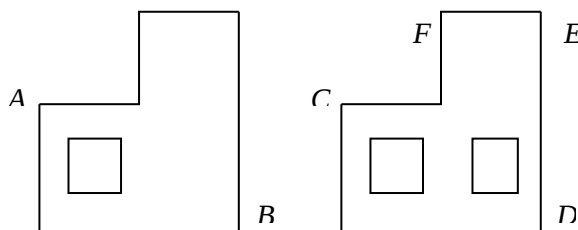


Figura 8. Poligoni con buchi: a sinistra $n=10$, $h=1$; a destra $n=14$, $h=2$.

Il problema della galleria d'arte è stato studiato anche in casi di questo tipo. Nel 1982 Thomas C. Shermer avanzò la seguente:

Congettura (Shermer) - Un poligono ortogonale con n vertici e h buchi può sempre essere coperto da $\left\lceil \frac{n+h}{4} \right\rceil$ guardiani posti nei vertici del poligono.

La congettura di Shermer può essere facilmente verificata per i poligoni ortogonali in figura 8: per coprire il poligono di sinistra bastano i

$\left\lfloor \frac{10+1}{4} \right\rfloor = 2$ guardiani posti in A e in B ; per quello di destra occorrono invece $\left\lfloor \frac{14+2}{4} \right\rfloor = 4$ guardiani, ad esempio quelli posti nei vertici C, D, E e F .

Nel 1984 la congettura di Shermer fu provata da Alok Aggarwal per $h = 1, 2$ (Aggarwal, 1984; Zylinski, 2006). Qualche anno dopo O'Rourke dimostrò il seguente teorema (O'Rourke, 1987).

Teorema (O'Rourke) - Un poligono ortogonale con n vertici e h buchi può sempre essere coperto da $\left\lfloor \frac{n+2h}{4} \right\rfloor$ guardiani posti nei vertici del poligono.

Un più recente risultato è stato fornito da Hemanshu Kaul: bastano $\left\lfloor \frac{n+5h/3}{4} \right\rfloor$ guardiani posti nei vertici per coprire un poligono ortogonale con n vertici e h buchi (Kaul, 2014).

Si stacca dai precedenti il seguente risultato ottenuto da Frank Hoffmann e Klaus Kriegel, in quanto il numero minimo di guardiani è indipendente dal numero dei buchi (Hoffmann, 1996).

Teorema (Hoffmann, Kriegel) - Un poligono ortogonale con n vertici e h buchi può sempre essere coperto da $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardiani posti nei vertici del poligono.

Confrontando questo teorema con la congettura di Shermer, risulta che da $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n+h}{4} \right\rfloor$ segue $n \geq 3h$. Quest'ultima condizione si verifica senz'altro perché ogni buco del poligono ortogonale P comporta l'aggiunta di almeno 4 lati a n ; quindi, se P ha h buchi risulta: $n \geq 4+4h > 3h$. Ad esempio, il poligono ortogonale in figura 9 presenta $n=12$ e $h=2$ ed è coperto dai 3 guardiani posti in A, B e C , coerentemente al limite congetturato da Shermer; mentre il limite di Hoffmann-Kriegel prevede la presenza di 4 guardiani.

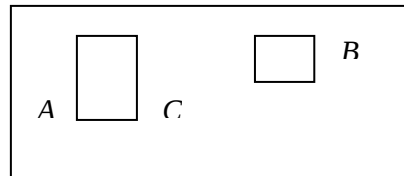


Figura 9. Poligono con buchi: $n=12, h=2$.

7 Conclusion

Altre estensioni del teorema della galleria d'arte riguardano casi in cui i guardiani: sono mobili lungo un lato del poligono o lungo un segmento qualsiasi; oppure sono fissi, ma hanno una visibilità limitata, per esempio a 180° o a 90° (Urrutia, 2004).

Un settore particolare della ricerca è indirizzato ai poligoni ortogonali con vertici posti nei nodi di una griglia ortogonale a maglie quadrate (Bajuelos, 2007); un altro si rivolge a poligoni con contorni curvilinei (Karavelas, 2009).

Per molti dei casi studiati sono stati costruiti algoritmi che consentono di tradurre i problemi della galleria d'arte in ambito informatico (O'Rourke, 1987; Elnagar, 2004).

Concludendo, occorre far presente che molte sono le applicazioni dei teoremi della galleria d'arte in matematica computazionale, in robotica, nei sistemi di sicurezza, nella programmazione di video game, nell'architettura supportata dal computer e in altri settori (Elnagar, 2004).

Bibliografia

- [1] Aggarwal A. (1984). The Art Gallery Theorem: Its Variations, Applications, and Algorithmic Aspects. Ph.D. Thesis, The Johns Hopkins University.
- [1] Bajuelos, A.L.; Canales, S.; Hernández, G. and Martins, M. A. (2007). "Solving some Combinatorial Problems in grid n-ogons". *International Journal on Mathematics and Computers in Simulation*, 2, 1, 177-183.
- [2] Chvátal, V. (1975). "A combinatorial theorem in plane geometry". *Journal of Combinatorial Theory (B)* 18, 39-41.
- [3] Elnagar, A. and Lulu, L. (2004). "Guarding polygons with holes for robot motion planning applications". *2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 1, 923-928.
- [4] Fisk, S. (1978). "A Short Proof of Chvátal's Watchman Theorem". *Journal of Combinatorial Theory (B)* 24, 374.
- [5] Hoffmann F.; Kriegel K. (1996). "A graph coloring result and its consequences for polygon guarding problems". *SIAM J. Discrete Mathematics*, 9(2), 210-224.

- [6] Kaul, H. (2014). The Art Gallery Problem. Chicago: Illinois Institute of Technology.
<http://www.math.iit.edu/~kaul/talks/LongArtGalleryTalk.pdf> (ultimo accesso: 19-07-2018).
- [7] Kahn, J.; Klawe, M.M. and Kleitman, D. (1980). “Traditional Galleries Require Fewer Watchmen”. SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods. 4. 10.1137/0604020.
- [8] Karavelas, M.I.; Toth, C.D. and Tsigaridas, E.P. (2009). “Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards”. Computational Geometry, 42, 522–535.
- [9] O’Rourke, J. (1987). Art Gallery Theorems and Algorithms. New York-Oxford: Oxford University Press.
- [10] Urrutia, J. (2004). Art Gallery and Illumination Problems. Mexico City: Instituto de Matemáticas Universidad Autónoma de México.
- [11] Zylinski, P. (2006). “Orthogonal art galleries with holes: a coloring proof of Aggarwal’s Theorem”. The Electronic Journal of Combinatorics, 13, 1-10.

Phenomenology, Symbolic Interactionism and Research: From Hegel to Dreyfus

Tansif ur Rehman*

Received: 29-11-2018. Accepted: 29-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.438

© Tansif ur Rehman



Abstract

The journey of phenomenology apparently is not so extensive, because it was the first half of the twentieth century when Edmund Husserl appeared as the founder of phenomenology. But, it has its very roots in the works of ancient Greek philosophers like Socrates, Plato, and Aristotle. Various other philosophers have also contributed to develop this field like Hegel's 'constructivism', Brentano's 'intentionality', Heidegger's concept of 'being and time', Schutz's 'sociological phenomenology', Ponty's 'body and mind', Dreyfus' 'artificial intelligence' are the respective notions which provided the very fundamentals of phenomenology. This journey did not stopped here, as various phenomenologists have also been contributing in this field and establishing the linkage between phenomenology and symbolic interactionism as well as its very relation to research.

Keywords: Milestones, Phenomenology, Relational Analysis, Symbolic Interactionism, Research.

*Department of Criminology, University of Karachi, Karachi, Pakistan. tansif@live.com

1. Introduction

Phenomenology is the philosophical study of the structures of experience and consciousness (Zahavi, 2003). While, phenomenology provides us with paradigms to construct reality and in this process symbolic interactionism plays a compulsive role. In inductive as well as qualitative method, phenomenology is used as a powerful tool by researchers to find out facts or reality. Phenomenology as a discipline is distinct from, but related to other key disciplines in philosophy, such as ontology, epistemology, logic, and ethics.

Phenomenology has been practiced in various guises for centuries, but it came into its own form in the early 20th century in the works of Edmund Husserl, Martin Heidegger, Jean-Paul Sartre, Maurice Merleau-Ponty, etc. Phenomenological issues of intentionality, consciousness, qualia, and first-person perspective have been prominent in recent philosophy of mind. Phenomenology is also sometimes considered as a philosophical perspective of approach to qualitative methodology. It has a long history in various disciplines of social research, including psychology, sociology, and social work.

2. Hegel's Constructivism

George Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), a German philosopher is one of the famous thinkers of late enlightenment. He elaborated Kant's view in his epistemological constructivism which is purely phenomenological. According to his 'constructive epistemology', a person knows what he wants to know. If a person only knows about himself, he cannot understand what the phenomenon is actually and if he only knows about the phenomenon, then he is unable to understand himself.

Through 'consciousness' we are able to obtain knowledge of both, i.e. subject and an object. Because, the subject experiences the objective world and both are not only affected by each other. But, the reality can be extracted by understanding both, i.e. the self-position within the phenomenon and the phenomenon position within the self.

It is not wrong to say that it is basically a 'classical phenomenology' (Rockmore, 2011) in which a person draws reality by using his deep intellectual capabilities and this reality can be the opposite of his interests (Stern, 2013).

He also focused 'symbolic interactionism' and explained that man has a desire to be recognized. To fulfill this desire, he follows universally accepted laws to become as worthy as his universe requires. For the fulfillment of this desire of recognition, there is a necessity to know the self properly. A person has consciousness of his self and the self is fully understood by him. He will not only be recognized, but will also confirm it by others. This development of consciousness is considered as logical. Hegel named it as 'sensuous certainty'.

At the initial level of consciousness, a person is able to understand things as they are present. But, after involving sensuous consciousness this understanding becomes far more complex. At this juncture, a logical view takes place which leads self-consciousness. This consciousness refers not only to the knowledge of self, but also to the relationship of the subject to the respective object (Houlgate, 2013).

3. Brentano's Intentionality

Franz Brentano (1838-1917) was also a German philosopher who added to the very concept of 'intentionality'. He was the first theorist who emphasized on intentional consciousness which refers to the internal experiences of a person that develops conscious thinking of an object which is being directed and different from the things as they apparently seems (Groenewald, 2004).

As he presented in his theory of 'time consciousness' which states that there is no time limit of mental acts. It is an ongoing process where acts or ideas are shifted from one to another. But, it remains present with alteration or modification and a link between these changing ideas persists. This link between ideas are like a pair of fetters which are connected through a chain which he called 'original association' (Polkinghorne, 1983).

Husserl, who is known as the father of phenomenology, was greatly inspired by his concept of an original association (Huemer, 2004) and presented the concept of 'retention' which refers that the consciousness maintains the link between the act of perception or we can say it is the extension of ideas (Lohmar & Yamaguchi, 2010).

4. Husserl's Consciousness

Edmund Gustav Albrecht Husserl (1859-1938) was a German philosopher. Edmund Husserl is known as the founder of phenomenology. He

was a mathematician and his prior philosophical approaches were linked with mathematics. He wrote *Philosophy of Arithmetic* in 1891, in it, he focused on finding the essence of things and finding the core meaning of consciousness (Kockelmans, 1994).

In *Philosophy of Arithmetic*, he intended to lay the scientific basis for the future system by means of a series of psychological and logical investigation (ibid.). It was his first published book, in it he looked for the content and origin of the concept of numbers. He also defined the concepts of plurality and unit (Husserl, 2012).

The major goal was to develop the fundamental concepts of mathematics from certain psychological acts. He defined the awareness of 'natural attitude' and 'phenomenological attitude'. By 'natural attitude' he meant the world which is out there and which is relative to human experiences. By 'phenomenological attitude' he meant for bracketing the natural attitude. By bracketing it is meant that any concept or awareness is a kind of belief.

He named this bracketing process 'epoche', which allows to turn attention regarding the ongoing activity of consciousness. This process is called 'phenomenological reduction'. In the 'phenomenological reduction' individuals start to notice how they are actually experiencing things and that things can be seen very differently as it is solely dependent on their perception.

In this context, Husserl also propounded the term 'essence'; which is the feature of experiences that are both necessary and invariant. 'Essence' actually make human experiences what they are. The basic assumption in Husserl's phenomenology is 'intentionality', which means that every act of consciousness is directed towards an object of some kind and every act of consciousness and experience is intentional. In phenomenology, intention is mental and cognitive; meaning, intention is the theory of knowledge, not the theory of human action.

Husserl was greatly inspired by Brentano's concept of 'original association' and presented the concept of 'retention' which refers that consciousness maintains the link between the acts of perception or we can say it is the extension of ideas.

In 1928, Husserl in his lecture at Amsterdam declared that at first he did not realize the difference between psychological and philosophical sciences, aimed with regards to the phenomenological method. He also clarified that his phenomenological ideas are not taken from Hegel, but rather his work is influenced by ideas of Ernst Mach, Ewald Hering, and Franz Brentano (Kockelmans, 1994).

5. Heidegger's Concept of Being and Time

Like Husserl, Martin Heidegger (1889-1976) was also a German philosopher. According to the Internet Encyclopedia of Philosophy, he is to a great extent acknowledged as being one of the most important as well as an original philosopher of the 20th century. In his early life he was influenced by Franz Brentano and has remained a student and assistant of Martin Husserl.

According to Heidegger, the basic purpose of phenomenology is to answer the question of 'being' and the fundamental relationship between 'man' and 'being'. Heidegger focused on the basic problems, not with phenomenology, but with what phenomenology itself deals with. Because, according to him, an introduction to the basic problem could lead to solutions (Heidegger, 1988).

He emphasized that 'forgetfulness of being' is the major problem in history of philosophy. He has criticized traditional thinkers and gave a number of reasons to think that "the traditional view is a mistake" (Guignon, 1993, p. 129).

He also argued that metaphysics has misunderstood the nature of 'being' by understanding it as things. But, the fundamental question of metaphysics should have been regarding the ultimate nature of things. Hence, metaphysics had ignored this approach and focused on the 'being of things' and 'things in this world'.

He claimed that 'being' has to be distinguished from 'thing-in-being'. To overcome this 'forgetfulness' a phenomenological project was initiated by the name 'phenomenological ontology'. This approach is ontological, because it tries to ontologically describe the difference between 'being' from 'things-in-being', because it tries to capture the most directly given things or primordial data (Heinamaa, 2003). According to many, phenomenological ontology recaptures the real essence of meaning.

6. Schutz's Sociological Phenomenology

Alfred Schutz (1899-1959) was an Austrian social scientist and had a strong link with sociology. He has also criticized Max Weber's 'interpretative sociology'. According to him, Weber's concept of 'social action' is very limited and that Weber has pictured social world as a place of isolated individuals; where every individual produces the subjective meaning of actions (Weber, 2009).

Schutz has also claimed that Weber has not given any clue about how their subjective isolated meanings form a common social world. Schutz proposed that individual consciousness does not make the social world private, rather than common and shared.

He added that the objective of everyday life is something which is taken granted by individuals in society. This is the way social actors view the everyday world using their commonsense knowledge. He also claimed that all socialized human beings possess commonsense knowledge. It refers to the knowledge of the everyday world (Cuff & Payne, 1979).

According to Schutz, the social world is organized, independent, orderly and preexists of any particular individual. At the same time, this world has to be interpreted and make sense of by each individual through their particular experiences. Concepts which comprise commonsense knowledge are called 'typifications'. These typifications are not personal inventions, but are embodied in the language people share with each other.

7. Ponty's Concept of Body and Mind

Maurice Merleau-Ponty (1908-1961) was a French philosopher. He claimed that Heidegger has explained 'dasein' (i.e. man) in an abstract form and did not discussed about the 'dasein' experience of the body and how the human body facilitates experience of being in the world. Ponty has based his entire phenomenological project on account of 'body-intentionality' and the challenge it poses to any adequate concept of mind.

He never denied the existence of mental phenomena, but he insisted that any thought or idea occur only against a background of perceptual activity that the human being already understands in bodily terms by engaging in it (Carman, 1999).

For Ponty, the body plays a constitutive role in experience precisely by grounding, making possible and yet remaining peripheral in the horizons of the human's perceptual awareness. To a great extent he emphasized on the concept of the body due to specific reason. As according to him, phenomena which we experience is affected by the body, due to which any change in the body leads to a continuous shifting in senses of the world and self (Gallagher & Meltzoff, 1996).

8. Dreyfus' Concept of Artificial Intelligence

Hubert Dreyfus (1929-2017) is an American philosopher. He received his higher education from Harvard University. He is a well-known and one of the contemporary phenomenologist. He wanted to show that the two important components of intelligent behavior, i.e. learning and skillful action can be described and explained without recourse to mind or brain demonstrations.

To elaborate this, he explained two central concepts in Merleau-Ponty's 'phenomenology of perception', i.e. the 'intentional arc' and 'maximal grip'. The 'intentional arc' is the close connection between the agent and world. As the 'agent' acquires skills, these skills are stored, not as representations in mind, but as dispositions to respond to the solicitations of situations in the world. 'Maximal grip' is the body's tendency to respond to these solicitations in such a way as to bring the current situation closer to the agent's sense of an 'optimal gestalt'. Neither of these abilities requires mental or brain representations (Dreyfus, 1999). Rather, replicated neural networks display critical structural features of the 'intentional arc'.

Moreover, Walter Freeman's account of brain dynamics underlying perception and action is structurally isomorphic with Merleau-Ponty's account of the way, i.e. a skilled agent moves towards attaining a 'maximal grip'. Likewise, his other works were also influenced by Ponty. In his 1986 book, *Mind Over Machine*, he claimed that philosophy was finished for previous thinkers, since it attempts to treat intelligence as rational or at least analytic, on which they had never worked. Since 1960, Hubert Dreyfus has been a critique of artificial intelligence.

Phenomenologists	Concepts	Followers
Georg Wilhelm Friedrich Hegel	Consciousness / Constructivism	Adorno, Marcuse, Beauvior, Sartre, Kierkegaard, Marx, Heidegger, Strauss, Taylor
Franz Brentano	Intentionality	Husserl, Heidegger, Stainer, Freud, Marty
Martin Heidegger	Being	Maurice Merleau- Ponty
	Things-in-Being	Giorgio Agamben
	Phenomenological	Hannah Arendt
		Jean Beaufret

	<i>Ontology</i>	Alain Badiou
Maurice Merleau-Ponty	<i>Body-Intentionality</i>	David Abram
		Hubert Dreyfus
	<i>Intentional Arc</i>	Graham Harman
		Paul Crowther
		Laplanche
Edmund Husserl	<i>Consciousness</i>	Martin Heidegger
	<i>Epoche</i>	Rudolf Carnap
	<i>Essence</i>	Maurice Merleau-Ponty
	<i>Intentionality</i>	Alfred Schutz
	<i>Phenomenological Reduction</i>	Jean-Paul Sartre
Alfred Schutz	<i>Common-sense Knowledge</i>	Peter L. Berger
		Thomas Luckmann
	<i>Typifications</i>	Harold Garfinkel
		David Sudnow
		Dan Zahavi
Hubert Dreyfus	<i>Artificial Intelligence</i>	Richard Rorty
	<i>Intelligent Behavior</i>	Mark Wrathall
	<i>Skillful Action</i>	Sean Dorrance Kelly
	<i>Intentional Arc</i>	Charles Taylor
		John Haugeland

9. Phenomenology and Symbolic Interactionism

Symbolic interactionism is a perspective which analyzes the societal behavior on a micro-level (Benford, 1997). It takes a small scale view of society by studying interaction between individuals and through this approach, symbolic interactionism explains social order and changes in society. It is a theoretical approach to understand the relationship between humans and society. The basic notion of symbolic interactionism is that human action and interaction are understandable only through the exchange of meaningful communication or symbols (Turner, 1988).

In this approach, humans are portrayed as acting, as opposed to being acted upon. Phenomenology and symbolic interactionism have many common characteristics (Starks & Trinidad, 2007). Because, people in society change due to their interaction with others and due to the meaning assign to things (Sack, 1986).

Key founders of this merger between phenomenology and symbolic interactionism are George Herbert Mead and Edmund Husserl and the respective argument was further sustained by thinkers like Herbert Blumer, Seeley, Berber, Luckman, as well as Peter Winch. These thinkers referred this approach as ‘social idealism’.

George Herbert Mead and Alfred Schutz were also concerned with the question of nature of the social world. They both shared a modest sketch of man in the social world. The modernist image of man is, man in action. It suggests an action paradigm for the study of man in the social world (Swidler, 1986).

Georg Wilhelm Friedrich Hegel has also made his contribution, by brilliantly explaining the criteria which defines the human activity, developed through the realization of activity, in his 1807 work, *Phenomenology of Mind*.

10. Phenomenology and Research

Basically, phenomenology seeks to understand the meaning of things as being conceived by people in society. Phenomenology helps researchers to gain the meaning of a phenomenon which people have given. Phenomenology has overlapped other primary qualitative research approaches like, ethnography, hermeneutics, and symbolic interactionism.

Phenomenological methods are particularly effective in bringing to the fore the experiences and perceptions of individuals from their own perspectives, and therefore at challenging structural or normative assumptions.

Pure phenomenological research seeks essentially to describe rather than explain, and to start from a perspective free from hypotheses or preconceptions. When understanding the human being; a researcher needs to gather more deep information. This deep information can be gathered through the inductive approach and qualitative methods such as an interview, group discussions, and observations (Lester, 1999).

Epistemologically, phenomenological approaches are based in a paradigm of personal knowledge and subjectivity, and emphasis the importance of personal perspective and interpretation. They are powerful for understanding the subjective experience, gaining insights into people’s motivations as well as actions.

In the beginning, phenomenology was a philosophical movement, but later phenomenologist like Husserl amended, developed, and introduced phenomenological research in psychology, sociology, social psychology, health education, and various disciplines.

Phenomenology was attractive to psychological investigators in the early part of the 20th century and phenomenological psychology was also called 'existential psychology' or 'existential phenomenological psychology'; where the emphasis is on understanding a person's experience of a problematic situation (Wilson, 2002).

Later, Alfred Schutz attempted to create 'phenomenological sociology' that provides a useful framework to guide social research into people's information, behavior, and to guide individuals towards the very choice of 'appropriate' methods.

11. Analysis

Phenomenological essence is evident in many philosophers' notions as it has been a derivative of philosophy. Phenomenology transformed into 'epistemological constructivism' by Hegel - knowledge of subject and object by using consciousness.

Later, Brentano added the concept of 'time consciousness' - the chain of knowledge or connection between momentary knowledge known as the original association after putting the seed, soil, and fertilizer of philosophical concepts as well as continuous sprinkle of phenomenological water, at last, Husserl produced the plant of phenomenology. But, all previous philosophers who were helter-skelter contributed to this field, often considered as the very roots of phenomenology.

Edmond Husserl's work was inspired by Mach, Hering, and Brentano. His concepts of consciousness became the most prominent. After him many philosophers carried out his work. Martin Heidegger was a student and assistant of Husserl. At the start of his work he carried Husserl's original project of getting back to things together.

But, after writing his first book *Being and Time* in 1924, he deviated and claimed that phenomenology is much older than Husserl and its roots can be found in the Greek way of thinking. He also argued that phenomenology is not merely a study of the intentional structure of consciousness.

Schutz has also analyzed Husserl's thoughts and related them with sociology. His major aim was to apply Husserl's idea's to scientific study. So, he could build the basis for better sociology.

Martin Heidegger was not satisfied with traditional metaphysics' method of analysis. So, he urged that the traditional ways of asking a question have to be discarded, as that presupposed certain assumptions and a total reconstruction are required and he called for radicalization of ontology. By this he meant going back to the origin of concepts. He further added that the phenomena of existence requires interpretation. Thus he named this methodology 'phenomenological hermeneutic'.

Alfred Schutz has played a dynamic role in bridging the gap between sociology and phenomenology and formed 'social phenomenology'. Schutz has operationalized his ideas by producing research to demonstrate how his ideas can be applied to the empirical study of the social world.

Like other phenomenologists, Merleau-Ponty was inspired by the work of Edmund Husserl and Martin Heidegger. Like Heidegger, he claimed that a clear concept of consciousness is necessary to begin with the understanding of human perception. This idea of Merleau-Ponty was published in his 1964 book *Primacy of Perception*. But, he has also made the assertion that Heidegger did not pay attention to the 'body'.

According to Hubert Dreyfus, human intelligence and expertise depends on a human being's unconscious instincts rather than conscious symbolic manipulation. These thoughts of Dreyfus were based on the work of Merleau-Ponty and Heidegger.

12. Conclusions

Phenomenology has had an enormous influence on our everyday lives. The very language we speak uses classifications derived from phenomenology. For example, the classifications of noun and verb involve the philosophic idea that there is a difference between things and actions. If we ask what the difference is, we are starting a 'phenomenological inquiry'.

Every institution of society is based on phenomenological ideas, whether that institution is law, government, religion, family, marriage, industry, business, or education. Phenomenology differences have led to the overthrow of governments, drastic changes in laws, and the transformation of entire economic systems.

Such changes have occurred because the people involved held certain beliefs about what is important, true, real, and about how life should be ordered.

References

- [1] Benford, R. D. (1997). "An Insider's Critique of the Social Movement Framing Perspective". *Sociological Inquiry*, 67(4), 409-430.
- [2] Carman, T. (1999). "The Body in Husserl and Merleau-Ponty". *Philosophical Topics*, 27(2), 205-226.
- [3] Cuff, E. C. & Payne, G. C. F. (Eds.). (1979). *Perspectives in Sociology*. Crows Nest, Australia: George Allen & Unwin.
- [4] Dreyfus, H. L. (1999). "The Primacy of Phenomenology Over Logical Analysis". *Philosophical Topics*, 27(2), 3-24.
- [5] Gallagher, S., & Meltzoff, A. N. (1996). "The Earliest Sense of Self and Others: Merleau-Ponty and Recent Developmental Studies". *Philosophical Psychology*, 9(2), 211-233.
- [6] Groenewald, T. (2004). "A Phenomenological Research Design Illustrated". *International Journal of Qualitative Methods*, 3(1), 42-55.
- [7] Guignon, C. (Ed.). (1993). *The Cambridge Companion to Heidegger*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [8] Heidegger, M. (1988). *The Basic Problems of Phenomenology* (Vol. 478). Bloomington, Indiana: Indiana University Press.
- [9] Heinamaa, S. (2003). *Toward a Phenomenology of Sexual Difference: Husserl, Merleau-Ponty, Beauvoir*. Lanham, Md.: Rowman & Littlefield Publishers.
- [10] Houlgate, S. (2003). "GWF Hegel: The Phenomenology of Spirit". *The Blackwell Guide to Continental Philosophy*, 8-29.
- [11] Huemer, W. (2004). "Husserl's Critique of Psychologism and his Relation to the Brentano School". *Phenomenology and Analysis: Essays on Central European Philosophy*. Frankfurt: Ontos Verlag, 199-214.
- [12] Husserl, E. (2012). *Philosophy of Arithmetic: Psychological and Logical Investigations with Supplementary Texts from 1887–1901* (Vol. 10). Berlin: Springer Science & Business Media.
- [13] Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to its Methodology* (2nd ed.). California: Sage.
- [14] Kockelmans, J. J. (1994). *Edmund Husserl's Phenomenology*. West Lafayette, Indiana: Purdue University Press.
- [15] Lester, S. (1999). *An Introduction to Phenomenological Research*. Taunton: Stan Lester Developments.

- [16] Lohmar, D., & Yamaguchi, I. (2010). "On Time - New Contributions to the Husserlian Phenomenology of time". doi: 10.1007/978-90-481-8766-9
- [17] Polkinghorne, D. (1983). *Methodology for the Human Sciences: Systems of Inquiry*. Albany: State University of New York Press.
- [18] Rockmore, T. (2011). *Kant and Phenomenology*. Chicago: University of Chicago Press.
- [19] Sack, R. D. (1986). *Human Territoriality: Its Theory and History*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [20] Starks, H., & Trinidad, S. B. (2007). "Choose Your Method: A Comparison of Phenomenology, Discourse Analysis, and Grounded Theory". *Qualitative Health Research*, 17(10), 1372-1380.
- [21] Stern, R. (2013). *The Routledge Guidebook to Hegel's Phenomenology of Spirit*. Abingdon, Oxon: Routledge.
- [22] Swidler, A. (1986). "Culture in Action: Symbols and Strategies". *American Sociological Review*, 273-286.
- [23] Turner, J. H. (1988). *A Theory of Social Interaction*. Stanford: Stanford University Press.
- [24] Weber, M. (2009). *The Theory of Social and Economic Organization*. New York: Simon and Schuster.
- [25] Wilson, T. D. (2002). "Alfred Schutz, Phenomenology and Research Methodology for Information Behaviour Research". *The New Review of Information Behaviour Research*, 3(71), 1-15.
- [26] Zahavi, D. (2003). *Husserl's Phenomenology*. Stanford: Stanford University Press.

Science & Philosophy, Volume n.6, Issue n.2, 2018

Contents

Understanding Scientific Inquiry

Peter J. Veazie 3-14

Internet and Greek Pontian Associations in Thrace

Chrysi Tellidou 15-26

Methodology of Pedagogical Research

Cristina Ispas 27-36

From Continuous to Discrete via V&V Bar

Thomas Vougiouklis 37-44

Healing the Psychic Split

Alina Vişan 45-60

The Ship Transportation of Passengers with Disabilities and the Disability-related Training Procedures of Seamen: A Legal and Social Framework

Dario Imperatore 61-74

***Ordered Numerical Systems in Hilbert's Grundlagen der Geometrie
Sistemi Numerici Ordinati nei Grundlagen der Geometrie di Hilbert***

Andrea Battocchio 75-116

The Pedagogist's Professional Practice and the Clinical Method

Franco Blezza 117-128

Is the Golden Section a Key for Understanding Beauty? Part II

Franco Eugeni & Luca Nicotra 129-176

Mathematics, Art and Literature

Ferdinando Casolaro & Giovanna Della Vecchia 177-186

Art Gallery Theorems

Luigi Togliani 187-196

Phenomenology, Symbolic Interactionism and Research: From Hegel to Dreyfus

Tansif ur Rehman 197-209

Published by APAV (Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo)