

ISSN 2282-7765

ISSN 2282-7757

[online]

[printed]

Volume 6, Number 1, June 2018

Science & Philosophy

Journal of Epistemology, Science and Philosophy

Chief Editors

Franco Eugeni

Antonio Maturo

Managing Editor

Fabrizio Maturo

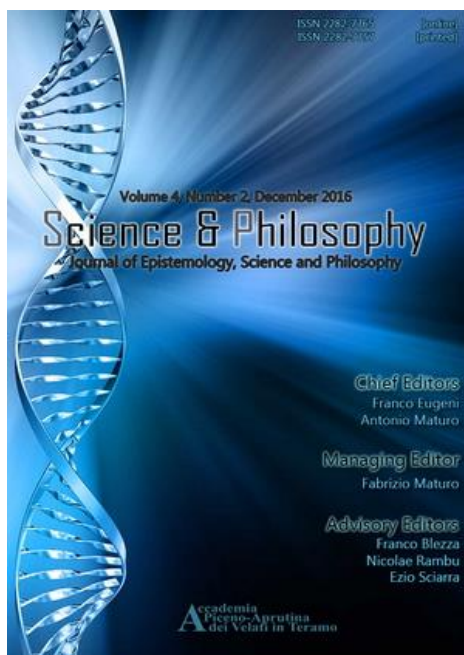
Advisory Editors

Franco Blezza

Nicolae Rambu

Ezio Sciarra

Accademia
Piceno-Aprutina
dei Velati in Teramo



Chief Editors

Eugeni Franco, Teramo, Italy
Maturo Antonio, Pescara, Italy

Advisory Editors

Bleza Franco, Chieti, Italy
Râmbu Nicolae, Iasi, Romania
Sciarra Ezio, Chieti, Italy

Managing Editor

Maturo Fabrizio, Pescara, Italy

Editorial Board

Ambrisi Emilio, Caserta, Italy
Anatriello Giuseppina, Naples, Italy
Arribas Jose Maria, Madrid, Spain
Bleza Franco, Chieti, Italy
Callejo Gallego Manuel Javier, Madrid, Spain
Casolaro Ferdinando, Naples, Italy
Chitoiu Dan, Iasi, Romania
Cimagalli Folco, Rome, Italy
Ciprian Alecu, Iasi, Romania
Corsi Vincenzo, Pescara, Italy
Corsini Piergiulio, Udine, Italy
Cruz Rambaud Salvador, Almeria, Spain
Daniela-Tatiana Soitu, Iasi, Romania
Deriu Fiorenza, Rome, Italy
Di Francesco Gabriele, Pescara, Italy
Figueiredo Elisabete, Vila Real, Portugal
Gardaphe Frederick, NY, USA
Gatto Romano, Potenza, Italy
Gavrila Mihaela, Rome, Italy
Gerla Giangiacomo, Salerno, Italy
Hošková-Mayerová Šárka, Brno, Czech Republic
Innamorati Stefano, L'Aquila, Italy
Ispas Cristina, Resita, Romania
Madureira Livia, Portugal
Malizia Pierfranco, Rome, Italy
Marconi Domenico, Teramo, Italy

Markovic Ljiljana, Belgrade, Serbia
Marradi Alberto, Florence, Italy
Maturo Antonio, Pescara, Italy
Maturo Fabrizio, Pescara, Italy
Migliorato Renato, Messina, Italy
Montesperelli Paolo, Rome, Italy
Nicotra Luca, Rome, Italy
Paone Fiorella, Chieti, Italy
Petrovic Mina, Belgrade, Serbia
Râmbu Nicolae, Iasi, Romania
Rosati Norton Delfico Mauro, London-Florence, UK-Italy
Rotondo Paolo, Pescara, Italy
Ruggiero Christian, Rome, Italy
Savarese Elisa, Castellammare, Italy
Sciarra Ezio, Chieti, Italy
Sessa Salvatore, Naples, Italy
Sideri Daniela, Pescara, Italy
Squillante Massimo, Benevento, Italy
Tofan Ioan Alexandru, Iasi, Romania
Ventre Aldo Giuseppe Saverio, Naples, Italy
Veraldi Roberto, Pescara, Italy
Viglioglia Maria Teresa, Melfi, Italy
Vincenzi Giovanni, Salerno, Italy
Vougiuklis Thomas, Alexandroupolis, Greece
Vranes Aleksandra, Belgrade, Serbia
Yalap Hakan, Nevsehir, Turkey

Editorial Manager and Webmaster

Manuppella Giuseppe

Graphic project (Progetto grafico)

Manuppella Fabio

Legal Manager

Di Domenico Bruna

Publisher

Accademia Piceno - Apruttina dei Velati in Teramo
(A.P.A.V.)

Note

All manuscripts are subjected to a blind review process. The reviewers are mainly selected from the editorial board. The journal's policies are described at: <http://eiris.it/ojs/index.php/scienceandphilosophy/about/submissions#authorGuidelines>

Schleiermacher's Universal Hermeneutics and the Problematics of Rule-Following

Hafiz Syed Husain^{•*}

Received: 18-05-2018. **Accepted:** 12-06-2018. **Published:** 30-06-2018

doi:10.23756/sp.v6i1.408

© Hafiz Syed Husain



Abstract

This paper investigates how Schleiermacher's universal hermeneutics can be considered as a better alternative to both, German rationalist aesthetics as pioneered by Christian Wolff, and Kant's transcendental idealism, to the extent of overcoming the problematics of rule-following. A general account of the necessity of a universal hermeneutics and its meaning from historical practices of exegeses is given. This is then followed by the account of rule-following in the tradition of both German rationalist aesthetics and Kant's transcendental idealism with latter as expounded in Kant's *Critique of Pure Reason*. The investigation is comparative and descriptive. The purpose of this study is to discuss the hermeneutic possibilities in research methodologies for human sciences.

Keywords: Rule-Following, Universal Hermeneutics, Schematization, Understanding (*Verstehen*), Interpretation (*Auslegung*), Schleiermacher.

[•]Department of Philosophy, University of Karachi, Karachi, Pakistan.

^{*}Department of Mathematical Sciences, Federal Urdu University of Arts, Science & Technology, Karachi, Pakistan. hsyed.hussain@fuuast.edu.pk.

1. Introduction

Hermeneutics, construed as the art of interpretation, has long existed before its incorporation in philosophy with its comparatively more significant traditional sense being legal, philological, literary and Biblical (Hirsch, 1967, p. vii). Its appearance in philosophical discourse can be traced as early as Plato's dialogues, where he spoke of *hermeneia*, the etymological origin of which was traced from the Greek word Hermes –the Greek messenger god (Plato, 1997, pp. 125-126 (407e)). Although there has been some disagreement among the Doxographers whether such a genealogy is truly informative, it does deliver the crux in context of the job of the hermeneut as a messenger between gods and humans, alluding to the ever-present inherent possibility of concealed meaning and misunderstanding or confusions, the natural or pre-philosophical preconditions of the very conception of the problem that the art of interpretation –as *technē hermēneutikē*, tries to solve by virtue of regional exegesis corresponding to the class of text involved. Thus, as Ricoeur himself remarked, readings of the Greek myths for Stoics involved rules of interpretations primarily inspired by the then developed physics and ethics, which were different from reading of Torah for Hebrews and the Bible for Christians (Ricoeur, 1989, p. 4). In almost every situation, the exegete had to cope with multiple possibilities of meaning and come up with an interpretation that could incorporate historical and cultural distance in such a way that could avoid relativism and is able to successfully help the interlocutor –including the interpreter himself both as an author or as a reader, articulate the text into his own world and make sense of himself as its dative. For instance, Augustine's 'confessions' Book-I helps its reader construe the symbols of ideal perfections, both divine and their human exemplars from classic Greek and Roman literature which inspired an individual acculturated accordingly to act and respond in a particular way, as mere 'wines of errors' poured into words (Augustine, 1912, pp. 47-49); thereby preparing the reader, through what lied ahead, to consider the writer as the human exemplar of the divine perfection signified by Christ. This made it the piece of not mere confessions, but rather at this point, the interpretation of signs of pagan culture as spiritual mutilations inflicted upon what is good in humanity, thereby compelling its reader to make sense of himself under the light of the way the writer led his life.

This meant that the problem of interpretation that initially and conventionally involved 'what the text means?' and its methodological determination via 'how meaning of a particular text becomes possible?' was founded on a more profound problematic of the very act of understanding in the most general sense where understanding could be considered as a most primordial human capacity responsible for ordinary grasping of everyday-life's challenges in terms of signs and significances of moral, political, personal or spiritual relevance. Thus the question had to be shifted from above

local interpretive problematics to ‘how understanding is possible?’ –the *Verstehenfrage*, that could give rise to a possibility of theorizing such interpretive practices towards a general hermeneutics. The aim of this hermeneutics would be to work out the rule-boundness of the faculty of understanding as interpretation. On the other hand, such instances of interpretation exemplify that an interpretive act is not a mere re-presentation of something, as if there is some fixed substratum which the interpreter is trying to aim at –as in case of attempts to resolve an ambiguity or confusion in a message with a view that there is something like a singular intention beneath the message waiting to get discovered. But rather every discursive act is interpretive to the extent that it presents ‘as-saying’-*something-of-something*; where the first ‘something’ can be thought to be the ‘saying’ with the second ‘something’ being the reality –its reference or noema¹. Consequently, interpretation is not just overcoming of confusion that might have crept in but is the very presentation of its reference. For Ricoeur, this was already realized as early as when Aristotle wrote his ‘*Peri Hermēneias*’ where he spoke of discourse as interpretation of reality via meaningful expression without any intermediary substrate –e.g. impressions from things themselves (Ricoeur, 1989, p. 4). Thus, the intentional direction of meaning-intention with phenomenological underpinnings becomes clear. Discourse as an interpretation is always directed towards its noematic correlate, i.e. the world, as a modification of givenness of signitive kind which –one learns from phenomenology, intrinsically structures the interpreter as its dative through syntactical devices e.g. shifters in linguistics (Ricoeur, 1979, pp. 12-13). In fact, once we realize text as discourse fixed through writing, the problem of interpretation and signitive intention seems to become essentially correlated. This helps bridge the gap between phenomenology and a general hermeneutics, where the latter becomes possible only when classical ways of conceiving problem of interpretation is given the shift towards general problem of understanding or comprehension. This shift had its origin in classical interpretive practices –as remarked earlier but was philosophically realized around the turn of eighteenth century with the development of classical philology. Both Schleiermacher and Dilthey were able to appreciate it in context of this latest development (Ricoeur, 1989, p. 5).

¹ An allusion here to how phenomenology correlates with hermeneutics is both informative and relevant. According to traditional historical philosophical scholarship, phenomenology enters hermeneutics with Heidegger’s radicalizing of Husserlian phenomenology, but I contest that phenomenology is always a presumption of hermeneutics and vice versa as soon as hermeneutics tries to become philosophical. My contention is supported by (Ricoeur, 2016) and (Figal, 2009). Schleiermacher’s *Universal Hermeneutics* is the first explicit attempt of philosophizing hermeneutics and thus drawing out of phenomenological underpinnings is both significant and relevant here.

2. Universal Hermeneutics and the Problematics of Rule-Following

It is with Schleiermacher we find the genesis of this general or universal hermeneutics which constitutes itself as the ultimate science where regional or local exegetical practices could find their sufficient justification. Such a discipline, historically speaking, was an epistemological necessity. Regional hermeneutic disciplines are constituted by their respective specialized rules which require further rules to justify their applications and no such art could be well-founded epistemologically if its foundational questions beg themselves or else face the possibility of infinite regress². For instance, in case of classical philology of Alexandrian School pioneered by Zenodotus and Aristarchus, an example of such a rule was the principle of analogy-anomaly. According to this principle, both conflict of interpretation and the historical authenticity of any text depended upon the regularity of language that the author uses in his composition. Anything that would defy this regularity would be considered anomalous and would thus be rejected as being historically inauthentic³. The result of this rule of interpretation was the compilation of the canons of classical Greek literature (e.g. Homer's *Iliad* and *Odyssey* and Hesiod's *Theogony*). However, the rule had an unwarranted assumption – epistemologically speaking, that the regularity of language expresses a unity of consciousness in the form of historical authorial intention. This implied a particular philosophy of language and consciousness that was never explicated or justified. Thus, an epistemological critique of this particular regional hermeneutics would either lead to infinite-regress –for instance if pursued

² I admit that these are not the only epistemological possibilities. However, in context of the debate that was being waged between *Die Aufklärer* (the enlightenment thinkers –Kant, Moses Mendelssohn etc.) and the early Romantic and radical reactionaries (e.g. Hamann and Jacobi), it was primarily the problem of unconditioned-condition as the final proposition or rule that any philosophical system had to posit in order to account the possibility of knowledge and the experience of the world. This was then the general intellectual atmosphere of German thought around the turn of the 19th century and it was this that was a main impetus behind the development of Schleiermacher's own reflection on both ethics and theology on one hand, and hermeneutics on the other. See (Beiser, 1987) for the detail of how German thought around the turn of the century was stirred by the Radicalism of Jacobi and Romantic Historicism of Hamann in context of the unconditioned-condition, and see (Bowie, 1997) for how these issues were important for Schleiermacher.

³ See (Peck, 1911, pp. 98-117), (Myres, 2014, p. 30ff) and (Dilthey, 1996) for the detail of this principle and its historical role in determining the canon of Greek Classics. Also, (Verburg, 1998, pp. 20-22, 69ff, 185ff, 219ff) should be cited for a detail of how the concept of analogy has been variedly conceptualized throughout in the practices of Biblical exegeses, philosophical grammar and philology (which also includes Alexandrian School of classical philology).

along foundationalist lines⁴, or else had to satisfy itself with an irreducibility of this principle into any further elementary principles or rules.

Philosophically speaking, a *rule* may be considered as ‘*what determines something-as-something*’. This is exactly what Kant took to be the point of departure for his investigation of searching for the ultimate rules that helps render theoretic judgment possible in his transcendental doctrine of schematism⁵. But before Kant and beyond regional hermeneutic practices, philosophical reflections on the concept of rule –with historical motivations in aesthetic evaluations of the works of art (which obviously includes literary works as well), was pursued by the German rationalist tradition, most notably the works of Christian Wolff and Alexander Baumgarten. Although aesthetically delineated with a strong rationalist lineage, a rule was defined by Wolff in his *Ontologia*, which can be interpreted to be a *proposition that determines a practice according to reason* (Beiser, 2009, p. 13). It has at least two major modifications among later aestheticians; *instrumental* and *holistic* (Ibid. pp. 13-14). Instrumental rule would determine a practice in accordance with a particular goal, whereas holistic rule is the very concept of the thing-in-itself determined as a unity-in-variety. It is the very principle that determines the thing as-itself –very much like the Aristotelian formal cause or essence determined as a modification of intellect; further inspired by Leibniz’s principle of sufficient reason (Ibid pp. 69-70, 134-135). For instance, staging a tragic drama would then involve a reasoned account or statement determining what it takes or means for a tragedy to be a tragedy holistically. However, this by no means determines it rigidly as if it was a natural occurrence determined by; say classical mechanics or Newtonian physics. For if the writer wants to arouse fear and pity among his audience in order to bring about catharsis –strictly along the holistic lines determined by Aristotle’s *Poetics*⁶, then he could follow the corresponding instrumental rule that his protagonist should be of an average virtue who would have to suffer some misfortune as a result of a mistaken judgment (Beiser, 2009, pp. 13-14). But the praxis itself produces countless many ways of confirming to the rule with significant anomalies which escapes the sufficient capturing of the praxis through any reasoned account as a rule, or the very conformity with the rule itself can eventually turn

⁴ See (Ryle, 2009, p. 5ff) for a detail of how any foundationalist cognitivist epistemology –Descartes’ foundationalist epistemology in particular, leads to an infinite regress when it aims to account for any knowledge in terms of cognitive representations.

⁵ (Kant, 1998, pp. 232 (A105-106), 268ff (A133-139/B172-179) 273 (A140-141/B179-181))

⁶ Aristotle’s conception of tragedy involves imitation (*mimesis*) of human action in dramatic poetry that involves arousing pity and fear for the sake of Catharsis. Its structural account involves six parts: Plot, Character, Language, Thought, Spectacle and Melody. Pity and fear are the qualities which plot produces among audiences, see (Butcher, 1898, pp. 25 (1450a7-9), 49-50 (1453b-1454a)) for detail.

into its defiance. For instance, within the rationalist tradition, it was soon realized that an experience of sublime and the corresponding pleasure that one derives from it creates problem for the very possibility of acculturation or education that was sought through Catharsis (which was considered to be the very justification of usefulness of tragedy for any society)⁷. It meant that pity and fear does not exhaust the repertoire of relevant human emotions to bring about the assumed or reasoned effect. On the other hand, traditional rule-boundness of tragedy –which has to be presupposed for any possibility of a critical judgment, is problematized by realizing how Shakespeare's *Hamlet* as a tragedy is either a failure or, according to T. S. Eliot, at least defective. However, either a failure or defective, it has been realized by many radical critics –most notably Lionel Abel that, in context of allowing the premise that Shakespeare was trying to create a tragedy, what he actually ended achieving was a new dramatic form totally unprecedented⁸.

One comparatively more recent example can be given from rather unusual side, that of practice of the art of pure mathematics. The rule-following here in context of axiomatized geometry or set theory is determined by the reasoned account of what it means for a particular mathematical practice to be pure demonstrative geometry or set theory. Extending rationalist aestheticians' insights, the reasoned account on instrumental side here would involve the very axiomatization itself that would guaranty that all significantly relevant practical activity has been successfully and sufficiently captured. This would correlatively develop the holistic side as the statement of axiomatic geometry as-such. However, practical activity has been proved to possess a kind of ontological priority over any corresponding theoretic or epistemological capturing by providing anomalous precedents –for instance impossibility of proving parallel postulate from rest of the axioms and definitions of Euclidean Geometry demonstratively (or even constructively). Countless many ways to overcome the problem led to the discovery of non-Euclidean Geometries with their own respective rule-following (Marvin J. G. 2007) p. 210ff, 241ff, 376ff). Thus the paradox is already there in the very conception of the rule itself. The historical dimension of practice would mean that minor and sometimes major innovations on the practical side of an art or praxis can always alter the meaning of the object being determined or interpreted rendering a rigid

⁷ (Beiser, 2009, pp. 13-14) explains Gottsched's position (as one of the representative German rationalist aesthetician) on the value of tragedy that follows from the corresponding rule-bounded aspect. Gottsched's conceptualizing of this rule-boundness is primarily an extension of Christian Wolff's position mentioned in the text above. See Ibid p. 208ff for the realization (primarily by Moses Mendelssohn within the rationalist legacy of Wolff) that experience of sublime is problematic to the presumed effect of tragedy conceived as the rule-bounded aspect within rationalist tradition.

⁸ T. S. Eliot regarded Shakespeare's *Hamlet* a defective tragedy. For a detail of this and why it is not a tragedy as such, see (Abel, 1963, p. 40ff)

rationalist account of rule susceptible to an empiricist, positivist and a historicist critique.

This helps one appreciate the role that both language and history has to offer in context of rule-following. The practical side resists itself being captured in terms of a corresponding necessary and sufficient condition as a rule, meaning that the *declarative or informative aspect of language itself can't match the ontological precedence of temporality of human action* and thus the *theory* –as a coherent and consistent collection of propositions, is never a satisfactory answer to the problem of determining the meaning of any practice or phenomenon as a rule. The flipside of this is basically nothing but severing application –subsuming a particular under a universal, from the very genesis of the universal from a particular. For every rule –as conceived by the rationalists' aesthetics, involves delineation of the practice into a proposition (or reasoned account). This amounts to the production of universal from particulars. Rule application would then involve nothing but subsuming a particular under a universal. Former was the task of the philosopher and the latter of the critic.

This easily carries over to the universal problem of interpretation itself – both as a practice or historical phenomenon. By universal problem of interpretation, I mean 'how interpretation as-such is possible?' Universal hermeneutics is what aims to answer the universal problem of interpretation⁹. Here, a 'particular' is a 'particular interpretation according to a rule within a particular regional hermeneutics'. So, for instance, keeping the question of truth and evaluation aside, canons of classical Greek literature authenticated by the Alexandrian School of Classical Philology would be one such particular for universal hermeneutics. On the other hand, universal is the very principle with its associated or correlated schema which determines it (in context of its application) as such. This schema is not one of Kantian 'determining judgment' type, which Kant transcendently founded to be the correction of rationalist conception of rule¹⁰. In fact, it is the Romanticized version of what

⁹ Universal in 'Universal Hermeneutics' primarily denotes the epistemological scope of hermeneutics in the sense of what has to answer the most primordial assumptions of any science in the sense that universal hermeneutics is what has to be presupposed if one wants to render the possibility of any science possible (in particular any human science).

¹⁰ Kant was fully aware of the debate initiated from German rationalism (pioneered by Leibniz and followed by Wolff, Baumgarten, Gottsched, etc.) about the concept of rule following; see (Beiser, 2009) for detail, especially pp. 16ff, 64ff, 74ff and 87ff. Kant spoke of two kinds of judgments, (i) determining, (ii) reflective (Kant, *Critique of the Power of Judgment*, 2000, pp. 26ff (20:223), 43ff (20:243)). Though he didn't actually make such a distinction in his first *Critique* (i.e. *Critique of Pure Reason*) but the account in his later work of *Critique of the Power of Judgment* shows that what he called 'determining judgment' was in fact the kind that he was primarily after in his first *Critique* in context of what makes scientific theoretic judgment possible. Transcendental Schemata were the process that rendered it possible (Kant, 1998, pp. 268ff (A133-139/B172-178), 273 (A141/B181)).

makes the reflective judgment possible. According to Schleiermacher, *it is the art or technique (Kunstlehre) which determines general rules, but its application is not rule bound*¹¹. This universal is then, as far as a concrete example is concerned, is not some concept which carries with it its schema as rule of application of Kantian type (like the Kantian concept of substance the particular modification of which in a singular proposition of '(a particular-) S is P' carries with it the transcendental schema of *Substance* to which a particular empirical schema that helps identify 'a particular object' as what fulfils that singular proposition, is genetically attached)¹². Continuing with the above example, a *universal would then be determined by the very art or technique which both reflexively and reciprocally helped bring about those canons*. The reciprocity and reflexivity is captured by the concept of hermeneutic circle¹³ which establishes this determination as correlative part-whole structure (and process) of interpretive understanding and save us from falling into the pitfall of the problematic of: (a) either 'subsume a particular under a universal' or (b) 'generate a universal from particular', something that Kant found himself bogged-down with. This would make Alexandrian School of classical philology itself as the institutional embodiment of the very art or universal, the practice of which helped render those canons possible. Its rule-bound aspect was regulatively determined by the methodological principle of analogy-anomaly but its corresponding application is not strictly rule-bound. The key between the canons and the corresponding art is the idea of hermeneutic circle. The regulative use of this very idea was captured in the dialectically engaged technical and grammatical aspects of his universal hermeneutics¹⁴.

¹¹ (Schleiermacher, 1998, p. 11), see also (Schleiermacher cited in Rudolf Rössler's 'A Short Account of Theological Study' mentioned in (Bowie, 1997, p. 111)) for Schleiermacher's conceptualizing of hermeneutics as that very art which theorizes this phenomenon of schematizing.

¹² See (Kant, 1998, pp. 273 (A140-141/B179-180)) for Kant's notion of schema and schematization, and (Kant, 1998, p. 275 (A144/B183)) for the detail of 'substance' as transcendental schema –i.e. a particular modifications of time as intuition

¹³ For the detail of what Schleiermacher means by hermeneutic circle, cf. (Schleiermacher, 1998, pp. 24, 27, 70). It corresponds to the structure of interpretive understanding in which an object (an utterance or text) is understood as movement between the whole (constituted by the context) and the part (the very object as-belonging to that context). It gives an alternative to a formalized theory of semantics as pioneered by Frege, Russell and Wittgenstein. On the other hand, how this whole-part can also be considered as the hermeneutic correlation between universal-particular, see Schleiermacher cited in (Bowie, 1997, p. 123)

¹⁴ This paper does not aim to elaborate on the practical and methodological details of Schleiermacher's universal hermeneutics. For the detail of how this hermeneutics is correlatively dichotomized into psychological or technical and grammatical, I would refer the reader to the original source itself; cf. (Schleiermacher, 1998, pp. 9, 11, 23, 93, 128, 140, 228-235).

Thus, Schleiermacher starts where Kant and his Romantic adversaries had left. Schleiermacher gave his general account of how such schematizations of experiences occur as linguistic rule-acquisitions and rule-following during the process of learning and using a language. Its model determination is expressed in the arts (*Kunstlehre*) which express them institutionally. According to this, an experience of learning and using a language provides the model example of how this art or universal is both acquired and used¹⁵. This was also the solution to the problematics of Kant's transcendental doctrine of schematism. Since schemata were considered to be responsible for rendering the possibility of judgment. They transcendently constituted the rule-boundness of the very act of understanding as the faculty of pure reason. But Kant was not able to explain the ground of its application. According to him, it was an art hidden deep in our souls¹⁶. Thus Kant's account of schematism was a dead end for the whole critical project. On the other hand, Schleiermacher realized that the ability to sustain identity through difference is directly related with the ability of using a finite vocabulary to make sense of the world from an indefinite differentiation (Schleiermacher, 1998, p. 271ff). Since schemata or general images of particulars are responsible for what hold the identity among differences of particulars (different triangles unified under the concept of 'isosceles triangles'), same is the case with our ability to use a word in its corresponding designation. Thus language as the system of designation holds the key in solving the problem of schematization. Both schema and word correlate. Since successful use of the word depends upon our ability to have first acquired and then used the language, and since this language is what reflexively and historically determined by these arts¹⁷, implies that it is not the transcendental account that solves the problem of schematization but language itself as system of designation is the solution, for the learning and using the language involves the rules and it is these rules which are the hermeneutic counterpart part of what schematize experiences (and thus corrective of Kant's transcendental schematism). This makes Schleiermacher's hermeneutics as the very explication of the art that Kant thought to be hidden deep in our souls. *Thus language becomes the horizon which delineates the place for occurrences of interpretive understanding such that this interpretive understanding consists of the art with general rules (without absolute algorithmic rule-bound applicability) to the extent that such an art has its genetic origin in the very emergence or historical development of language through gifted or talented geniuses.* Again, continuing with our example of

¹⁵ See *ibid* p. 271ff for how rules are acquired and used in equivalence with how one learns a language and use it. It is very much like acculturation of a child. There, rules are the norms of the culture.

¹⁶ (Kant, 1998, p. 273 (A141/B180))

¹⁷ One manifestation of how this is the case can be given by the observation of how much of the Shakespeare's dialogues have become part of ordinary English

Alexandrian philology, one modification of 'historical development of language' corresponds to the regulative determination of Greek literature through the works of Greek poetry with Hesiod and Homer being the corresponding gifted geniuses on the historical developmental side.

3. Conclusions

Schleiermacher's universal hermeneutics can thus be considered as a way out of the problematics of rule-following. Instead of grounding the possibility of judgment and intelligibility of the world; either in rationalist account of rule or Kant's transcendental schematism (the doctrine of the process by virtue of which transcendental schemata are responsible for rendering the scientific intelligibility of the world), he sought this in the arts or techniques by virtue of which language manifest itself as horizon of interpretive understanding. Thus, arts or techniques (e.g. regional hermeneutic practices, narratology, poetics, rhetoric, etc.) are for Schleiermacher the hermeneutic corrective of Kant's transcendental schemata with hermeneutic circle replacing any rationalist or transcendental deduction inspired by Leibniz's principle of sufficient reason. The end result is the possibility of understanding human historical actions which are non-positivists and still provide the possibility of criticism. The possibility of criticism is provided by another art that has the ability to make the rest of the arts (as hermeneutic corrective of rules) its object of investigation. This art is Schleiermacher's Universal Hermeneutics; for it is here that this possibility of second order reference is established. Thus, it can be conjectured here that, this may help in correcting the naïve positivistic presumptions in most of the modern empirically based modern research methodologies in the domain of human sciences; for these methodologies take both the ability of their own language and consciousness to refer their object of investigation transparent and trustworthy in building up of a *theory*, which we have already found to be dubious in context of the problematics of rule-following. This is the case since almost none of the positivistically led research questions the possibility of this ability.

References

- [1] Abel, L. (1963). *Metatheatre: A New View of Dramatic Form*. New York: Hill & Wang.
- [2] Augustine, S. (1912). *St. Augustine's Confessions* (Vol. I). (W. Watts, Trans.) New York: The MacMillan Co.
- [3] Beiser, F. C. (1987). *The Fate of Reason: German Philosophy from Kant to Fichte*. Cambridge Mass.: Harvard University Press.
- [4] Beiser, F. C. (2009). *Diotima's Children: German Aesthetic Rationalism from Leibniz to Lessing*. New York: Oxford University Press.
- [5] Bowie, A. (1997). *From Romanticism to Critical Theory*. New York: Routledge.
- [6] Butcher, S. H. (Ed.). (1898). *The Poetics of Aristotle*. (S. H. Butcher, Trans.) London: Macmillan & Company Ltd.
- [6] Diltthey, W. (1996). The Rise of Hermeneutics. In: R. A. Makkreel, & F. Rodi (Eds.), *Wilhelm Diltthey's Selected Works: Hermeneutics and the Study of History* (F. R. Jameson, & R. A. Makkreel, Trans., Vol. IV). 1st ed. New Jersey: Princeton University Press, pp. 235-258.
- [7] Figal, G. (2009). "Hermeneutics as Phenomenology". *Journal of the British Society for the Phenomenology*, 40(3), 255-262.
- [8] Hirsch, E. D. (1967). *Validity in Interpretation*. New Heavens: Yale University Press.
- [9] Kant, I. (1998). *Critique of Pure Reason*. (P. Guyer, A. W. Wood, Eds., P. Guyer, & A. W. Wood, Trans.) New York: Cambridge University Press.
- [10] Kant, I. (2000). *Critique of the Power of Judgment*. (P. Guyer, Ed., P. Guyer, & E. Methews, Trans.) New York: Cambridge University Press.
- [11] Marvin J. G. (2007). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. New York: W. H. Freeman and Company.
- [12] Myres, J. L. (2014). *Homer and His Critics*. New York: Routledge.
- [13] Peck, H. T. (1911). *A History of Classical Philology: From the Seventh Century BC to the Twentieth Century AD*. New York: The Macmillan Company.

- [14] Plato. (1997). Cratylus. In J. M. Cooper (Ed.), *Plato: Complete Works* (C. D. Reeves, Trans.). 1st ed. Indianapolis: Hackett Publishing.
- [15] Ricoeur, P. (1979). *Interpretation Theory: Discourse and the Surplus Theory of Meaning*. Fort Worth: The Texas Christian University Press.
- [16] Ricoeur, P. (2016). Phenomenology and Hermeneutics. In J. B. Thompson (Ed.), *Hermeneutics and the Human Sciences* (J. B. Thompson, Trans.). 2nd ed. New York: Cambridge University Press, pp. 61-90.
- [17] Ricoeur, P. (1989). *Conflict of Interpretation: Essays in Hermeneutics*. (D. Ihde, Ed.) London: Continuum.
- [18] Ryle, G. (2009). *The Concept of Mind*. New York: Routledge.
- [19] Schleiermacher, F. (1998). *Hermeneutics and Criticism: And Other Writings*. (A. Bowie, Ed., & A. Bowie, Trans.) Cambridge: Cambridge University Press.
- [20] Verburg, P. A. (1998). *Language and its Functions*. (P. Salmon, Trans.) Amsterdam: John Benjamins.

Mediterranean Civil Economy and the European System

Catia Eliana Gentilucci*

Received: 21-02-2018. **Accepted:** 01-04-2018. **Published:** 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.403

© Catia Eliana Gentilucci



Abstract

This paper argues that: a) the indiscriminate application of the German model to all European countries (mainly to Mediterranean Catholic countries) has fostered economic growth in the EU at different speeds; b) Italy, the cradle of Catholic capitalism, is currently attempting to react against austerity measures - imposed by the economic constrictions of the German model – by focusing on the third sector and non-profit companies. **Keywords:** Rule-Following, Universal Hermeneutics, Schematization, Understanding (*Verstehen*), Interpretation (*Auslegung*), Schleiermacher.

Keywords: Civil economy, Social Market Economy, Catholic capitalism.

* University of Camerino, Italy; ce.gentilucci@gmail.com.

1. Introduction

As is known, the economic crisis of 2008 caused several American financial giants to collapse, modifying the macroeconomic structure of the global capitalist economy, affecting Europe and Italy, too. This has led economic systems towards a structural crisis which is still being felt in terms of growing unemployment and wage disparity. The adoption of the Treaty of Lisbon (2009) brought the competitive social market economy model to Europe, based on restrictive monetary policy. In this way, a European economy which has been adopted, based on anti-Keynesian restrictive economic policies (both fiscal and monetary), has steered Europe towards austerity and a resulting recession.

In an attempt to exit the recession, Italy has chosen to turn to its Franciscan-Catholic vocation for solidarity, incentivising the non-profit sector (and green social farming in particular) and a new corporate culture whose mission is inclusive growth.

In this study, we will see that in order to better comprehend the distance separating Italian/Mediterranean and Euro/German economic thought, it will be necessary to look back to the two souls of European capitalism.

2. The Dual Souls of European Capitalism

It is possible, in today's Europe, to discern two logics of Capitalism: the Lutheran, which is rational and pursues the efficiency of economic aims which sees the State as the only institution able to guarantee the existence of a free market¹; and the Franciscan-Catholic, which prioritizes social interests and aims for economic efficacy, seeing civil society as an organisation which acts between market and State for the common good.

In this sense, Latouche's essay, *Minerva's challenge* (2000, 62), separates the 'reasonable' from the 'rational'. The reasonable is seen as the wisdom of economic behaviour based on the efficacy of the desired result, that is to say on its economic and social impact (ie: the number of individuals who benefit from results). The rational, instead, represents the a-valorial economic logic of the efficiency of economic results (with no reference to ethical values).

¹ We refer to what is known as the theory of Luther: original sin marked man with a sin which no penance could remove; for this reason, man lives in a highly anguished state, until the day he dies, as he is not able to know if God will decide to save him, despite being a sinner. One consequence of this theory is allowing Man to behave as he thinks best, relying solely on his conscience. Luther has had to recognise the State must wield significant power in order to stop the freedoms of individual conscience from rendering any form of coexistence possible. In Protestant countries, therefore, the individual is either anarchically opposed to the State or sees it as a demiurge. Civil society, which could reduce the distance between State and individual, does not really exist (Zanotto 2005, p. 146). See: *Teoremi di politica cristiana*, Mendrisio, Tipografia Ticinese, 1839; Max Weber (1965 (2002)).

In Economics, theoretical constraints ensure that rationality is detached from other overlapping spheres like politics, the social and human relations. Reasonableness is evident in those behaviours that combine a logic of rationality with priorities of other nature: social, political and humane.

The bond between reasonableness, efficacy and ethical values is characteristic of the Mediterranean (Franciscan) civil economy; while the rational, efficient and a-valorial are prevalent in the German social market economy (as applied to the economies in the European system).

The distance between Italian-Catholic capitalism and German-Lutheran capitalism is evident on two fronts. The first, deriving from the Lutheran reform (Reformation) which saw two cultures clash: the ancient Latin culture, refined by the Renaissance and the Catholic age; and the German, coarser and cruel (Fanfani 1961, 508). Under Bismarck, and Kulturkampf, there was hostility towards the Church. The Lutheran dynasty reached its highest form of expression with the May Laws (1873), which removed almost any form of power from the bishops (Valente 2004, 179); XIII Century German culture possessed these characteristics because it had not experienced religious dominion (Weber 1965 (2002), 88).

1.1. Saint Francis vs. Martin Luther

Lutheran capitalism derives from Martin Luther's vision of the human condition, in which man, guilty of original sin, can only find salvation by living a life of conscious repentance, at the end of which only God can grant eternal salvation.

This pessimistic view colours man's life with an inner struggle as he tries to do the best for himself (individualism and selfishness) in the hopes that he will be saved. Subsequently, all contacts with other men will be influenced by the fact that each man will focus solely on his own goals in order to obtain the best results. This view of the world exalts individualism, competition and efficiency, all values which are central to late Nineteenth-century Anglo-Saxon capitalism.

Nineteenth-century positivism (formulated by the French author Comte, while J. S. Mill e H. Spencer were its main exponents in Great Britain) – gave even more strength to the Lutheran spirit within a rational economic vision which had as its main priority the achievement of individualist aims and gave origin to the theory of neoclassical capitalism. This system, which came to Italy in the early Twentieth century, was influenced by a less individualistic Catholic viewpoint and was inspired by the Franciscan conviction that original sin can be expiated through a life of good deeds, altruism and poverty (possessing only what is necessary to live a dignified life, and sharing any excesses).

1.2. Catholic Civil Economy

Civil economy is a system of thought, defined in the studies of Stefano Zamagni² and Luigino Bruni (Bruni, Zamagni 2004), that conveys an idea of the market that is humane and centered on relational goods and reciprocity³. In the Franciscan model, reciprocity possesses a strong human value and is aimed at the recognition of the other as an integral part of the greatness of the universe.

Reciprocity goes beyond family ties, economic relations between people, or fraternal bonds: it is man's reciprocal recognition of his sense of belonging to Creation (Bazzichi 2016). In this sense, reciprocity was included in the economic thought of the school of civil economy and activities pertaining to the Third Sector, economic pillar (between State and Market) of the social system⁴.

In Italy, this vision has its roots in the XIII century Franciscan school⁵ and the humanism of the XV century which placed Man, in contemplation of Creation, at its centre, accepting of his status and putting himself at the service of humankind (Bazzichi 2016 and Niccoli 1967).

As is known, the central ideas of Franciscan thought are poverty, gratuity, searching for fulfillment through work and commitment towards others, charity towards the needy, and sharing ones riches. These attitudes can be summed up in altruism, reciprocity and social equity – values that are at the basis of contemporary civil economics.

Poverty implies the search for one's own well-being and the common good in objects and relationships that are not, naturally, subjected to economic evaluation (friendship, fraternity, solidarity, reciprocity). In this way, wealth is no longer exclusively material in nature, but also, and most importantly, imbued with spirituality by the things of the world (Creation) and its creatures

² Stefano Zamagni, full professor of political economy, University of Bologna, is one of the major theorists of civil economy. From 2007 to 2011, he was President of the Agency for the Third Sector (a Government agency of Public Law operating under the Presidency of the Council of Ministers).

³ Zamagni and Bruni (2009) claim that «relational goods are those human relations which cannot be 'produced' or 'consumed' by a lone individual, as they depend on the ways and reasons that motivate human interaction and consequently can only be enjoyed when they are shared in a reciprocal manner». Reciprocity is a fragile intersubjective relationship based on an act of generosity that, unlike economic exchanges, is unrecognised by law. In reciprocity, A pledges an act of generosity to B (a gift) expecting not payment but that B might do the same thing for A, or others. Morally speaking, reciprocity is more demanding than exchange as it requires loyalty, honesty, responsibility and care for others. It is not self-serving (exchange of a good and its value) but a gesture towards the common good and the division of common values.

⁴ For these reasons, civil economics is in opposition to the social market economy model.

⁵ See also: Barucci (1961), Baldini (2001), Bruni (2006), Bruni and Porta (2006), Bruni and Porta (2007), Zamagni e Bruni (2003), Gentilucci and Testa Bappenheim (2013).

(Todeschini 2004, 59-60). Monastic poverty as experienced in religious (Franciscan) communities or monasteries can be seen as an economic and institutional way of life in which personal renunciation coincides with the enhancement of public heritage (Bazzichi 2016).

In the thirteenth century, with the Franciscan Order, Francis's attitude towards the world started to move towards what is now known as Civil economy.

This school of thought is not limited to the Italy of St. Francis of Assisi and the Italian Renaissance but can also be found in Spain with the School of Salamanca⁶.

In Spain, a worldview inspired by the thought of St. Thomas Aquinas came into being between the XVI and early XVII centuries (Zanotto 2005, 38). The Spanish Scholastics, seen as the first real economists by Joseph Schumpeter, were theologians who attempted to harmonise faith, reason and social reality by inviting governments to follow a rigorous ethic. The crucial factor being the identification of a theory of value that considered the objective and subjective factors that contribute to making trade fair (Melè 1999 and Elegido 2009).

The School of Salamanca forms a bond between Italy and Spain, leading from the XIII century's Thomism to the Neo-Thomism of the XX century (Don Curzio Nitoglia 2015). Its protagonists influenced the writings of *Rerum Novarum*, published in 1891. From the XIII to the XIX century, in fact, a Mediterranean logic of economics, more civilised and geared towards the social⁷ (compared to the reasoning that developed in Germany with Martin Luther, and France with John Calvin (Knio 2013)), emerged in Italy and Spain, putting the individual, with his relational values, and the collective, with its ethical and moral principles, at the centre of the economy (Banyuls, Miguélez, Recio, Cano, Lorente 2009). Latouche also recognises a Mediterranean tendency to take into account the complexity of socio-economic relations, the diversity of production and ethical and social values.

However, the path of Civil economics, from St. Francis to the present day, is long and discontinuous. From the end of the eighteenth and early nineteenth

⁶ The School of Salamanca was a group of theologians and philosophers who taught at the University of Salamanca, following the input of the Thomist Francisco de Vitoria who was responsible for significant theories of economics and international law, in particular regarding financial issues and international contracts (Rivas 1999). The most comprehensive study on the School of Salamanca is attributed to Marjorie Grice Hutchinson, a pupil of F. A. Hayek. In it, she maintains that the economics of the free market originate in Spanish Catholic scholasticism. In his *History of Economic Analysis* (1954), J. A. Schumpeter affirms that Italian, Spanish and French Franciscan scholastics distinguished themselves by theorising the stimulating role of creative entrepreneurship in the free market (Zanotto 2005, p. 40).

⁷ See Zamagni: sites.google.com/site/uominieculture/people/stefano-zamagni/zamagni-su-avvenire-2009.

centuries onwards, the influence of Positivism mathematised economic thought in an attempt to make economics a pure science, removing the social sphere from the concerns of scholars. Civil economic thought in the nineteenth century remained in the background, though there have been authors who have kept its principles alive (Gentilucci 2015).

Thus, the years spent preparing *Rerum Novarum* were rich in ideas of a social bent and it was drafted during the challenging conditions brought by social issues and the accompanying discussion on capitalism and socialism (Manzalini 2008, 79).

Between 1884 and 1885, the Church held several meetings on the social programme of the Catholic doctrine. These meetings were frequented by the Jesuit Matteo Liberatore, Count Edoardo Soderini, and the priest, Salvatore Talamo⁸. Inspired by the discussions held in this circle, two books were published: one by Matteo Liberatore, *Principi di economia politica* (1889) and the other by Antonio Burri, *Il lavoro: studio sociale* (1888).

The 1891 Encyclical paved the way for the 10-yearly publication of other social encyclicals until the most recent, *Praised Be* (2015) of Pope Francis, which is particularly sensitive to environmental issues. Pope Francis reminds us of the force with which St. Francis contemplated Creation, seen by him as proof of the bounty of the Lord. As is known, the *Canticle of Creatures* praises the environment, as well as speaking of a love for all creatures. In Franciscan thought, this becomes an undying commitment towards our neighbours and the recognition of human value within the economic sphere.

The ethical principles and moral values found in the Social Encyclicals are set out in the *Compendium of Social Doctrine of the Church* (Pontifical Council for Justice and Peace, 2004) and still stand as the foundations of the tradition of civil economics heralded by the Franciscan school. For our purposes, it is interesting to note that this train of thought was also influenced by the founder of Opus Dei: the Spaniard, Josemaria Escrivá de Balaguer (Zanotto 2005, 8).

This combined Italian-Spanish Mediterranean train of thought continued from the late XX century and came to light in the school of civil economics, which offers a new way of seeing economics as shown in the work of Zamagni. A humanised science based on solidarity, reciprocity, gratuity which seems to indicate a path of sustainable growth and proposes solutions for escaping the current economic crisis.

⁸ Matteo Liberatore founded the magazine *La Civiltà Cattolica* in Naples, 1850. Salvatore Talamo and Giuseppe Toniolo founded the magazine, *Rivista internazionale di Scienze Sociali* in 1893.

1.3. German Capitalism

If Franciscan thought influenced the view of society in Mediterranean culture, Lutheranism, as already said, shaped the social market economy school of thinking which today is the basis of European economic systems as foreseen by the Treaty of Lisbon⁹.

This interpretation is suggested by the words of ordoliberalist Röpke, according to whom German statism derived from lutheranism, which was mistrustful of social liberty, and held that rules and institutions made certain that the market acted in a neutral manner, in full respect of the natural law of competition (Felice 2008, p. 13).

Social market theory has its origins in ordoliberalism (Freiburg School) (Forte 2015, p. 15), a liberal school of thought developed in the 1930s as an answer to the profound economic and political crisis Germany was undergoing.

The Freiburg School was influenced by Von Mises' work *Nation, State and Economy* (1919), which advocated the need that free competition be regulated within an institutional framework¹⁰.

Forte and Felice (2010, 20) claim that the market should act by following natural laws of «price as indicator of scarcity», regulated by constitutional laws, that is to say: «interventions that do not suppress price mechanisms or the market's capacity to govern itself, but are included as new data».

Political economics cannot, therefore, go beyond the provisions of Law, which involves an «anti-keynesian policy» of controlling aggregate demand (and public spending in particular).

To our ends, it is worth mentioning Wilhelm Röpke, who concluded the debate on social market economy in his 1958 work, *Beyond supply and demand. Towards a human economy*¹¹.

In Röpke's view, the market should base its actions on a system of values; the State is allowed to intervene, but its actions must always conform to the

⁹ In Italy, economists such as Gotti Tedeschi (2008), Mario Monti (2008), Franco Bassani (2008) and G. Bazoli (2008), aware that the economic era founded on the State's role in supporting aggregate demand had come to an end, asked that the rules of the free market be respected, referring to the Treaty of Lisbon (signed 13 December 2007, it came into force on 1 January 2009) in which, under art. 2 comma 3 it reads: "The Union shall establish an internal market. It shall work for the sustainable development of Europe based on balanced economic growth and price stability, a highly competitive social market economy, aiming at full employment and social progress, and a high level of protection and improvement of the quality of the environment. It shall promote scientific and technological advance."

¹⁰ For a history of Social Market Economy see the numerous contributions of Francesco Forte and Flavio Felice.

¹¹ In Röpke's previous writings – *The Social Crisis of Our Time* (1942) and *International Order* (1945) – Social Market Economy is understood as a «third way between liberalism and socialism».

principles of a free market. In this view of the economic system, free competition is seen as the best possible condition, excluding value judgement on the equity of results obtained and championing the above-mentioned values of «rationality-efficiency-avaloriality».

Röpke's ideas came to Italy as well, thanks to Luigi Sturzo and Luigi Einaudi (Forte 2016). For Felice and Angelini (2014, 45-47), the Röpke-Einaudi model accounted for the principle of subsidiarity, though only when compatible with a competitive market intervention (Forte and Felice 2010, 68). Luigi Sturzo's model can be summarised as follows: political and economic freedom is unique and individual in nature; the main role of the State is to watch over and guarantee collective and private rights, maintain public order, national defence, protect credit and monetary systems; and subsidiarity as a fundamental requisite of democratic progress.

There was so little interest for the principles of market economy while the Italian Constitutional Assembly was in session that Luigi Einaudi was not able to steer their views towards the German model, even though he saw it as the «third way» (Forte-Felice-Forte 2012), an alternative to Socialism and the free market, regardless of his 1946 election as Deputy in the very same Assembly, the fact that he was an economist and a politician of undeniable merit, too.

1.4. Exporting State-Building?

As anticipated in the introduction, the Lisbon Treaty, in applying the German economic model unconditionally to all European countries, actually created paradoxical situations: Italy, a country historically economically close to social issues, solidarity and sharing, has had to apply a form of management that is rational and a-valorial which contradicts social needs and historical necessities (for example, the immigrant crisis and solidarity towards the socially disadvantaged).

The basic idea is that applying economic criteria as set out in the German model to the entire European area would guarantee a stable future for the eurozone (by controlling inflation, the containment of economic crises and increased competitiveness in world markets).

In truth, however, economic systems answer to their own culture and histories. Referring to a well-known discussion on state-building, it is not possible to export and apply economic systems to societies which are not culturally able to receive them.

More recently still, Amintore Fanfani (1961) observes that the XV century is significant for the creation of an Italian capitalistic spirit that, unlike the German, sees business as being at the service of society.

Therefore, in the writer's opinion, the application of the German (Lutheran) model to European countries (and countries in the

Catholic/Mediterranean tradition in particular) has contributed to the growth of a two-speed system in Europe.

Restrictions imposed by this system have meant cuts to public spending, in primis the welfare state, and local institutions, made necessary by enforcing economic policies of austerity. These cuts hold back economic growth; in Italy, the percentage of people living in poverty has increased in recent years¹².

3. The Welfare State and Sustainable Growth

We have, thus, affirmed that the Mediterranean cultural and social tradition is different to the German and because of this, applying this model to all European countries has caused a two-speed growth (Greece's default in 2015; Brexit in 2016).

We have also said that in an attempt to keep up with the financial restrictions imposed by Germany, Italy has acted by making cuts and rationalising public spending (spending review), though these actions have resulted in an evident increase in unemployment, above all for young people, and a structural change in economic and social equilibriums. Regions and municipalities have had to deal with expenditure cuts and controlling aggregate demand. The application of the Lutheran model to Mediterranean countries has created the inconveniences and difficulties currently debated (Panebianco 2012).

We have also stated that the largest difference between these two models is faith in the market's ability to achieve the best economic results. In aiming for efficiency, market economy views free competition (via free negotiation) as the best possible method to achieve the best results as well as the highest levels of global competitiveness. Monetary policy must therefore be restrictive and free markets must be checked (even if results are uneven, and show themselves in lower wages, the impoverishment of some classes or price levels that curb consumption).

On the other hand, the Mediterranean civil economy, aiming for efficacy and results with a positive social impact, has less faith in the ability of markets to obtain the best results and allows for state intervention in order to support (sustainable) consumption, investment and the fair distribution of wealth (Keynesian policies) (Conti 2015).

¹² In 2015, 1 million 582 thousand households were living in absolute poverty (6,1% compared with 5,7% in 2014) for a total number of 4 million 598 poor: the highest number recorded since 2005. Essentially there are as many poor people as there are inhabitants in the Veneto region. (Ottaviani 2016) and (Cottone 2016).

In Italy, a certain degree of care for one's neighbour as well as the disadvantaged, has traditionally been passed down through the generations, in so far as to include the welfare state in the Constitution of the Republic¹³.

In fact, Italy is actually looking towards the world of profit, through a combination of organisational efficiency and social efficacy. Thanks to the rationalisation and revision of public spending imposed by Europe, Italy currently has less resources to apply Keynesian policies supporting development, but thanks to the contribution of the third sector is contemplating a «welfare society».

And finally, the politics of today tend to highlight the fact that austerity does not create social and economic stability and it is, consequently, necessary to return to the type of public spending which is able to boost the economy (while avoiding waste). History is showing us that Project Europe, as envisaged by the Lisbon Treaty, is encountering many difficulties.

3.1. The Third Sector

Due to cuts on public spending imposed by Europe, Italy, faithful to her spirit of solidarity, is reacting to the economic crisis by applying a “welfare society” approach which is based on strengthening the third sector and social enterprises (which include the green economy and civic agriculture).

The role of social enterprise in Italy has become so important that it has been granted legal recognition (Enabling Act of August 2016). In Italy, the third sector comprises over 300 thousand non-profit organisations generating a yearly income of about 63 billion euro involving 6,63 million volunteers of whom 3 million participate without being part of an organization.

This type of business can be found in Germany, too, but its conditions and prospects are quite different. First of all, there is no law granting an autonomous role to social enterprises and the third sector, differentiating them from ‘for-profit’ operations. Furthermore, as indicated by Boccaccini (1993, 279), there is a substantial difference between the Italian third sector, strongly characterised by “solidarity”, and the German which maintains an aid-based approach. This distinction has its roots in the cultural heritage common to catholic countries, compared to those in which protestantism is prevalent. The reference to solidarity puts a spotlight on altruistic and reciprocal leanings of an intersubjective nature that are not present in a welfare approach.

In Germany (Defourny-Nyssens 2008, 23) (Gros 2014), in a legal sense, social enterprises are included under the general umbrella of insurance companies, limited liability companies, cooperatives and foundations which have economic, political and legal restrictions which in turn limit economic

¹³ The welfare state is recognised by the Italian Constitution under articles: 3, 4, 9, 29-38, 41-47.

activity in social enterprises. Many of these are not even able to access funding for the private sector¹⁴.

3.2. The Transdisciplinarity

A decisive factor for sustainable growth is transdisciplinarity.

In order to adopt growth strategies for the XXI century, we must have to get out of the ivory tower (or restricted environments) of individual disciplines and open up to broader discourses that embrace culture, innovation, society, law and man. Even in this, Saint Francis has taught us to be open to others and to their truths, thus avoiding a situation in which we isolate ourselves in the belief of being above others. Each discipline contains a truth to be seized, and these multiple truths allow us to find the best way in which to solve specific issues and reach specific goals. This view of science, influenced by the ancient Latin culture, is very Mediterranean.

Italy is showing herself to be capable of adopting sustainable growth strategies, allowing her to combat high industrial unemployment.

The pillars on which this strategy is based are: sustainable growth; inclusive growth to favour social and territorial cohesion¹⁵.

3.2.1. Sustainable Growth

In the context of Mediterranean civic economy, founded on the principle of reciprocity, the enhancement of social needs and the recognition of the third sector as an autonomous economic sector, it is possible to include social enterprise.

Italian social enterprise has seen a noticeable return to local knowledge and skills (as demonstrated by the Italian industrial districts) that enhance the territory and its specificity. It is characterized by networks of small and micro local systems that work together in a multi-relational dimension, attracting numerous local realities (urban planning and landscape, economic, environmental, historical, social, recreational).

The mission of social enterprise is, as a matter of fact, to enable sustainable development (respecting the environment and producing goods and services with a social vocation) that takes into account the overall complexity and, therefore, interdisciplinary nature of the actions involved (social, environmental and economic). The multifunctional character derives from the creation of external effects in an environmental, landscaping, goods security, educational, social and health care, recreational, eco-friendly setting.

¹⁴ Report of the Italian Chamber of Commerce for Germany, October 25 2012; <http://itkam.org/2012/10/cosa-significa-fare-impresa-sociale-germania-normativa-numeri-esfide/>

¹⁵ http://www.aiccon.it/file/convd/doc/quaderno15x21_economiasociale_web__1_.pdf

Caporali (2010) observes that, when giving pointers for social enterprise, scholars should consider a multidisciplinary, multisectoral approach. The author is of the opinion that it is common practice for international institutions to measure the sustainability of social enterprise through socio-economic performance indicators. In this sense, studies on social enterprise might lead the way in introducing an approach that is open to diverse circles which have erroneously been considered separate.

In fact, social enterprise functions as a territorial, participative, relational model which puts local organisations in a logic of service, proposing a model of welfare society which appreciates identities, protection and freedoms of all citizens.

The term social enterprise was used for the first time by Lyson (1999) at the annual meeting of the Rural Sociology Society, underlining the connection between economic growth, food needs and the civic duty to respect the environment.

Social enterprise responds, therefore, to the characteristics of alternative development proposed by civil economy. It arises from the need to find alternative sources of income compared to those of the old Anglo-Saxon capitalist production processes, from the need to heal the social divisions that have arisen in the capitalist system and from the need to fill the vacuum in the local welfare sector, originated by the spending review imposed by Europe.

3.2.2. Inclusive Growth: a Shared Value

A shared value is conceived as the set of policies and practices that enhance the competitiveness of a company, improving economic and social conditions in the communities in which it operates. Shared values include social objectives, which aim to optimize welfare society, and the multi-functional effects of the productive sectors of goods and services.

The same assessment of the productive and organizational performance of non-profit companies depends on the level of fulfilment of shared values (that is, the social impact of the activity undertaken) because non-profit businesses are conceived as an instrument for creating social value.

The ability of a social enterprise to meet the requirements specified in the shared values of the community of reference is evaluated according to Corporate Social Responsibility (CSR). One method for evaluating CSR proposed by Europe is stakeholder satisfaction, which is used mostly in evaluating the multifunctional impact of social enterprises (Piorr, Müller 2009).

CSR is inspired by an economic theory elaborated in 1984 by Robert Freeman (mathematician and philosopher) according to which the purpose of a capitalist company, albeit listed on the stock exchange, must be to make profits and share social and ethical interests with all stakeholders.

Interestingly, these concepts appear in a publication issued in 1968 by the Italian economist Pallavicini, the creator of the "parameter breakdown method", which calculates the performance of a business in a manner which is not strictly economical and includes ethical, moral, social, cultural and environmental aspects.

The contribution of Pallavicini and Freeman is in sharp contrast with the still-dominant theory of profit enterprise (capitalist and neo-classical) drawn up in 1970 by the Nobel prize for economics Milton Friedman (father of the restrictive monetarist theory adopted by the European market) which identifies the ultimate aim of company policy as being exclusively in the financial interests of shareholders. It is a rational view of the economy that considers the social dimension of a firm as an obstacle, rather than an incentive for improvement.

4. Conclusions

The chain reaction regarding austerity measures imposed by the European Union and the consequent recession has led to a structural change affecting the countries which are part of it. Italy, with its Mediterranean culture, is demonstrating an ability to react, and is managing to avoid adopting a system that does not belong to it in a passive manner, by employing its own cultural tools based on the values of solidarity and social cohesion.

Italy is proposing a new economic and social paradigm to Europe, based on sustainable growth which translates into respect for the environment and territorial enhancement. In Italy, the non-profit sector is becoming a new culture of enterprise and a new way of doing business which is also recognised by the legal system, a situation which puts the country at an advantage compared to other European member states.

References

Angelini, Fabio, and Felice Flavio. "Una sfida per l'Europa tra rigore nei conti pubblici e tutela dei diritti sociali." *Nuova Economia e Storia*, Anno XX, 1-2, 2014: 45-47. Print.

AA. VV. *German Neo-Liberals and the Social Market Economy*. UK: Palgrave Macmillan, 1989. Print.

Baldini, Massimo. *Il liberismo, Dio e il mercato*. A. Armando: Roma, 2001. Print.

Banyuls, Josep, Fausto Miguélez, Albert Recio, Ernest Cano, and Raúl Lorente. "The Transformation of the Employment System in Spain: Towards a Mediterranean Neoliberalism?." *European Employment Models* 2009: 247-69. Web.

Barucci, Piero. "Economia e incivilimento in Gian Domenico Romagnosi." *Giornale degli economisti e Annali di economia* 20 Nov. 1961. Print.

Bassanini F. and Monti M., 2008, "La commissione Attali e l'Italia", *Liberare la crescita*. Edited by J. Attali Milano: Egea-Rizzoli.

Bazzichi, Oreste. "Il valore relazione del paradigma francescano", *La Società* July 2016 (4): 52-68. Print.

Bazoli G., 2008, "Banche ragioni del merecto e responsabilità sociale", *Il Soe* 24 Ore, 14 Agosto.

Boccacin, Lucia. "Il terzo settore in Germania e in Italia: elementi per una comparazione." *Vita e Pensiero. Studi di Sociologia* 1993 (31.3): 269-281. Print.

Bruni, Luigino. *Civil Happiness: Economics and Human Flourishing in Historical Perspective*. Routledge: London 2006. Print.

Bruni, Luigino and Porta Pier Luigi. *Felicità e libertà*. Guerrini e Associati: Milano, 2006. Print.

-----, *Handbook On The Economics Of Happiness*. Edward Elgar: Cheltenham, 2007. Print.

Caporali, Fabio. "Agroecology as a Transdisciplinary Science for a Sustainable Agriculture." *Biodiversity, Biofuels, Agroforestry and Conservation Agriculture* 2010 (5):1-71. Web.

Conti, Giuseppe. "Le due terze vie: la regolazione macro e micro economica del capitalismo. Una riflessione." *E-papers Dipartimento di Economia e Management*. Università di Pisa 2015 (195). Web.

Cottone, Nicoletta. "Istat. In Italia record negativo: quasi 4,6 milioni di persone in povertà assoluta." *Il Sole 24 Ore* 14 Luglio 2016. Web.

De Gasperi, Alcide. *I tempi e gli uomini della Rerum Novarum*. Edizioni Vita e Pensiero: Milano, 1931. Print.

Defourny, Jacques, and Nyssens Marthe. "Social enterprise in Europe." *European Research Network* 2008. Web.

Di Nucci, Loreto. "Alle origini dello stato sociale nell'Italia repubblicana." *Cittadinanza, individui, diritti sociali, collettività nella storia contemporanea*. La collana degli Archivi di Stato: Padova, 2002. Web.

Don Curzio, Nitoglia, "La Seconda, la Terza Scolastica e il neotomismo." Post 18 August 2015. Web. Elegido, Juan Manuel. "The Just Price: Three Insights from the Salamanca School". *Journal of Business Ethics* nov. 2009: 90-104. Print.

Fanfani, Amiltore. *Storia economica. Parte prima. Antichità, Medioevo, Età moderna*. UTET: Torino 1961.

Forte, Francesco, and Felice Flavio. *Il liberalismo delle regole. Genesi ed eredità dell'economia sociale di mercato*. Rubbettino: Roma, 2010. Print.

Forte, Francesco, Felice Flavio, and Forte Clemente., *L'economia sociale di mercato e i suoi nemici*, Rubbettino, Roma, 2012. Print.

Freeman, Edward R. *Strategic Management: a Stakeholder approach*. Pitman: Boston, 1984. Print.

Gentilucci, Catia E., and Testa Bappenheim Stefano. "La questione morale dello sviluppo dei commerci ad Assisi. L'usura per il diritto canonico." ed. *Di Stefano Emanuela: Produzione e commerci nelle province dello Stato Pontificio*. Centro Ricerche Ambiente e Cultura Economica: Perugia, 2013. Print.

Gentilucci, Catia E., "L'insegnamento sociale delle Chiesa dalla Rerum Novarum ai giorni nostri." *Studi economici e sociali* 2015 (2): 83-106. Print.

Gotti Tedeschi E., 2009,. "una costosa illusione", *L'Osservatore romano*, 21 settembre.

Gros, Daniel. "Germania: un modello da seguire?". www.aspeninstitute.it: 2014. Web.

Knio, Karim. "The Role of Ideas and Interests in the EU-Mediterranean Policy." *The European Union's Mediterranean Policy: Model or Muddle?* 2013: 97-126. Print. Latouche, Serge. *La sfida di Minerva. Razionalità occidentale e ragione mediterranea*. Bollati Boringhieri: Torino 2000. Print.

Lyson, Thomas A. "Civic Agriculture: Reconnecting Farm, Food, and Community." *Civil Society: Historical and Contemporary Perspectives* 1 June 2004. Paperback. Web.

Monti Mario, 2008, "Le conseguenze economiche di Bush", *Il Sole 24 Ore*, 22 Agosto.

Manzalini, Fiorenza. "La Rerum Novarum e la nascita della dottrina sociale della Chiesa." ed. *Barucci Piero: I cattolici, l'economia e il mercato*. Rubbettino: Catanzaro, 2008. Print.

Melé, Doménec. "Business Ethics in Spain: The Salamanca School (1526-1614)." *Journal of Business Ethics* nov. 1999 (22.3): 175-189. Print.

Niccoli, Mario. *Gli scritti di San Francesco*. Tumminelli Editore: Roma, 1967. Print.

Ottaviani Jacopo. "In Italia una persona su 13 vive in povertà assoluta." *Internazionale* 18 June 2016. <<http://www.internazionale.it/opinione/jacopo-ottaviani/2016/07/18/italia-poverta-istat>>. Web.

Pallavicini, Giancarlo. *Strutture integrate nel sistema distributivo italiano*. Giuffré Editore: Milano, 1968. Print.

Panebianco, Stefania. *L'Unione Europea potenza divisa nel Mediterraneo*. Egea: Milano, 2012. Print.

Pierr, Annette, and Klaus Müller. *Rural Landscapes and Agricultural Policies in Europe*. Berlin: Springer, 2009. Print.

Rivas, Léon G. "Business Ethics and The History of Economics in Spain. The School of Salamanca: A Bibliography." *Journal of Business Ethics* nov 1999 (22.3): 191-202. Print..

Roccisano, Federica. "Social Economy and Solidarity in the Mediterranean Area: Participation, Sustainability and Revolution." *Financial and Monetary Policy Studies* 2013 (36): 197-213. Print.

Schettini Gherardini, Jacopo. "La finanza etica: evoluzione e trasformazione in Etica, futuro e finanza." *Edizioni Il Sole 24Ore* oct. 2002. Milano. Print.

-----, *La Corporate Governance negli intendimenti dell'Unione Europea e dell'OCSE. Il Sistema Bancario italiano: analisi delle Banche quotate*. Standard Ethics-Aei: Bruxelles, 2005. Print.

Todeschini, Giacomo. *Ricchezza francescana. Dalla povertà volontaria alla società di mercato*. Il Mulino: Bologna, 2004. Print.

Valente Massimiliano, 2004, *Diplomazia pontificia e kulturkampf: la Santa Sede e la Prussia tra Pio IX e Bismarck, 1862-1878*, Roma: Editori Studium.

Weber Max, 1965, "Protestantesimo e spirito del capitalismo", (Trad. it.) in: *Sociologia della religione*, vol. 4, a cura di Pietro Rossi, Torino, Edizioni di comunità, 2002, vol. 1.

Zamagni, Stefano. "Se si afferma l'economia civile." *Impresa Sociale* 1996 (29). Print.

----- "Il terzo settore ora esiste." *Vita Bookazine* 13 oct. 2016. Web.

Zamagni, Stefano, and Bruni Luigino. "A ogni buon conto: lezioni di economia civile, Dieci lezioni di economia civile." *Editoriale Vita* 2003. Milano. Print.

----- *Economia civile. Efficienza, equità, felicità pubblica*. Il Mulino: Bologna, 2004. Print.

----- "Economia e felicità Una nuova scienza?." *XXI Secolo* 2009. Print.

Zanotto, Paolo. *Cattolicesimo, protestantesimo e capitalismo*. Rubbettino: Roma, 2005. Print.

A Legal and Social Framework for the Inclusion of Persons with Disability through Accessible Tourism and Transportation by Bus

Dario Imperatore*

Received: 21-02-2018. **Accepted:** 07-06-2018. **Published:** 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.413

©Dario Imperatore



Abstract

National, European, and international institutions should implement social policies to help the persons with disabilities. Strategic sectors include education, training, and work, with the equal protection of the laws. In addition, this essay is focused on another crucial "sector" that is part of the (European) primary law, which include tourism along with public transportation and non-discrimination. In conclusion, legislators, and public institutions, as well as transport companies must comply the principles of accessibility, equality, and social justice for the social inclusion of persons with disabilities.

Keywords: *Accessibility, Disability, Equality, EU, CRPD.*

* University of Camerino, Italy; imperatoredario@gmail.com

1. The Principle of Equality and Solidarity as Instruments of Law for a Transport Market Accessible to Persons with Disabilities

The recent European strategies for the social inclusion of persons with disabilities¹ – from now on “PwDs” – have focused on self-regulate markets for a long time, causing marginalisation of PwDs as a vulnerable customers and vulnerable people (for their own physical, social, and economic conditions). Nowadays, the European policy asks member States to respect the equality principle and the social justice, in a double meaning: in a positive way, i.e. as “equal opportunity”, and in a negative way, i.e. as “non-discrimination”. Furthermore, Italian Constitution recognizes the equality principle both as a prohibition of discrimination based on biological and cultural reasons, and as effort to remove the conditions that don’t allow these people to grow up in the society². Article No. 3, sub. 2 of the Italian Constitution asks the protection of social justice and it <<assumes the value as an historical and permanent choice>>³. This is a useful tool to exclude unjustified privileges⁴. The law No. 67/07⁵ – “Measures for judicial protection of persons with disabilities who are victims of discrimination” – is a guarantee, but it needs a support by information activities on the rights of PwDs. It also needs social campaigns aimed to prevent discrimination and disputes.

¹ The number of disabled people in Europe at the beginning of the new millennium is one-sixth of the population and it is increasing. With the EU-28, the employment rate of PwD did not reach 50%, causing a risk of poverty for about one-third of those in working age. It is proper to devote attention to this group of people who are still unable to find a definite position into society nowadays. Strategic fields are, i.e. training and in work: failure in these areas would mean condemning them to be isolated and precluding economic independence and autonomy as well. The attention that the institutions of the European and International level have devoted them, shows they are crucial for the enhancement and standardisation of PwD. However, there something more to do in these issues of life and many others.

² P. PERLINGIERI, *Il diritto civile nella legalità costituzionale secondo il sistema italo comunitario delle fonti*, Tomo II, ed. III, Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli, 2006, p. 448. On the State's commitment to removing barriers to the persons development: P. PERLINGIERI, *Eguaglianza, Capacità contributiva e diritto civile*, 1980, p. 135 ff.; R. DWORKIN, *Eguaglianza*, in *Enc. Sc. Soc.* Treccani, III, Roma, 1993, p. 478 ff.; N. BOBBIO, *Eguaglianza e libertà*, Torino, 1995, p. 22 ff.

³ P. PERLINGIERI, *Il diritto civile nella legalità costituzionale*, (Note No 2), p. 455.

⁴ Cf. P. PERLINGIERI, *Eguaglianza*, (Note No 2), p. 147. Especially, subparagraph 1 and 2, art. 3 of Italian Constitution should be read in a uniform sense because they lay down a unique regulation, which is equality: L. PALADIN in “*In tema di leggi personali*”, in *Giur. cost.*, 1961, p. 1262 ff., talks of ontological and substantive differences. Furthermore, A. CERRI, in “*Regime delle questue: violazione del principio di eguaglianza e tutela del diritto alla riservatezza*”, in *Giur. cost.*, 1972, p. 48 ff., thinks that ‘reasonableness’ refers to the natural human rationality, Cf. P. PERGLINGERI, (Note No 3), p. 450 ff.

⁵ In *Gazzetta Ufficiale* No. 54, March 6th, 2006.

Sometime, interventions aimed to overcome social obstacles are not enough, but what it is necessary is just to realize a positive value. So, the equality principle could be violated both when equal situations are subjected to different treatment (without any significant justification in harmony with the constitutional system of principles) and when individuals acting into unequally situations, receive identical treatment⁶.

European policy takes motivation from the awareness of how much pervasive the market can be as an institution; and how it can crop its own rules aimed at deciding prices⁷ and managing human behaviours⁸. This concept of freedom, assuming also constitutional relevance, becomes a “flag” of the liberal political movement and it has been so emphasized that it ends to be setting of an unceasing conflict as P. Perlingieri says literally: <<*rischiando ... di relegare la dignità personale a semplice valore di scambio esponendo i soggetti deboli, sopraffatti o sfruttati, alla marginalità*>>⁹, which means that human dignity risks to become simply exchange goods, and the marginalization of frail people take origin from this conception.

The result is an inevitable weakening of social relations¹⁰. In that direction, general opinion concluded that the market created this world system, and no one could change it¹¹. Historically, in the last twenty-five years, political compromises have reduced this conflict, but however on the other side it has entailed the inevitable weakening of democracy. A better solution should be a cooperation between market and democracy. Likewise, on the 'conflict' (the relationship between democracy and market), someone reflects also on the existence of an “anarchist egoism” of the market, in which there is no space for solidarity into human relationships. The failure of the power of the State is the

⁶ Constitutional Court judgment No 15 of 1960 (in *Giur. cost.*, 1960, p. 147 ff., annotation of L. PALADIN, *Una questione di eguaglianza nell'accesso ai pubblici uffici: <<Una differenza di trattamento è giustificata se si fonda su un criterio obiettivo e ragionevole, vale a dire qualora essa sia rapportata a un legittimo scopo perseguito dalla normativa in questione e tale differenza sia proporzionata allo scopo perseguito dal trattamento di cui trattasi>>*). It means that we may justify different treatments if they are based on an objective and reasonable criterion, aimed to pursue the legislation goals, in relation to that specific case. As well Arcelor Atlantique et Lorraine and others, C 127/07, EU:C:2008:728, n° 47, and Schaible, C 101/12, EU:C:2013:661, n° 77).

⁷ P. PERLINGIERI, *Iniziativa economica, solidarietà sociale e diritti della persona*, in *Rass. dir. civ.*, 1995, p. 84 ff.

⁸ M.R. FERRARESE, *Diritto e mercato. Il caso degli Stati Uniti*, Giappichelli, Torino, 1992 p. 20. The author orders various market meanings in four categories: a) market as place; b) market as an ideology; c) Market as a paradigm of social action; d) Market as institution; p. 17. On Institutional theories, F. LOMBARDI and R. MOTTA, *Traffici e mercati: l'istituzionalismo* of Karl Polany, in *Mat. St. cult. giur.*, 1980, p. 231 ff.

⁹ P. PERGLINGERI, (Note No 3), p. 475.

¹⁰ M.R. FERRARESE, (Note No 8), p. 42.

¹¹ Cf. S. ZAMAGNI, L. BRUNI *L'economia civile, Un'altra idea di mercato*, Il Mulino, Bologna, 2015, p. 24 f.

result; a market system in which the State loses the control, defined as an economic “deregulation”¹². Furthermore, the consequence is the need to find ethical and legal-political restrictions imposed by human behaviour¹³. How get out of that situation? “Third sector” experts suggest the Law to regulate society. Through a system of checks and balances, the Law should aim to ensure not only “richness” but also other specific values¹⁴, such as solidarity¹⁵ and reciprocity, as well as prize culture¹⁶, according to the logic of a “civil economy”, as a form of civilization in which civil virtue, public happiness and institutions take the place of the egoism (but different from the Hobbesian state of nature)¹⁷. Differently the weak people run the risk of the marginality.

In this way the inaccessibility to services and the dissatisfaction of their needs have forced PwDs to live in a state of marginalization.

Effectively, in the last twenty-years, European policies have been trying to reverse this trend, offering joint actions in several strategic areas: education, employment, health, etc. Tourism, for example, is an important sector for social aggregation. Moreover, the transportation stands for not only a crucial aspect of tourism but also of the other strategic sectors, mentioned previously. Accessibility policies let PwDs to participate in each field above mentioned, but also, they make them part of the social life, giving civic, social and economic benefits.

According to the European policy, benefits and opportunities offered by travel and tourism should granting also to disabled people to those conditions of comfort and security currently available to all other European citizens¹⁸. Consequently, the accessible transportation is a right to everyone; carriers, terminal managing bodies, and tour operators cannot refuse to provide services

¹² Cf. P. PERGLINGERI, (Note No 3), p. 475 ff., where he talks on *deregulation* which, on the constitutional level, leads to delimit the powers of intervention, legislation and administrative, in economic matters: <<*Costituzionalismo Economico*>> (Economic constitutionalism).

¹³ J.M. BUCHANAN, *Buona economia – Cattivo diritto*, in *Libertà nel contratto costituzionale*, Il Saggiatore, Milano, 1990, p. 48.

¹⁴ Cf. A. SEN, *Etica ed economia*, Laterza, Roma-Bari, 2002, p. 19 ff.

¹⁵ On ‘solidarity’ as a prerequisite of the primacy of the “political” on the economic field: P. PERLINGIERI, *Economia in bilico, tra pubblico e privato: una formula per la crisi?* in *Riv. di diritto dell’impresa* 2/1982, p. 231.

¹⁶ Cf. S. ZAMAGNI, L. BRUNI, (Note No 11), p. 76, in which, as ‘Genovesi’ said, they speak of selfishness and social altruism as <<*forza primitiva*>> (primitive force), stigmatizing the latter as <<*virtuosa*>> (virtuous), and which needs of special <<*premi*>> (prizes) so that it does not die.

¹⁷ *Ibid*, p. 43.

¹⁸ Communication from the Commission to the European Parliament, the Council, the European Economic and Social Committee and the Committee of the Regions — European Disability Strategy 2010-2020: A renewed commitment to a barrier-free Europe’, aimed to the social inclusion, well-being, and to the full exercise of their rights.

to a person solely for disability's reason or reduced mobility. They have the duty¹⁹ of ensure adequate information and travel offers to the PwDs, to let them enjoy their free time at normal price.

Firstly, this work intends to consider tourism as a significant instrument of social integration, highlighting the recent European transportation policy dedicated to the disabled passenger needs, which forecast a mandatory staff training as a prerequisite to ensure quality service. Secondly it tries to brief stakeholders²⁰ on the accessibility, providing them information aimed to ensure good assistance as well, as bases for equality and social inclusion of PwDs.

2. Tourism as a Tool of Social Inclusion According to European and International Policies on Disability.

The *European Disability Strategy 2010-2020*²¹ (from now on "Strategy 2010-2020") and the *United Nations Convention on the rights of persons with disabilities* (2006)²² (from now on "CRPD") are the main sources for the rights and protection of persons with disabilities. According to them tourism is a fundamental and strategic area to promote the inclusion of PwDs; to find confirmation in these sources it is crucial knowing briefly their historical course.

The Strategy 2010-2020 and the CRPD are the result of a social and political process matured over more than half a century. Their aim is to abolish discrimination and marginalization, allowing PwDs – on a basis of equality with other individuals – the real exercise of their rights. As well, to benefit from a full and autonomous participation in social and economic processes.

Thanks to the *Disability Strategy* (1996)²³, European Community has worked more carefully than in the past²⁴ to correct social distortions and to

¹⁹ As the European and International rules require about free and independence mobility.

²⁰ Transport companies, tour operators, travel agencies, representative organizations of PwD, etc.

²¹ 'Communication from the Commission to the European Parliament, the Council, the European Economic and Social Committee and the Committee of the Regions — European Disability Strategy 2010-2020: A renewed commitment to a barrier-free Europe'

²² The CRPD was approved on December 13th, 2006 by the UN General Assembly and entered into force on May 3rd, 2008. The EU ratified it by Council decision 2010/48/EC of November 26th, 2009, but the deposit of ratification at the United Nations was only December 23rd, 2010. Italy, by law n ° 18 of March 2nd, 2009 (published in the Official Gazette No. 61 of March 14th, 2009) has ratified and made it enforceable.

²³ Communication of the Commission on equality of opportunities for people with disabilities, *A new European Community Disability Strategy*, Brussels, July 30th, 1996, COM (96) 406 final.

²⁴ The European Community has begun to deal with disability since the second half of the 1970s, in a mostly marginal manner, by lightening the States from any instrument that binds them. Waddington L., Diller M., *Tensions and coherence in disability policy: the uneasy relationship between social welfare and civil rights models of disability in American, European*

protect a full power of the rights of those who has any kind of physical or psychic impairment. It proposed <<a stronger emphasis on identifying and removing the various barriers to equal opportunities and full participation in all aspects of life>>²⁵, to let PwDs contribute to the economic and social development.

This plan was inspired by the *Standard rules on the Equalization of Opportunities for Persons with Disabilities* (1993)²⁶ and by the “International Year Disabled Persons” (1981), followed by the “*World Program of Action concerning disabled Person*”²⁷. Since then, a new vision of the *Handicap* is the result of the relationship between PwDs and their environment²⁸.

From a mere assistance approach, we are moving to an inclusive one, in which emerges the need to know what disability is and how to involve PwDs into dynamic social aspects; it becomes essential identifying and exalting the abilities of everyone, transforming them from passive persons to active citizens, able to produce for themselves and for the society.

These goals are achievable through the affirmation of the rights and the principles of autonomy, dignity, independence, non-discrimination. Thanks to the *Disabled Strategy* (1996) the Member States have been invited to examine their national policies in order to achieve equal opportunities for PwDs in all strategic sectors: education, training, employment, health, social services, information and leisure time.

Therefore, this greater awareness of the necessity to protect the rights of PwDs and their families has encouraged the development of a new strategy,

and international employment law, disability rights law and policy, Ardsley, transnational Publishers, 2002, pp 241-244.

²⁵ Communication of the Commission on equality of opportunities for people with disabilities, quoted above, *Executive Summary and Policy Conclusions*, p. 1.

²⁶ Adopted by the United Nations General Assembly with Resolution of December 20th, 1993, 48/96.

²⁷ Adopted by the United Nations General Assembly with resolution 37152 of 3rd December 1982.

²⁸ This vision moves from the so-called social model of disability, for which the conditions of "diversity" of the disabled arise from the social factors and are not direct consequence of the impairment of the individual. The "incapacities" depend, therefore, on personal, environmental, economic, institutional factors, etc. We move away from the traditional conception based on the medical approach (limited only to provide for care and assistance) taking into consideration the social model as a keystone for new social policies (without architectural, psychological and relational barriers). Today, moreover, an additional model of interpretation of disability has been added, the so-called *Capability approach*, taken up by Amartya Sen and contextualized in the field of disabilities, through which it is possible to decipher social barriers and to place people with disabilities at the center of the decision-making process. This type of approach emphasizes the skills and awareness (any kind) transmitted and acquired through a life project. Cf. R. BARBUTO; M. BIGGERI; G. GRIFFO, *Life Project, peer counselling and self-help groups as tools to expand capabilities, agency and Human Rights*, *Alter-European Journal of disability research*, *Revue européen de recherche sur le Handicap*, 2011, vol. 5, No. 3, pp. 192-205.

adopted by the European Commission simultaneously with the ratification of the CRPD. The Strategy 2010-2020 allows the EU and its member States to give effect to the provisions of the CRPD²⁹ identifying the social necessities and rights that might require greater protection and development³⁰, that are “accessibility, participation, equality, employment, education and training, social protection, health, external action”: EU and its Member States³¹ represent a real instrument to protect and safeguard all human rights.

CRPD drives Member States of the General Assembly to adopt laws to prevent social diversity protecting any form of *handicap*; it strives to be a concrete tool against discrimination and human rights violations, in favour of all PwDs in the various social fields, from education to leisure³².

Then, considering this analysis, society cannot longer exclude PwDs from those activities useful to give course to the primary and natural vocation of the man: the socialization. Tourism, as a special form of leisure, appears a crucial field of inclusion because of its great types of proposals.

For this reason, Tourism, same as many other sectors, must involve stakeholders at any levels of the action, both in the public and in the private area.

EU chooses a sustainable and inclusive development, in harmony with principles of the CRPD: EU has become for the first time a ‘contracting party’ of a treaty on Human rights³³. Recognized as a historical ratification, it

²⁹ CRPD has a programmatic nature: its provisions require further action by the Parties. In fact, it doesn’t have unconditional and sufficiently precise content; it lacks the requirements that serve to produce direct effects in EU law (for the concept of direct efficacy see Court of Justice of the European Union, Judgment of February 5th, 1963, C-26 /62, *Van Gend en Loos*, in ECR 3). However, CJEU has stated several times (from the “Ring and Werge” case, judgment of April 11th, 2013, joined cases C-335/11 and C-337/11, in ECR Digital, April 2013) that the secondary law (regulations and directives in particular), should be interpreted in conformity with CRPD, recognizing the its interpretative effects. That issue is fine explained by D. FERRI, in *L’Unione europea e i diritti delle persone con disabilità: brevi riflessioni a vent’anni dalla prima ‘Strategia’*, Salute e diritto, Politiche sanitarie, vol. 17, No. 2, p. 123, April-June 2016.

³⁰ It focuses, firstly, on the obstacles to the exercise of rights and the need to eliminate them in favor of more accessibility. Through “Participation” is possible to remove the administrative and behavioral obstacles, which are causes of substantial inequalities. Secondly, another important objective is to enable PwD to enjoy all the benefits of EU citizenship for the benefit of the entire community.

³¹ Strategy 2010-2010 provides for complementary action at European and national level, as well as in agreement with the EU Charter of Fundamental Rights and the non-discrimination policy (as provided for in the TFEU arts. 10 and 19).

³² It recalls the Un Charter’s principles, as well as the rights and freedoms mentioned in the Universal Declaration of Human Rights and International Covenants; It reaffirms the need for PwD and their families to be guaranteed in their full enjoyment without discrimination based on disability. About this analysis, arts. 9 and 30 are relevant. The former focus on “accessibility” – <<to enable persons with disabilities to live independently and participate fully in all aspects of life>> – and the latter on the “participation” of PwD on an equal basis with others in cultural, recreational and sports life, as well as enjoyment of leisure.

³³ Council decision 2010/48/EC of November 26th, 2009 lodged on November 23rd, 2010.

represents for Member States an institutional and moral commitment to protect the rights of PwDs³⁴.

To support the vision of tourism as a tool for the inclusion of PwDs, it is possible to mention the Treaty of Lisbon, signed in 2007; thanks to this treaty the European policy recognizes expressly the existence of a collective touristic area inside the primary law: tourism assumes a value of supranational interest³⁵.

From a practical point of view, in the specific tourism sector, the success of these politics needs a greater moral and factual contribution by those who offers tourist services, primarily the transportation. The CRPD, i.e. asks Member States to guarantee that <<those involved in the organization of recreational activities, tourism, leisure and sports>> ensure access – and enjoyment – to all PwDs (art. 30, n.5, lett. e)³⁶.

3. The Reasonableness of the Unequal Treatment: First Group Plc vs Paulley and the Sunset of "First Come, First Served" Rule on Buses

The reasonableness of disparity in treatment concerns interventions aimed to overcome differences not only economic but also social and cultural³⁷. The

³⁴ Ratification involves the integration into EU law of the CRPD, which assumes 'sub-constitutional' rank: in consideration of art. 216, paragraph 2, TFEU (<<Agreements concluded by the Union are binding upon the institutions of the Union and on its Member States>>) it prevails over European Union acts. The road is well plotted, although someone believes that the goals of the Strategy 2010-2020 were partly disregarded. D. Ferri, (Note No 29), points out that the same UN Committee on the Rights of Persons with disabilities, which examined the initial EU report on the implementation of the CRPD (2006), had to recommend an acceleration of the procedure for adopting the new Anti-discrimination Directive (Proposal for a Council directive (July 2nd, 2008) on implementing the principle of equal treatment between persons irrespective of religion or belief, disability, age or sexual orientation, COM (2008) 426 final) and accessibility legislation including, in particular, the so-called *European Accessibility Act* [COM (2015) 615 final: See also http://europa.eu/rapid/press-release_IP-15-6147_en.htm], which is part of the various legislative initiatives of the strategy (Ahtonen A, Pardo R, The Accessibility Act – Using the single market to promote fundamental rights, European Policy Center, March 12th, 2013, available online: http://www.epc.eu/pub_details.php?pub_id=3393).

³⁵ M. GESTRI – F. CASOLARE, *Il turismo nel trattato di Lisbona: un personaggio non più in cerca di autore*, in *Rivista Italiana di Diritto del Turismo*, 1, 2011, pp. 5-18; Cf. G. Gianna, *La tutela del viaggiatore*, Giuffrè, Milano, 2013, p. 15.

³⁶ The Italian Code of Tourism – D. LGs. May 23rd, 2011, No. 79 (O.J. No. 129 of June 6th, 2011), art. 3 No 1 – introduced, expressly, the accessible tourism principle claimed by art. 30 of CRPD, so that even people with disabilities could enjoy the tourist offer in a complete and autonomous way, receiving quality services without escalates on the price.

³⁷ P. PERLINGIERI, P. FEMIA, *Nozioni introduttive e principi fondamentali del diritto civile*, Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli, 2004, p. 75 f., and P. PERGLINGERI, (Note No 3), p. 457, note No 103, on the Italian Constitutional Court judgement No. 54 in 1968, which stated that <<nel giudizio sulla razionalità di una certa disciplina non si deve guardare soltanto alla posizione formale di chi ne è destinatario ma anche alla funzione od allo scopo a cui essa

sense is defeating any active or passive form of discrimination³⁸. So, it will be constitutionally legitimate the law favourable for subjects and categories of subjects particularly needy of the solidarity, because expressly envisaged, or because need to remove any kind of obstacles towards them (Italian Constitution, article 3.2). *Vice versa*, the law could prevent the exercise of the essential rights of some social categories – in strong position – to contrast any objective inferiority or inequality conditions³⁹. It seems interesting to analyse a UK case useful to clarify this general issue: "Doug Paulley".

On the 24th February 2012 Doug Paulley, a man in a wheelchair, tried to take advantage of the bus service offered by *First Group*. At the bus stop, the driver asked Mr. Paulley to wait as a mother occupied the place reserved to wheelchairs with a stroller. This lady refused to change her seat, and this caused the impossibility for him to get on the bus. Consequently, he lost the connecting train to get his next destination.

Thus, he sued the First Group at Leeds County Court to obtain justice against the act of discrimination suffered as a person with disabilities. He won the cause, but the First Group appealed, subjecting the case under the decision of the Supreme Court.

On the 18th January 2017, the Supreme Court issued an historical sentence, which exceeded the principle of the "first come - first served", so far adopted by the transport companies. Transportation companies, in fact, must satisfy the needs of passengers on wheelchair. The judgement⁴⁰ states that drivers may stop the bus "*in order to persuade who does not want to leave the reserved seats to wheelchair passenger*" if they judge that refusal is unwarranted. Lord Neuberger, president of the Supreme Court, said that if the driver takes note of the refusal of the passenger who does not use the wheelchair, the denying policy of the transport service – to the user with disability – is "unjustifiable".

The Court also suggested that the law should be updated in order to be clearer towards the transport companies and their users. Transport companies

è preordinata>>, it means that every legal discipline are based not only on the formal *status* of its recipient but also on its main – primary – goals. Disparities generating equal dignity and development of the persons are reasonable; every disparity is legitimate if it implements constitutional principles. P. PERLINGIERI, (Note No 3), compares it with A. CERRI, (Note No 4) p. 48 ff., for whom the reasonableness is a natural factor of human rationality.

³⁸ On the definition of discrimination see the Law March 1st, 2006, no 67, art. 2, No. 2: direct discrimination is when, for reasons related to disability, a person is treated less favorably than is, has been or would be treated a person who is not disabled, in a similar situation, and No. 3: indirect discrimination is when an apparently neutral disposition, criterion, practice, act, pact or behavior puts a person with disability at a disadvantage *status* in comparison with other people.

³⁹ Cf. P. PERLINGIERI (Note No 3), pp. 457-458, note No 105.

⁴⁰ *Hilary Term [2017] UKSC 4 - On appeal from: [2014] EWCA Civ 1573 – First Group Plc v Paulley – Judgment given on 18 January 2017 Heard on June 15th, 2016.*

On web: www.supremecourt.uk/cases/docs/uksc-2015-0025-judgment.pdf.

should adopt clear rules and, primarily, they should train their drivers to make them capable to remove any type of barrier opposed to the free enjoyment of the accessible transport service.

In relation to Paulley case and the drivers training, even the *Transport Committee*⁴¹ highlighted how crucial is to guarantee a proper training course on disabilities, based on the EU Regulation 181/2011 – *inter alia* in accordance with the *Equality Act 2010*⁴² – which provides with a mandatory training, asking Parliament to incorporate it into the national legislation⁴³.

In conclusion this judgement is a "cultural revolution" thanks to which substantive equality, linked to the concrete case, takes shape. Accessible transportation service, indeed, is a critical factor for the life of PwDs, since it allows them to go to work, to go for shopping, and to visit friends and relatives. Just in West Yorkshire (UK) passengers with disabilities have made more than 5 million of travels between 2012 and 2013⁴⁴.

In the next paragraph, the EU provisions on the transportation by bus, to highlight specific requirements to protect users with disability.

4. Accessible Transportation by Bus: EU Regulation No 181/2011

‘Disabled person’ or ‘person with reduced mobility’ means any person whose mobility is reduced when using transport as a result of any physical disability (sensory or locomotory, permanent or temporary), intellectual disability or any other cause of disability because of the age and whose condition requires an appropriate attention and an adaptation to its particular needs. This is the meaning of disability defined by EU Regulation No

⁴¹ The transport Committee is charged by the House of Commons to check the Transport Department. His formal mandate is to examine the expenses, administration and policy of the Department of Transport and its associated public bodies.

It consists of eleven members of Parliament, appointed by the House of Commons and chosen within the three major political parties. The Committee chooses its own topics of investigation. Depending on the subject matter, the external deadlines and the amount of oral evidence that the Committee decides to take, an investigation can last several months and give rise to a report to the Assembly; Other requests can simply consist of an oral testimony of daily duration that the Committee may decide to publish without making a report –

www.parliament.uk/business/committees/committees-a-z/commons-select/transport-committee/role/.

⁴² The Equality ACT requires reasonable solutions when a person with disabilities is disadvantaged compared to all others, in accordance with regulations or uses. This means that the stakeholders must adopt any measures to ensure persons with disabilities access to their services.

⁴³ As an effect of Brexit, the real risk in the United Kingdom is that the adoption of the regulations may be frustrated.

⁴⁴ On web: www.equalityhumanrights.com/en/gwaith-achos-cyfreithiol/paulley-v-firstgroup-plc

181/2011⁴⁵. With this regulation, therefore, EU tries to give protection to the passengers of bus and coach transportation with disability. They are considered as weak subjects as all costumers are for their own nature, but also, and especially, because of structural, moral and psychological barriers placed in and by the society – according to the interpretation of the social model of disabilities. As already said, currently the transport by bus assumes relevance in our life, both as a daily displacement and for touristic purposes. Effectively, recent studies carried out by the research centre "*Transpol*" affirm that transport by bus is a very fluid market: in Italy the number of transactions recorded has been growing⁴⁶, such as the number of bus companies.

Then, Regulation 181/2011 has become an indispensable landmark – a *vademecum* – for carriers, managers of terminals (terminal managing body) and tour operators to take it in consideration before, during and after the execution of their services, to protect the rights of passengers with disabilities or reduced mobility, but also to safeguard their responsibilities in case of complaints⁴⁷ and penalties⁴⁸.

This regulation – whose main sources are TFEU (art. 91, par. 1, especially)⁴⁹, CRPD (art. 9, 'Accessibility')⁵⁰, and Charter of Fundamental

⁴⁵ Art. 3, lett. j. This regulation changes Reg. No, 2006/2004.

⁴⁶ This monitoring activity shows the classical relations north-south, middle-north and middle-south of the Country.

⁴⁷ To guarantee their rights, appropriate complaint procedures are envisaged through a system established or arranged by the carrier, as said by *whereas* No. 20 of Regulation No 181/2011: <<Passengers should be able to exercise their rights by means of appropriate complaint procedures implemented by carriers...>>; No. 22: <<...a complaint concerning assistance should preferably be addressed to the body or bodies designated for the enforcement of this Regulation...>>. There could be, therefore, a double system of transmission of the complaints provided by this regulation. The first one, through the carriers (art. 27); the second one, through a national body designated by the Member State (art. 28). So, <<carriers shall set up or have in place a complaint handling mechanism for the rights and obligations set out in this Regulation>> (art. 26, and cf. art. 28, 1, 3). About timeline: <<Within 1 month of receiving the complaint, the carrier shall give notice to the passenger that his complaint has been substantiated, rejected or is still being considered>>. In the latter case the new deadline is just a month (art. 27).

⁴⁸ Effective, proportionate, and dissuasive penalties are applicable and ensured by Member States to infringements of the regulation above mentioned. and shall ensure its application (*whereas* 24 and art. 31, Regulation No 181/2011).

⁴⁹ For applying of art. 90 (according to which the objectives of the treaties are pursued under a common transport policy) and considering the aspects of transport, the European Parliament and the Council, after consulting the Economic and Social Committee and the Committee of the Regions, establish common rules applicable to transport, and measures to improve safety as well as any other useful provisions.

⁵⁰ In order to offer people with disabilities or reduced mobility the possibility of take the bus or carry out a coach trips under equal conditions with other citizens, it is necessary to establish rules on non-discrimination and assistance during the journey. About that also, Directive 2003/59/EC of the European Parliament and of the Council of July 15th, 2003: on the

Rights⁵¹ – shows the primary needs of passengers with disabilities or reduced mobility that must be safeguarded by whom offers a transport service. In this context, the request of proper training programs for employees appears as a base for the accessibility in transportation⁵², as well as the importance of the organisations representative of PwDs or with reduced mobility as significant landmarks in preparing the content of the disability - related training⁵³.

What expressly the EU policy requires is that the stakeholders provide more attention and care in each operation, as ticketing, booking⁵⁴ and terminal managing⁵⁵; assistance free of charge⁵⁶, especially in case of cancellation or delay on departure⁵⁷, in the designated stations, and on board⁵⁸; information on any alternative services managed by the carrier⁵⁹, on access conditions⁶⁰, and on the service of assistance⁶¹, or finally, on cancellation or delay at departure⁶².

training of drivers of certain road vehicles used for the carriage of goods or passengers (OJ L 226, 10.9.2003, p. 4); Council Directive 90/314/EEC of 13 June 1990: concerning travel, holidays and all-inclusive holidays (OJ L 158, 23.6.1990, p. 59).

⁵¹EU recognizes rights, liberties and principles enshrined in the Charter of Fundamental Rights of the European Union of 7 December 2000, adapted on December 12th, 2007 in Strasbourg, which has the same legal force as the Treaties (Art. 6 TFEU).

⁵² *Whereas* 12, Regulation No 181/2011, in order to respond to the PwD or reduced mobility needs, it provide that <<disability awareness training could be provided as a part of the initial qualification or periodic training as referred to in Directive 2003/59/EC of the European Parliament and of the Council of 15 July 2003 on the initial qualification and periodic training of drivers of certain road vehicles for the carriage of goods or passengers>>.

⁵³ *Whereas* 13, on the training also, the art. 16 par. 1: it specifies that carriers and terminal managing bodies must ensuring training of their personnel, drivers or other than it, which provide direct assistance to persons with disabilities or reduced mobility (as indicated also into Annex II, Parts A and B).

⁵⁴ Cf. art. 9, Regulation No 181/2011: carriers, travel agents, and tour operators do not refuse to accept a reservation from, or to take on board, a person on the ground of disability or reduced mobility, and, they have to offer them these services at no additional charges.

⁵⁵ Member States shall designate bus stations where assistance to PwD or reduced mobility is provided (cf. art. 12, *ibid*).

⁵⁶ Cf. art. 13, *ibid*: carriers and terminal managing bodies, at terminals designated by the Member States, as well as on board buses, must give assistance free of charge to PwD.

⁵⁷ Cf. art. 21, *ibid*.

⁵⁸ Cf. Annex I. b, *ibid*, which shows a series of assistance measures "on board", to ensure that weak travelers enjoy a comfortable journey in relation to their disability or reduced mobility.

⁵⁹ Cf. art. 10, par. 2, *ibid*: in case of an unaccepted reservation or a ticket unissued.

⁶⁰ Cf. art. 11, *ibid*: in collaboration with organizations representing PwD or reduced mobility, the carriers and terminal managing bodies establish the safety requirements, on which these non-discriminatory access conditions are based. It shall be made publicly available by carriers and terminal managing bodies physically or on the Internet, in accessible formats on request.

⁶¹ Cf. arts. 14 and 15, *ibid*: travel agents or tour operators shall cooperate with the carrier or the terminal managing bodies, by facilitating the transmission of information relating to the need, and measure of assistance to allow PwD or reduced mobility to use the service.

⁶² Cf. art. 20, *ibid*: carriers or, where appropriate, terminal managing bodies, shall inform the passengers on the cancellation or delay at departure, and they do it as soon as possible and

5. Conclusion

In the name of the substantive equality⁶³, policies and legal operators should regulate market, both touristic⁶⁴ and of the transports in such a way to ensure respect for the principle of equality and social justice. Effectively, Italian *jurisprudence* only recently has reserved acceptable attention on it⁶⁵, but also, it must be considered that <<equality does not mean egalitarianism: it has not demanded the equality of all in all, regardless of the merits and skills>>⁶⁶.

For a *Vision* of a fully accessible tourism, European policy has intervened with its regulations⁶⁷ in order to ensure a system of protection that is common among the Member States. Tourist and transport stakeholders must follow a set of coherent principles and rights, that EU policy defined with its regulations, to protect all travellers, particularly those who are vulnerable: accessibility, assistance, information, in favour of PwDs.

Moreover, it appears the necessity of training programmes for personnel employed in transportation companies. In effect, they must prove sensitivity and ability to approach passenger with disability or with reduced mobility and, of course, also assistance capacity⁶⁸.

Finally, the European policies must be encouraged⁶⁹ to support cooperation between carriers and/or the terminal managing bodies of stations and all organizations representative of PwDs or with reduced mobility, through monitoring activities, social projects and research studies.

in accessible formats. Even more, they shall make reasonable efforts to inform the passengers concerned of alternative connections if they miss a connecting service due to a cancellation or delay.

⁶³ Article 3 of Italian Constitution need unitary interpretation: <<equal social dignity and equality before the law, without distinction of sex, race, language, religion, political opinion, personal and social conditions>>, linked to the duty of the (Italian) Republic <<to remove all obstacles of an economic and social nature which constrain the freedom and equality of citizens, prevent the full development of the human person and the effective participation of all workers in the political, economic, and social development of the country>>, cf. P. PERLINGIERI, (Note No 3) p. 448 f.

⁶⁴ Treaty of Lisbon, 2007.

⁶⁵ Cf. P. PERLINGIERI, (Note No 3), p. 449.

⁶⁶ *Ibid*, p. 458, p. 458, related to A. CERRI, *Eguaglianza giuridica ed equalitarismo*, L'Aquila-Roma, 1984, p. 24 ff., who compares on the topic of "different treatment of equal situations as expressions of the principle of equality", with M. Aini, *Azioni positive e principio d'eguaglianza*, in *Giur. cost.*, 1992, I, p. 582 ff.

⁶⁷ Reg. EU No. 181/2011; Reg. UE No. 1177/2010; Reg. UE No. 1371/2007; Reg. UE No. 1107/2006.

⁶⁸ Cf. art. 16 and Annex II EU regulation No. 181/2011. Annex like that are into each other regulation related on accessible transport, which are mentioned above.

⁶⁹ In Italy the Tourism Code have also implemented it; cf. art. 3, n. 2 D. Lgs. May 23rd, 2011, no 79 (O.J. N. 129 of June 6th, 2011).

Tourism and transportation must give priority to ethical issues: the only ones able to combine economic efficiency and human rights, market, and democracy⁷⁰. So, stakeholders of these markets may realize the most-desired "cultural revolution", in which the law plays a key role thanks by its primary power to regulate the society⁷¹.

This is the time to show that the right is capable of being a carrier of sensibility and principles residing in those things that do not have a price and that are <<common elements of social structures>>⁷².

References

[1] Ainis, M. (1992) Azioni positive e principio d'eguaglianza. *Giur. Cost.*, I, 582

[2] Bobbio, N. (1995) *Eguaglianza e libertà*. Torino

[3] Barbuto, R.; Biggeri, M.; Griffo, G. (2011). Life project, peer counselling and self-help groups as tools to expand capabilities, agency and human rights, *Alter - European Journal of Disability research, Revue européen de recherche sur le handicap*, vol. 5, 3, 192-205.

[4] Buchanan, J. M. (1990). *Buona economia – Cattivo diritto, Libertà nel contratto costituzionale*. Milano: Il Saggiatore.

[5] Calamandrei, P. (1950). *Introduzione storica sulla Costituente*. Calamandrei e Levi, I, Firenze: Comm. Sist. Cost. it.

[6] Campanella, F. (1992). Lo Stato e il mercato. Le idee e i miti di un passato più o meno prossimo, in *Pubblico e provato nel sistema economico a cura di S. Berena*. Milano: Giuffrè.

[7] Cerri, A. (1984). *Eguaglianza giuridica ed egualitarismo*. L'Aquila-Roma: Japadre.

[8] Cerri, A. (1972). Regime delle questue: violazione del principio di eguaglianza e tutela del diritto alla riservatezza. *Giur. Cost.*

[9] Dahrendorf, R. (1979) *Lebenschancen. Anlaufe zur sozialen und politischen Theorie*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main – (1995), Roma – Bari, Laterza.

⁷⁰ Cf. F. CAMPANELLA, *Lo Stato e il mercato. Le idee e i miti di un passato più o meno prossimo*, edited by S. Beretta, Milan, 1992, p. 99.

⁷¹ Cf. P. PERLINGIERI, (Note No 7) p. 84 ff.

⁷² R. DAHRENDORF, *Lebenschancen. Anlaufe zur sozialen und politischen Theorie*. 1979, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, and Roma – Bari, Laterza, 1995.

- [10] Dworkin, R. (1993). *Eguaglianza*. Roma: Enc. Sc. Soc. Treccani, III.
- [11] Ferrajoli, L. (1990). *Diritto e ragione*, 2° ed., Roma-Bari: Laterza.
- [12] Ferrarese, M. R. (1992). *Diritto e mercato. Il caso degli Stati Uniti*. Torino: Giappichelli.
- [13] Ferri, D. (2016). L'Unione europea e i diritti delle persone con disabilità: brevi riflessioni a vent'anni dalla prima 'Strategia', *Salute e diritto, Politiche sanitarie. Il Pensiero scientifico. Salute e diritto – Politiche sanitarie*. 17, 2, 123.
- [14] Gestri M. – Casolari, F. (2011). Il turismo nel trattato di Lisbona: un personaggio non più in cerca di autore. *Rivista Italiana di Diritto del Turismo*. 1, 5-18
- [15] Gianformaggio, L. (1997). L'eguaglianza e le norme, in L. Gianformaggio e M. Jori (a cura di), *Milano: Scritti Scarpelli*.
- [16] Gianna, G. (2013). *La tutela del viaggiatore*, Milano: Giuffrè.
- [17] Paladin, L. (1961). In tema di leggi personali. *Giur. cost.*
- [18] Paladin, L. (1960). Una questione di eguaglianza nell'accesso ai pubblici uffici. *Giur. cost.*, nota a sentenza della Corte Costituzionale, in *Giur. Cost.*, 147
- [19] Perlingieri, P. (1982). Economia in bilico, tra pubblico e privato: una formula per la crisi? in *Riv. di diritto dell'impresa*, 2, 231
- [20] Perlingieri, P. (1980). *Eguaglianza, Capacità contributiva e diritto civile*. Torino.
- [21] Perlingieri, P. (2006). *Il diritto civile nella legalità costituzionale, secondo il sistema italo comunitario delle fonti*, Tomo II, III edizione. Napoli: Edizioni Scientifiche Italiane.
- [22] Perlingieri, P. (1995). *Iniziativa economica, solidarietà sociale e diritti della persona*. *Rass. dir. civ.*
- [23] Perlingieri P., Femia P. (2004). *Nozioni introduttive e principi fondamentali del diritto civile*. Napoli: Edizioni Scientifiche Italiane.
- [24] Scarpelli, U. (1988). *Classi logiche e discriminazioni tra i sessi*. *Lav. dir.*
- [25] Sen, A. (2002). *Etica ed economia*. Roma-Bari: Laterza.
- [26] Waddington L., Diller M. (2002). Tensions and coherence in disability policy: the uneasy relationship between social welfare and civil rights models

of disability in American, European and international employment law. Disability rights law and policy. Ardsley: Transnational Publishers

[27] Zamagni, S., Bruni, L. (2015). *L'economia civile, un'altra idea di mercato*. Bologna: Il Mulino.

Bruno Rizzi and Number Theory (Bruno Rizzi e la Teoria dei Numeri)[°]

Franco Eugeni*, Fabrizio Maturo[•]

Received: 01-02-2018. **Accepted:** 01-05-2018. **Published:** 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.417

© Eugeni and Maturo



Abstract

Franco Eugeni remembers Bruno Rizzi: in this brief introduction, I would like to remember an afternoon spent in “*Roma Tre*” with Bruno, since we were both Ordinary Professors at that University. We passed it doing a dense program of work for the next three years. At 6.00 pm, I left for “Roseto degli Abruzzi”. At six o'clock a.m. of the next morning, I still have the voice in my ears. A phone call from the Headmaster Ciro d'Aniello, who told me “*The Professor is dead*” In that afternoon, Emilio Ambrisi and I went to Rome; we were stunned and desperate. Not many days later, a conference was held at the

[°] Dedicato al compianto amico Bruno Rizzi a venti anni dalla sua scomparsa.

* Teramo University, Italy; eugenif3@gmail.com.

[•] Department of Management and Business Administration, “G. d’Annunzio” University of Chieti-Pescara; f.maturo@unich.it.

University of Teramo; it was the conference that we had prepared for Bruno, to celebrate his 60th birthday, but it was his memory. In the opening conference, Prof. Antonino Giambo, also fraternal friend of Bruno, burst into a tearful cry, which expressed in a moment, the senses of friendship and love that we all had for the missing friend! Starting from this work with Fabrizio Maturo, the study of some problems left open by the works of Eugeni and Rizzi will be investigated.

Sunto

Ricordo di Franco Eugeni su Bruno Rizzi: in questa brevissima introduzione vorrei ricordare un pomeriggio passato a Roma Tre con Bruno, visto che allora eravamo entrambi Professori Ordinari in quella Università. Lo passammo a fare un denso programma di lavoro per i successivi tre anni. Alle 18.00 ripartii per Roseto degli Abruzzi. Alle sei del mattino successivo, ho ancora la voce nelle orecchie, una telefonata del Preside Ciro d'Aniello, che mi diceva "*Il Professore è morto*". Nel pomeriggio Emilio Ambrisi ed io ci recammo a Roma, eravamo attoniti e disperati. Non molti giorni dopo si tenne presso l'Università di Teramo un Convegno, era il Convegno che avevamo preparato per Bruno, per festeggiare i suoi 60 anni, fu invece il ricordo. Nella conferenza di apertura il prof. Antonino Giambò, anche lui, come noi, fraterno amico di Bruno, scoppiò in un pianto diretto, che esprime in un attimo, i sensi dell'amicizia e dell'amore, che tutti noi avevamo per l'amico scomparso! A partire da questo lavoro con Fabrizio Maturo verrà approfondito lo studio di alcune problematiche rimaste aperte dai lavori di Eugeni e Rizzi.

1. La Teoria delle Funzioni Aritmetiche ed il Contributo di Bruno Rizzi

Il contributo di B. Rizzi¹ (1935-1995), nell'ambito della Teoria dei Numeri è essenzialmente dedicato alla Teoria delle funzioni aritmetiche. Tale teoria ha in Italia un primo grande personaggio, che se ne è occupato [21], [22], precisamente Michele Cipolla². È interessante notare che [23], uno studioso americano di tale teoria, contemporaneo del Cipolla, fu Eric Temple Bell³, più noto come storico.

Un'indagine da fare sarebbe quella di comparare i lavori di Cipolla con quelli di Bell. Tali lavori contengono vari risultati comuni e non sembra che i due

¹ Bruno Rizzi (1935-1995) – vedi appendice

² Michele Cipolla (1880 - 1947) – vedi appendice

³ Eric Temple Bell (1883 - 1960) – vedi appendice

fossero in contatto, in quanto il simbolismo usato dagli stessi fu essenzialmente differente.

Un allievo di Cipolla, che riprese i lavori e il simbolismo del maestro, fu Franco Pellegrino⁴, Libero Docente di Teoria dei Numeri e Ricercatore dell'Istituto di Alta Matematica⁵, ottimo matematico con il quale noi abbiamo collaborato per qualche anno fino alla sua scomparsa [29]. Pellegrino era stato studente del Cipolla e l'Istituto INDAM, annoverava Cipolla tra i suoi prestigiosi conferenzieri.

La Teoria delle funzioni aritmetiche fu ripresa e generalizzata [30] da nostro compianto amico e maestro Giancarlo Rota⁶, nelle più generali Algebre di Incidenza. Per i dettagli di tali aspetti e degli inquadramenti si può fare riferimento ad un lavoro di Eugeni e Rizzi [15], sull'argomento.

Per comprendere l'ambiente entro il quale operavano Cipolla prima e Pellegrino poi, ambiente nel quale abbiamo a lungo lavorato noi stessi, muoviamo le nostre considerazioni da due famose e datate funzioni aritmetiche:

L'indicatore ϕ di Eulero⁷ e la funzione μ di Möbius⁸

Sia n è un numero naturale⁹ allora $\phi(n)$ è la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali m non superiori ad n ¹⁰ stesso e primi¹¹ con esso, cioè i numeri m , tali che:

$$(1) \quad 1 \leq m \leq n$$

$$(2) \quad (m; n) = 1.$$

In altre parole¹²:

⁴ Franco Pellegrino (1908 - 1979)- vedi appendice

⁵ INDAM – Istituto Nazionale di Alta Matematica – vedi appendice.

⁶ Giancarlo Rota (1932-1999). Grande personaggio della Matematica contemporanea e Dean dell'M.I.T. per il cui profilo è su Wikipedia. Ricordiamo che per il volume “Elementi di Matematica discreta” per i tipi della Zanichelli, scritto da Cerasoli, Eugeni, Protasi avemmo l'onore di una ampia presentazione di Giancarlo Rota.

⁷ Leonhard Euler (1707 - 1783). Nella letteratura italiana spesso tale funzione è indicata con la ϕ minuscola.

⁸ August Ferdinand Möbius (1790 - 1868)

⁹ E' $n \in \mathbb{N}$, dove con $\mathbb{N}$ indichiamo l'insieme $\{1, 2, \dots\}$. In altre parole, se consideriamo la coppia $(\mathbb{N}, |)$ come un insieme parzialmente ordinato (poset), rispetto alla relazione di divisibilità “|”, in $\mathbb{N}$ non si considera presente lo zero, in quanto lo 0, è diviso da ogni numero, ma nel caso dello zero che divide se stesso non si ha un unico quoziente.

¹⁰ L'uguale di $m \leq n$ serve per avere la proprietà $\phi(1) = 1$, del resto n è primo. Infatti, l'insieme dei numeri m non superiori ad 1 sono il numero 1 soltanto, che peraltro non avendo fattori in comune con se stesso soddisfa la definizione.

¹¹ Dire che m è primo con n significa che essi non hanno divisori in comune. In altre parole se denotiamo con $(m;n)$ il loro MCD (si noti nel mezzo”); ” il punto e virgola risulta $(m;n)=1$.

¹² Dato un insieme di numeri naturali A , il simbolo $|A|$ ne indica la cardinalità.

$$\Phi(n) = \left| \left\{ m \in \mathbf{N} : 1 \leq m \leq n, (m; n) = 1 \right\} \right| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Varie sono le proprietà della funzione di Eulero. Ricordiamo le seguenti:

(a) $(m; n) = 1 \Rightarrow \Phi(m \cdot n) = \Phi(m) \cdot \Phi(n) \quad \forall m, n \in \mathbf{N}$ (Proprietà moltiplicativa);

(b) $\Phi(1) = 1, \Phi(p^\alpha) = (p^\alpha - p^{\alpha-1}) = p^\alpha \left[1 - \frac{1}{p} \right] \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{P}$ ¹³;

(c) $\sum_{d|n} \Phi(d) = n$.

La proprietà (c) è molto importante, poiché, come non del tutto evidente, risulta che la proprietà è caratteristica della funzione Φ , cioè:

“Se f è una funzione aritmetica tale che $\sum_{d|n} f(d) = n$, allora $f = \Phi$ ”,

NOTA. Ci si può chiedere cosa succeda della relazione:

$$\Phi(m \cdot n) = \Phi(m) \cdot \Phi(n)$$

quando m ed n non sono primi tra loro. Nel 1973, in due lavori indipendenti di Eugeni e Rizzi, [2], [34], e per vie differenti, è stato dimostrato che, per m e n qualsiasi, risulta:

$$\Phi_q(mn) \Phi_q[(m; n)] = [(m; n)^q] \Phi_q(m) \Phi_q(n)$$

dove $(m; n)$ è il MCD e il valore¹⁴ $\Phi_q(n)$ è il numero delle q -ple di numeri non superiori ad n e tali che il MCD degli elementi della q -pla sono primi con n .

Leggendo il suo lavoro Franco Eugeni telefonò a Bruno Rizzi e da quella telefonata nacque una collaborazione e principalmente una lunga amicizia.

La funzione μ di Möbius si definisce intanto come una funzione, per definizione moltiplicativa, verificante la condizione caratteristica di tali funzioni, ovvero:

$$f(n) = f\left(\prod_{p|n} p^k\right) = \prod_{p|n} f(p^k)$$

¹³ Con $\mathbf{P}$ denotiamo l'insieme dei numeri primi.

¹⁴ Si tratta di una nota generalizzazione dovuta a Cahen, Eckford Cohen e tanti altri.

e le condizioni $\mu(1)=1, \mu(p)=-1, \mu(p^k) = 0 \dots se \dots k > 1$, il che implica che:

$$\mu(n) = \begin{cases} ..1.....se...n = 1 \\ (-1)^k \dots se...n = p_1 p_2 \dots p_k \dots (k.primi.distin.ti) \\ ..0.....altrimenti \end{cases}$$

Per comprendere i primi elementi e la filosofia che è sottesa a quest'algebra, definiamo le funzioni N ed u seguenti:

$$N(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{funzione identità}), u(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{funzione unitaria})$$

Nell'insieme $\mathbf{H}$ delle funzioni aritmetiche definiamo la cosiddetta “convoluzione di Dirichlet¹⁵” per due qualsiasi funzioni aritmetiche $f, g \in \mathbf{H}$, nel modo che segue:

$$(f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Questa operazione, come è immediato, è associativa, commutativa, ed è anche dotata di un elemento neutro, tale essendo la funzione:

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & se \ n = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

poiché

$$f \times \varepsilon = \varepsilon \times f = f \quad (\forall f \in \mathcal{H}).$$

Definita l'operazione di convoluzione osserviamo che come struttura algebrica, l'insieme $\mathbf{H}$ delle funzioni aritmetiche

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

rispetto all'addizione funzionale e al prodotto per un numero complesso, costituisce quella ben nota struttura che prende il nome di *spazio vettoriale hilbertiano numerico*, spesso denotato in letteratura con l^2 , nel quale ogni funzione ha come immagine una successione numerica di numeri complessi.

Se lo spazio hilbertiano $(\mathbf{H}, +)$ si completa con la convoluzione, la struttura:

$$(\mathcal{H}, +, \times)$$

¹⁵ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859)

è un *anello commutativo ed unitario*, anzi un'algebra (con la moltiplicazione di uno scalare per una funzione). In più si può provare che [29]:

- 1) *L'anello è integro* (cioè non ammette divisori propri dello **0**);
- 2) *Gli elementi invertibili sono tutti e soli gli elementi f tali che $f(1) \neq 0$.*

Come noto, per ogni *anello commutativo ed unitario*, gli elementi invertibili, o *unità*, formano un gruppo rispetto alla “moltiplicazione”, l'operazione $\times$, nel nostro caso.

Si dimostra che le funzioni moltiplicative formano all'interno di questo gruppo un sottogruppo formato dalle funzioni aritmetiche moltiplicative.

Vediamo ora qualche dettaglio, ad esempio si può dimostrare che:

$$\mu \times u = \varepsilon,$$

Ovvero le funzioni u e μ , sono una l'inversa dell'altra. Infatti:

$$(\mu \times u)(1) = (\mu \times \square \square u)(1) = 1 = \varepsilon(1)$$

$$(\mu \times u)(p) = \mu(1) u(p) + \mu(p) u(1) = 1 - 1 = 0 = \varepsilon(p) \dots \forall p \in \mathbb{P}$$

$$(\mu \times u)(p^\alpha) = ((\mu \times u)(p))^\alpha = 0 = \varepsilon(p^\alpha).$$

E essendo le due funzioni moltiplicative, tale è il loro prodotto e quindi:

$$(\mu \times u)(n) = (\mu \times u)(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = \prod_{i=1}^r (\mu \times u)(p_i^{\alpha_i}) = 0 = \varepsilon(n) \cdot \forall n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

La proprietà caratteristica della funzione di Eulero

$$\sum_{d|n} \Phi(d) = n$$

si può ora così scrivere:

$$\sum_{d|n} \Phi(d) u\left(\frac{n}{d}\right) = N(n)$$

che si traduce nella espressione simbolico-funzionale:

$$\Phi \times u = N.$$

Dalla relazione $\mu \times u = \varepsilon$, segue

$$N \times \mu = \Phi \times u \times \mu = \Phi \times \varepsilon = \Phi$$

ovvero:

$$\Phi = N \times \mu$$

definizione formale, questa, della funzione di Eulero, sulla quale si fondano tutte le molteplici generalizzazioni della funzione di Eulero stessa, quali ad esempio:

$$\Phi_q = N^q \times \mu \quad \text{dove} \quad N^q(n) := n^q,$$

modo formale di introdurre la funzione di Eulero-Cohen, dove, come ricordato, $\Phi_q(n)$ è il numero delle q-ple di numeri non superiori ad n e tali che il MCD degli elementi della q-pla sono primi con n.

Dalla precedente si ricava facilmente:

$$\Phi_q(n) = n^q \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^q}\right).$$

Nell'indirizzo Cipolla – Pellegrino – Rizzi – Eugeni si è preferito portare l'attenzione su questo anello, e in particolare sull'uso, dei *calcoli simbolici*, che in esso si possono fare, con metodi più vicini a quelli dell'algebra. L'altro indirizzo, diciamo di Bell – Cohen – Subbarao - Suryanarayana ed altri, ha portato l'attenzione sulle formule “*non simboliche*”, utilizzando per provare le identità, le regole del confronto delle maggiorazioni in ambo i sensi, di parti delle identità con metodi più vicini a quelli dell'analisi matematica.

Nel 1959 Cashwell ed Everett [27], provarono che *l'anello delle funzioni aritmetiche è a fattorizzazione essenzialmente, unica*, per via di un isomorfismo con l'anello dei polinomi con una infinità numerabile di variabili, e lavorando su questo. Si può anche costruire un secondo isomorfismo tra l'anello delle funzioni aritmetiche e l'anello delle serie formali di Dirichlet, argomento che tratteremo tra breve.

Non sono state caratterizzate le funzioni prime, e nemmeno la differenza con le irriducibili. Alcuni lemmi interessanti sull'argomento sono dovuti a Renato Migliorato che se n'è occupato nei primi anni '80, in lavori di carattere locale che non hanno avuto grande diffusione.

2. Le Generalizzazioni della Funzione di Eulero

È costume che quasi tutti gli studiosi di Teoria delle funzioni aritmetiche, hanno presentato una loro generalizzazione della funzione di Eulero, talvolta detta “*indicatore*” o anche “*totient*”. Così si parla di indicatori e di classi di indicatori di Cohen, di Stevens, di Subbarao, di Mc Carty, Suryanarayana, Horadam, Eugeni, Nagell, etc. Una definizione interessante

dovuta a Rizzi [18], su indicazione di Eugeni, fornisce una definizione formale, molto generale, da includere tutti quelli presentati dai vari autori. Per comprendere questa definizione, sia $A \subseteq \mathbb{N}$, un insieme di naturali non vuoto e sia I_A la funzione indicatrice di A , cioè la funzione definita ponendo

$$I_A(n) = 1 \text{ se } n \in A, \quad I_A(n) = 0 \text{ se } n \notin A,$$

Sia poi K una funzione *completamente moltiplicativa*, cioè tale che:

$$K(mn) = K(m)K(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Chiameremo *indicatore generalizzato* la funzione definita ponendo:

$$\Phi(K, A) = K \times \mu \times I_A.$$

Osserviamo che per $A = \mathbb{N}$, l'indicatore definito sopra, si denota con Φ_K , e si ha:

$$\Phi_K(n) = \Phi_K\left(\prod_{p|n} (K \times \mu)(p^\alpha)\right) = \prod_{p|n} [K(p)^{\alpha-1} (K(p) - 1)] = \prod_{\substack{p|n \\ K(p) \neq 0}} \left[1 - \frac{1}{K(p)}\right] =$$

- 1.- Se $K = \mathbb{N}$, con $N(n) = n$, $A = \mathbb{N}$, allora $\Phi(K, A) = \Phi$ (Indicatore di Eulero)
- 2.- Se $K = \mathbb{N}^q \dots \text{con} \dots N^q(n) = n^q$, $A = \mathbb{N}$, allora $\Phi(K, A) = \Phi_q$ (Indicatore di Cohen)
- 3.- Se $K = \mathbb{N}^q \dots \text{con} \dots N^q(n) = n^q$, ed A è l'insieme dei numeri liberi da quadrati, ovvero l'insieme dei numeri primitivi di dato ordine si hanno gli indicatori di Eugeni.
- 4.- Se $K = \mathbb{N}$, con $N(n) = n$, $A = \mathbb{Q}$ (insieme dei quadrati) allora si ha il numero dei numeri m , non superiori ad n , primi con m e che sono dei quadrati (introdotti da vari autori)
5. - Se $K = \mathbb{N}$, con $N(n) = n$ ed A è un qualsiasi insieme di numeri naturali, allora si ha il numero dei numeri m , non superiori ad n , primi con m e che sono elementi di A .

Gli esempi dati chiariscono la vastità della generalizzazione!

In questo contesto, si può anche assegnare una espressione simbolica, alla celebratissima funzione detta *somma di Ramanujan* [24], precisamente la:

$$C(n,r) := \sum_{\substack{m(\bmod n) \\ (m;n)=1}} \exp(2\pi i m r/n)$$

Nella somma m prende i valori nel sistema dei residui mod n . L'espressione inoltre rappresenta la somma delle potenze r -me delle radici n -me primitive dell'unità. È ben noto che Snivrastra Ramanujan¹⁶ ricavò da questa sua funzione un incredibile numero di applicazioni. Si noti pure che:

$$C(n,n)=C(n,0) = \Phi(n)$$

È noto che:

$$C(n,r) = \sum_{\substack{d|n \\ d|r}} d\mu(n/d) = \sum_{d|(n,r)} d\mu(n/d)$$

Se denotiamo con $D(r)$ l'insieme dei divisori dell'intero r , si può scrivere:

$$C(_, r) = N \times \mu \times I_{D(r)}$$

che è appunto una espressione simbolica della parte funzionale della somma di Ramanujan.

3. La Funzione di Möbius Generalizzata

Un capitolo ulteriore si apre con la teoria della funzione di Möbius generalizzata, all'interno delle Algebre di Incidenza [30], definite su un insieme parzialmente ordinato (poset) ed introdotte da Gian-Carlo Rota¹⁷. [Per il lettore interessato possiamo riferimento al lavoro di Eugeni e Rizzi, dal titolo: *An Incidence Algebra On Rational Numbers* [15]. In quel lavoro, noi costruiamo e studiamo nei dettagli, un caso, quello nel quale il *poset* è l'insieme dei numeri razionali (ridotti ai minimi termini), parzialmente ordinati secondo la regola di divisibilità seguente:

$$(h/k) \mid (m/n) \text{ nei razionali} \quad \underline{\text{se e solo se}} \quad h \mid m, k \mid n \text{ nei naturali.}$$

Il lettore interessato può leggere la costruzione per analogia delle funzioni classiche e la revisione di tutte le varie proprietà ma sui numeri razionali invece che negli interi.

Tra le applicazioni è interessante il nostro lavoro, che generalizza il lavoro classico di de Finetti [25], sulla probabilità che il MCD di n numeri scelti a

¹⁶ Le applicazioni trovate da Snivrastra Ramanujan (1887-1920) sono riportate nel suo lavoro del 1918 citato in bibliografia.

¹⁷ Vedi precedente nota.

caso sia un numero assegnato. Nel nostro lavoro [16], ci occupiamo della valutazione delle probabilità inferiore e superiore¹⁸ che il k-MCD¹⁹ di n numeri scelti a caso appartengano ad un insieme prefissato. La nozione di scelta a caso è ricondotta ad una idea di Baclawski e Rota [31] che collega la scelta a caso alla cosiddetta funzione zeta di Riemann $\zeta(s)$ (con s variabile complessa), della quale parleremo tra breve.

Precisamente prefissato un numero reale $\alpha > 1$ e una parte A dell'insieme N dei numeri naturali, consideriamo l'evento, che indichiamo ancora con A, “*un naturale scelto a caso in N appartiene ad A*”. Ciò premesso la probabilità dell'evento A (detta *probabilità di Dirichlet*) è definita ponendo:

$$P_{\alpha}(A) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n \in A} n^{-\alpha}$$

Si verifica facilmente che P_{α} è una misura di probabilità su N. Inoltre, denotati con M_p l'insieme dei multipli di un intero p, la misura di probabilità è tale che:

$$P_{\alpha}(M_p \cap M_q) = P_{\alpha}(M_p)P_{\alpha}(M_q)$$

quali che siano i due primi p e q.

In questo contesto poi se $B(N)$ è la σ -algebra delle parti di N, lo spazio di probabilità $(N, B(N), P_{\alpha})$ si chiamerà lo *Spazio di probabilità di Dirichlet*. In tal modo, per l'evento A, la locuzione “*scelto a caso*” significa che la probabilità di A è presa nello Spazio continuo di Dirichlet.

La funzione ζ rientra in una vasta classe, denotata con D, di funzioni di variabili complesse²⁰, definite formalmente da una classe di serie, dette di Dirichlet, delle quali non ci preoccupiamo della convergenza ma solo delle loro strutture algebriche. La generica serie è definita da:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$$

Ed appare ben chiaro come la funzione di variabile complessa F(s) sia generata dalla funzione aritmetica $f(n)$, che ne assegna i coefficienti dei vari termini.

La relazione fondamentale è la seguente:

¹⁸ Tali probabilità inferiore e superiore coincidono quando k=1, caso dell'ordinario MCD, generalizzando in tal modo il teorema di de Finetti.

¹⁹ Il k-MCD di due numero m,n è il più grande divisore comune che sia una potenza k-ma.

²⁰ Definite ove le rispettive serie convergono.

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (f \times g)(n)n^{-s}$$

Dalla quale è facile intuire il sottogiacente isomorfismo tra l'anello (algebra) delle funzioni aritmetiche $(\mathbf{H}, +, \times)$ con l'anello (algebra) delle serie formali di Dirichlet $(\mathbf{D}, +, \cdot)$!

4. Conclusioni

Una ultima questione da mettere in risalto è che, nel volume [22], del prof. Pentti Haukkanen, dell'Accademia Finnica delle Scienze, volume nel quale si fa il punto della situazione a tutto il 1987, direi lo stato dell'arte della teoria, delle ricerche di identità nell'ambito della Teoria delle Funzioni aritmetiche, in particolare per tutto il settore riguardante le generalizzazioni in varie direzioni delle identità di Snivasta Ramanujan. Molto importante la bibliografia internazionale che compare in questa opera, che si completa con l'elenco aggiuntivo posto dopo la lista dei lavori collegati a Bruno Rizzi, dal [24] in poi. Da notare che nel lavoro di Huakkanen i lavori di Eugeni e Rizzi e del loro gruppo di ricerca sull'argomento, fanno ottima comparsa. Sono citati in bibliografia ben dieci lavori e gli stessi sono costantemente richiamati in diversi punti nelle pp. 16, 23, 25,30, 31, 33, 35, 54, 56. del volume.

Appendice

1.- Bruno Rizzi (1935-1995). Trascorre l'infanzia a Tripoli dove i genitori insegnano nel Liceo italiano. La famiglia è di 14 figli. Si laurea all'Università di Roma nel 1960 e inizia la carriera come docente di scuola secondaria. Entra nel gruppo del Prof. Bruno de Finetti²¹, che sarà il suo principale maestro, essendo divenuto Assistente Ordinario e Professore incaricato, stabilizzato dal 1969. Nel 1982 diviene Professore Associato di Matematica Finanziaria, presso l'Università di Roma la Sapienza. Vincitore del Concorso da Professore Ordinario nel 1986, viene chiamato all'Università di Napoli sulla Cattedra di Matematica Generale presso il Dipartimento di Matematica e Statistica, allora

²¹ Bruno de Finetti (1906-1995). Sono tante le commemorazioni e i ricordi di questo grande matematico italiano. Ne ricordiamo due. Si legga G. Anichini, *Giornata in ricordo di Bruno de Finetti*, Per. di Mat. (7) n.2, (2015) 109-121. Si legga pure l'Introduzione, a cura di Giordano Bruno e Giulio Giorello, al volume: B.de Finetti, *L'invenzione della verità*, Cortina Editore Milano 2006 (il volume era un inedito del 1934, ritrovato dalla figlia Fulvia, come si legge nella premessa, da Lei fatta al meraviglioso inedito del Padre.). Il volume fu presentato anche al Congresso Nazionale della Mathesis di Trento del 2006 e in quasi tutte le Università italiane.

diretto dal prof. Alessandro di Lorenzo. Nel 1989 è chiamato presso la cattedra di Analisi Matematica della Facoltà di Ingegneria di Roma la Sapienza e nel 1990, per opzione, si sposta sulla medesima cattedra della nascente Università di Roma tre, dove militerà fino alla sua scomparsa nel 1995. La sua attività scientifica è fortemente legata allo sviluppo e alla rinascita della Società Italiana “Mathesis”, rinascita dovuta, nel dopoguerra, all’opera instancabile di Bruno de Finetti, suo maestro. Sarà tuttavia Rizzi il promotore dei rinati Convegni Mathesis del dopo guerra, che a partire dal Convegno di Monopoli del 1980, si sono poi tenuti annualmente da allora ad oggi. Dopo la Presidenza de Finetti, iniziata nel 1970 e terminata per ragioni di salute nel 1981, collaborerà con il nuovo Presidente Angelo Fadini ²² (1915-1992), che dirigerà la Società fino al 1987, anno in cui Rizzi stesso ne diverrà Presidente, ruolo che terrà fino al 1993. La sua attività è fortemente legata al Periodico di Matematica, organo della Mathesis, rivista fondata nel 1894 e pubblicata ininterrottamente fino ad oggi. Suo successore sarà Silvio Maracchia (1994-1999) e dopo la scomparsa di Rizzi saranno Presidenti nell’ordine Franco Eugeni (2000-2003), Andrea Laforgia (2003-2008) e l’attuale Presidente Emilio Ambrisi dal 2009 ad oggi, tutti suoi fedeli amici e collaboratori. Tra costoro vanno particolarmente annoverati, ciascuno in vari periodi temporali, per collaborazioni in articoli e partecipazioni come membri del direttivo Mathesis, i professori Ordinari Angelo Fadini, Giovanni Melzi, Franco Moriconi, Franco Eugeni, Luigia Berardi, Eliano Pessa, Francesco Sanna, Andrea Laforgia, Antonio Maturo, i professori associati Aldo Morelli, Silvio Maracchia, Fabio Mercanti, Mauro Cerasoli, Giordano Bruno, gli Ispettori tra i quali citiamo Giuseppe Festa, Emilio Ambrisi, Antonino Giambò, Salvatore Furneri, Marilena Levato, Presidi e Professori universitari a contratto (Ciro d’Aniello, Ferdinando Casolaro) e ancora centinaia tra Presidi e professori di scuola secondaria. I lavori e l’organizzazione del Periodico erano nella storica sede di via Vicenza (Università di Roma, la Sapienza) e presso il glorioso Circolo Matematico di Via Segesta, anche questo notevole centro di attività. La sua vastissima produzione scientifica, in articoli e volumi, riguarda i campi della didattica e storia della matematica e della scuola, la matematica finanziaria, la teoria dei numeri e la lunghissima serie di lavori sui modelli economici dinamici di tipo “morfogenetico” (generalizzazioni del modello di Goodwin), per un totale di opere non facilmente quantizzabili ma che si aggirano su oltre 300 titoli. Interessante il gruppo culturale che si era formato attorno a lui per lo sviluppo della diffusione della cultura e le innovazioni per la didattica. Sono di notevole interesse anche i tre lavori scritti con Antonio Maturo, sul settore dell’aritmetica addittiva, relativi alla decomposizione di un

²² Si vedano gli articoli E. Ambrisi-B. Rizzi, *Ricordo di Fadini*, *Per.di Mat.* N.2 (1992) e quello di A.Ventre, *Ricordo di Angelo Fadini*, *Cento anni di Matematica*, Atti del Convegno “Mathesis Centenario-1895-1995”, Palombi Editore Roma (1996) 165-167.

numero primo in somma di quadrati, che costituiscono lo stato dell'arte del problema, del resto l'interesse per l'aritmetica addittiva nasce fin dal lavoro [3].

2.- Michele Cipolla²³ (1880-1947), laureato a Palermo nel 1902, insegnò per quasi un decennio nelle scuole medie, nel 1911 divenne professore di Analisi algebrica all'Università di Catania. Dal 1923, si trasferì all'Università di Palermo. Dottore honoris causa dell'Università di Sofia, membro di varie accademie italiane fra cui quella dei Lincei. Importanti i contributi di Cipolla alla teoria dei gruppi finiti e alla teoria dei numeri con particolare riguardo alla teoria delle funzioni aritmetiche. Le sue pubblicazioni assommano a circa un centinaio di lavori oltre ad una decina di trattati di livello universitario, una collana di testi per le scuole medie, scritti con Vincenzo Amato e Gaspare Mignosi. Fra i trattati universitari ricordiamo il volume di analisi algebrica, il volume sulla teoria dei gruppi e la raccolta delle sue conferenze sulle matematiche elementari dal punto di vista superiore.

3.- Eric Temple Bell (1884-1960), nacque in Scozia, ma la sua famiglia si trasferì in California subito dopo la sua nascita. Rientrarono in Inghilterra nel 1896. Tornò negli Stati Uniti nel 1902, dove Bell completò gli studi. Presso la Stanford University e la Columbia University. Lavorò alla Washington University e poi al California Institute of Technology. I suoi lavori di ricerca hanno riguardato soprattutto la teoria dei Numeri e delle funzioni aritmetiche e l'Analisi Algebrica (Combinatoria), dando il nome ai cosiddetti numeri di Bell, e all'idea delle serie formali (studio della struttura delle serie senza preoccuparsi della loro convergenza) come base per lo studio delle funzioni generatrici. L'idea, che ebbe Bell nel 1940, di definire il *calcolo umbrale* su basi logicamente rigorose non ebbe successo (il successo lo ebbe Giancarlo Rota negli anni '80 nel 1900). Le due opere che ricordiamo con maggiore interesse nel nostro contesto sono: *An Arithmetical Theory of Certain Numerical Functions* (Seattle Washington, The University, 1915) e *I grandi matematici (Men of Mathematics)*, New York, Simon and Schuster, 1937), Rizzoli, 1997 – 2010).

Bell, con lo pseudonimo di John Taine, fu anche apprezzato autore di racconti, che precorsero la fantascienza, anche tradotti in Italia. Tra i vari ricordiamo: *Il flusso del tempo (The Time Stream)*, 1930) in: *Verso i primi giorni del mondo*, I Romanzi Travolgenti n.4, Società Editrice Cremona Nuova, 1953, *La grande razza (The Purple Sapphire)*, 1924; traduzione di Roberta Rambelli, in *Le*

²³ Vedasi il Necrologio scritto da Giovanni Sansone su : Rend. Lincei, (8) 21 (195611), pp. 507-523

Origini (dal 1800 al 1925), Storia della Fantascienza n.1, Libra Editrice, 1980,
La stella di ferro (The Iron Star, 1930); traduzione di Alberto Ravaglioli,
 SLAN – Il meglio della fantascienza n.58, Libra Editrice, 1981.

I **Numeri di Bell** - indicati con B_n sono definiti come il numero di partizioni di un insieme finito di n elementi, idea dovuta a Snivastra Ramanujan ma studiati sistematicamente da Bell nel 1934.

I primi numeri di Bell sono

$$B_0 = 1 \dots B_1 = 1 \dots B_2 = 2 \dots B_3 = 5 \dots B_4 = 15 \dots B_5 = 52 \dots B_6 = 203 \dots B_7 = 877 \dots B_8 = 6863$$

Ad esempio $B_2 = 2$ perché se un insieme ha due elementi a, b , allora le partizioni sono $a|b$ e a, b . Analogamente $B_3 = 5$ perché se l'insieme ha tre elementi a, b, c , allora presenta le 5 partizioni seguenti: $a|b|c$, $a, b|c$, $a, c|b$, $a|b, c$, a, b, c !

I numeri di Bell possono essere calcolati, mediante una formula di ricorrenza, a partire da $B_0 = 1$, oppure utilizzando l'elegante serie di Dobinski:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \qquad B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Interessante anche l'uso del cosiddetto triangolo di Bell seguente:

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

Nel triangolo ogni riga inizia con l'ultimo numero della riga precedente, seguito dalla somma del numero precedente nella riga, con quello ch è sopra di lui, nella riga precedente! Esistono ancora due formule considerate di interesse nell'ambito degli studi di Bell che sono la *funzione generatrice esponenziale dei numeri di Bell* e la seguente speciale *congruenza di Touchard*:

$$e^{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

$$B_{p+k} \equiv B_k + B_{k+1} \dots (\text{mod } p) \dots p, \text{ primo}$$

4.- **Franco Pellegrino** (1906-1978). Nato ad Ispica, fu studente di Michele Cipolla a Palermo. Personaggio molto estroso interruppe gli studi per alcuni anni per dedicarsi alla musica. Andò in giro per il mondo a dare concerti di violino in collaborazione con la sua futura moglie, abile pianista. Si laurea in matematica nel 1941 ed inizia una stretta collaborazione con il prof Luigi Fantappiè²⁴ (1901-1956), che lo vorrà come Ricercatore presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma (INdAM), allora diretto da Francesco Severi. I suoi campi di ricerca saranno la teoria dei funzionali Analitici, secondo Fantappiè, e la Teoria delle funzioni aritmetiche, secondo Cipolla, teorie queste alle quali darà ampi contributi. Fu Libero docente in Teoria dei Numeri, ebbe incarichi di insegnamento di vario genere quali Analisi Matematica a Roma La Sapienza e a Perugia, Matematiche Complementari a Messina e principalmente Algebra e Teoria dei numeri, per molti anni, a L'Aquila. Pur non divenendo professore di ruolo nelle Università, nel suo *Circolo di ricerche in collaborazione*, si sono formati, almeno nelle loro attività iniziali, vari ricercatori divenuti poi professori Ordinari (Michele Vaccaro, Francesco Succi, Franco Eugeni, Bruno Rizzi, Luigia Berardi, Antonio Maturo) o Professori Associati (Giuseppe Arcidiacono,, Renato Migliorato, Serafino Patrizio).

5.- **Il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica** (oggi INDAM) venne istituito con la legge 13 luglio 1939-XVII, n. 1129, a firma di Vittorio Emanuele III e Benito Mussolini. La fondazione nasce su proposta di Francesco Severi, da una idea di Luigi Fantappiè. Secondo alcuni fu anche un ruolo permanente, ad un rango rettorale, per il prof. Severi. Il primo Consiglio scientifico fu composto da Francesco Severi (presidente), Luigi Fantappiè, Giulio Krall, Enrico Bompiani e Mauro Picone. La denominazione "reale" viene eliminata e successivamente e l'Istituto fu intitolato a "*Francesco Severi*". L'attività principale dell'INDAM è costituita dalla organizzazione di corsi avanzati rivolti ai giovani tra i più dotati, contribuendo, in misura rilevante, alla formazione di molte delle maggiori personalità della matematica italiana, anche per le possibilità loro offerte di entrare in contatto con molti matematici della scena internazionale.

Franco Eugeni, nato nel 1941, ha percorso i vari gradini della carriera universitaria da Assistente e Professore Incaricato (1963) a Professore

²⁴ Si veda l'articolo G. Arcidiacono, La vita e le opere di Luigi Fantappiè, Cento anni di Matematica, Atti del Convegno "Mathesis Centenario-1895-1995", Palombi Editore Roma (1996)230-232.

Ordinario (1986), insegnando per 46 anni (1963-2009) in diverse Università: Modena, L'Aquila, Chieti-Pescara. Roma, Milano Politecnico, Teramo) varie discipline matematiche quali Geometria, Matematiche Complementari, Istituzioni di Matematiche, Matematica generale e Analisi Matematica. Negli ultimi anni è passato sulla cattedra di Logica e Filosofia della Scienza (2002) per l'insegnamento dell'Epistemologia dell'Informatica. Attualmente in pensione è stato per 2009-2016 professore di *Geometria Descrittiva e Matematica creativa* presso l'ISIA di Pescara (sede staccata dell'ISIA di Roma) e professore a contratto di *Tecniche di ricerca* nell'Università di Chieti, nel 2013-15 è stato Direttore dell'Istituto Universitario "A. Macagno" di Cuneo. È stato Presidente Nazionale della Mathesis nel triennio 2001-2004, professore onorario ad Iasi (Romania), Commendatore della Repubblica Italiana. Ha al suo attivo oltre 300 titoli di pubblicazioni. Si vedano le sue attività su wikipedia e su www.apav.it e su www.eiris.it.

Fabrizio Maturo is Ph.D. in "Economics and Statistics", and Researcher at the Department of Business Administration of "G. d'Annunzio" University of Chieti-Pescara (Italy). He is chief editor of the international journal "Ratio Mathematica", and co-editor of the international book "Mathematical-Statistical models and qualitative theories for economic and social sciences" published by Springer. Fabrizio is also associate editor of the "Journal of Statistics and Management Systems" published by Taylor & Francis and participate to the editorial board of many other international journals, e.g. "Italian Journal of Pure and Applied Mathematics" and "International Journal of Risk Theory". His main research interests are diversity, functional data analysis, fuzzy logic, multivariate statistics, statistical model for business and management science, item response models, econometrics, and R statistical programming. His teaching activity regards statistics for businesses, mathematics, and computer science.

Bibliografia

(nei due elenchi le opere sono in ordine cronologico)

Opere con il contributo di Bruno Rizzi

[1] B.RIZZI, *Sulle successioni uniformemente dense*, Giornale Ist. Ital. Attuari, Anno XXXI, n.1 (1968) 1-6.

[2] B.RIZZI, *L'albero e il traliccio degli interi*, Per.di Mat, 5 (1973), 7-31.

[3] B.RIZZI, *Teoria dell'informazione e aritmetica addittiva*, Per.di Mat, (51)4-5 (1975) 7-12.

[4] F.MORICONI-B.RIZZI, *An Alternative Appoch to YES-NOT Questions Problem*, Proc. 6th Congress of Gesellschfft fur Informatic Stuttgart (1976).

[5] B.RIZZI, *Sulla estensione delle nozioni di condizionata e incondizionata additività*, La Ricerca (4) (1977), 5-18.

[6] F.MORICONI-B.RIZZI, *Solution at finite Terms of some problems in the Theory of communication*, Ist. Mat. Finanz. Univ. Genova (1977) 1-10.

[7] B.RIZZI, *Su alcune trasfornate della zeta di Rieman*, Per.di Mat, (5) 1-2 (1978) 3-33.

[8] F.MORICONI-B.RIZZI, *Dystropy in the Dichotomic Trees*, Boll. Un. Mat. Ital. (5), 15-A(1978) 180-186

[9] F.EUGENI-B.RIZZI, *Una estensione di due identità di Anderson-Apostol e Landau*, La Ricerca, Anno XXX, n.2 (1978), 16-35.

[10] F.EUGENI-B.RIZZI, *Una classe di funzioni aritmetiche periodiche*, La Ricerca, Anno XXX, n.2 (1979), 3-14.

[11] F.EUGENI-B.RIZZI, *On certain Solutions of Cohen Functional Equation Relating the Brauer- Rademacher Identity*, Boll. Un. Mat. Ital. (5), 17-B (1980) 969-978.

- [12] F.EUGENI-B.RIZZI, *Sugli elementi fortemente moltiplicativi dell'anello delle funzioni aritmetiche*, Atti Fac. Ing. L'Aquila (II) (1980) 127-142.
- [13] L.BERARDI-B.RIZZI, *Somma generalizzata di Ramanujan per l'indicatore di Stevens*, La Ricerca, Anno XXXI, n.3 (1980), 29-35.
- [14] M.CERASOLI-B.RIZZI, *La formula di Poincaré in probabilità*, Atti Convegno Nazionale Mathesis, Monopoli (1981) 219-229.
- [15] F.EUGENI-B.RIZZI, *An Incidence Algebra On Rational Numbers*, Rend. Mat.(3-4) 12 (1982) 557-576.
- [16] M.CERASOLI-F.EUGENI-B.RIZZI, *Sulla probabilità del k-MCD di n naturali scelti a caso*, Rend. Mat.(7) 3 (1983) 367-379.
- [17] L.BERARDI-B.RIZZI, *Generalizziamo il codice RSA e la funzione di Eulero*, Atti I Simposio Internazionale "stato e prospettive della ricerca crittografica in Italia, Fondazione "Bordoni", Roma, 1987.
- [18] B.RIZZI, *Some Identities for a Generalized Eulero's Indicator*, Rend. Mat.(9) 3 (1989) 312-3332.
- [19] F.CASOLARO-F.EUGENI – B.RIZZI, *Una costruzione della soluzione generale della equazione di Eckford. Cohen*, Scritti in memoria di Giovanni Melzi, Collana Vita e pensiero, Univ. Cattolica Milano (1994) 95-106.
- [20] A.MATURO-B.RIZZI, *Sulla decomposizione di un numero primo in somma di due quadrati*, Per.di Mat 4 (1989) 17-48.
- [21] A.MATURO-B.RIZZI, *Sulla decomposizione di un numero primo in somma di tre quadrati*, Per.di Mat 3 (1990) 14-44.
- [22] A.MATURO-B.RIZZI, *Sulla decomposizione di un numero primo in somma di quadrati*, Per.di Mat 4 (1990) 3-27.
- [23] PENTTI HUAKKANEN, *Classical arithmetical identities involving a generalization of Ramanujan's sum*, Annal. Acc. Sci. Fennicae, Series A, I.Math, Helsinki, (1988), pp.1-69.

I seguenti lavori riguardano la Teoria delle funzioni aritmetiche e sono piuttosto interessanti, e completano il panorama dei riferimenti.

Altri autori correlati

[24] E.CESARO, *Probabilité de certain faits arithmetiques*, Mathesis, 4 (1884) , (anche in opera scelte dell'U.M.I.).

[25] E.CESARO, *Sur le plus grand diviseur de plusieurs nombres*, Ann.Mat.pura e Appl., (2) 13 (1885), 291-294. 4 (1884) , (anche in opera scelte dell'U.M.I.).

[26] M. CIPOLLA, *Specimen de Calcolo Arithmetico Integrale*, Rivista di Matematica (Torino), (1908).

[27] M. CIPOLLA, *Sui principi del calcolo aritmetico integrale*, Atti Accademia Scienze di Catania(V) vol Xiii, (1915). – (Sono riassunti tutti i suoi lavori sull'argomento).

[28] E.T.BELL, *An Arithmetical Theory of Certain Numerical Functions*, Seattle Washington, The University, (1915) – (Sono riassunti tutti i suoi lavori sull'argomento).

[29] S.RAMANUJAN, *On certain trigonometrical sum and their applications in the theory of Numbers*, Trans. Cambridge Sve. 22 (1918) 259-276.

[30] B.de FINETTI, *Probabilità che il Massimo comun divisore di n numeri scelti ad arbitrio sia un numero dato*, Rend. Ist. Lomb.Sc.Lett. II, LX (1927) 638-643.

[31] E.COHEN, *Aritmetical Inversion Formulas*, Canadian J.Math, 12 (1960), 399-409.

[32] E.D.CASHWELL-C.J.EVERETT, *The ring of numeric theoretic functions*, Pacific.J.Math 9, (1959) 975-985.

[33] E.COHEN, *The Brauer- Rademacher Identity*, Amer.Math. Montly, 67 (1960) 30-33.

[34] F.PELLEGRINO, *Lineamenti di una Teoria delle funzioni aritmetiche*, Rend. Mat.(5) 15 (1960) 469-504.

- [35] G.C.ROTA, *Theory of Mobius functions*, Z.Wharrsch. 2 (1964) 340-368.
- [37] K.BACLAWSKI-G.C.ROTA, *An Introduction to Probability and Random Processes*, M.I.T. (1965).
- [38] M.V.SUBBARAO, *The Brauer- Rademacher Identity*, Amer.Math. Montly,72 (1965) 135-138.
- [39] F.PELLEGRINO, *Elementi moltiplicativi dell'anello delle funzioni aritmetiche*, Rend. Mat.(5) 26(1967) 422-509.
- [40] F.EUGENI, *Numeri primitivi ed indicatori generalizzati*, Rend. Mat.(6) ,1 (1973) 97-130.
- [41]D.SURYANARAYANA, *On a Functional Equation Relating the Brauer- Rademacher Identity*, Enseignem. Math. (2) 24 (1978) 55-61.
- [42] D.SURYANARAYANA, *Generalization of two identities of Ramanujan and Eckford Cohen*, , Boll. Un. Mat. Ital. (5), 17-A(1978) 424-430.
- [43] L.BERARDI- F.EUGENI, *La derivata numerica ed applicazioni*, Per.di Mat,2-3 (1979), 53-79.
- [44] L.BERARDI- F.EUGENI, *Funzioni indicatrici e applicazioni*, Per.di Mat,3-4(1980), 51-60.
- [45] M.CERASOLI-F.EUGENI-M.PROTASI, *Elementi di Matematica Discreta*, Zanichelli , Bologna 1988, con una presentazione di Giancarlo Rota..
- [46] F.EUGENI, *The generalized Cohen functional equation*, Atti Fac Ing. Cagliari, 18 (1982)pp.257-267.,
- [47] M.CERASOLI-F.EUGENI, *(E,k)-reduced residue system(mod r^k) and a generalization of Ramanujan's sum*, La Ricerca (1)34, Roma (1983), pp.78-91.N

A Journey into the Polyhedrons' World (Un Viaggio nel Mondo dei Poliedri)

Giuseppe Conti¹, Alberto Trotta²,
Francesco Conti³

Received: 24-05-2018. **Accepted:** 25-06-2018. **Published:** 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.406

©Conti et al.



Abstract

In this article the authors intend to present a very important topic of the geometry of space: the polyhedra. After having introduced their definition, their presence will be shown in nature, in everyday life and in art, starting from ancient Greece up to the present day. First of all, we will deal with regular polyhedra; subsequently we will introduce the important family, especially in the applications, of the Archimedean polyhedra. Finally, the interesting Goldberg polyhedra will be presented.

Keywords: Polyhedra, convex figures, space tessellation, golden rectangle, Euler's relation.

Sunto

¹ Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Matematica, Viale Morgagni 67/A, Firenze, Italia; gconti@unifi.it.

² IISS Santa Caterina-Amendola, Salerno, Italia; albertotrotta@virgilio.it.

³ Via G. D. Romagnosi 14, 50134 Firenze, Italia, franci8conti@gmail.com.

In questo articolo gli autori intendono esporre un argomento molto importante della geometria dello spazio: i poliedri. Dopo avere introdotto la loro definizione, sarà mostrata la loro presenza, nella natura, nella vita quotidiana e nell'arte, partendo dall'antica Grecia fino ad arrivare ai nostri giorni. Anzitutto tratteremo i poliedri regolari; successivamente introdurremo la importante famiglia, soprattutto nelle applicazioni, dei poliedri archimedei. Infine, saranno presentati gli interessanti poliedri di Goldberg.

Parole chiave: Poliedri, figure convesse, tassellazione dello spazio, rettangolo aureo, relazione di Eulero.

1. Introduzione

I poliedri costituiscono un argomento importante ed affascinante nell'ambito della geometria dello spazio sia per le loro notevoli proprietà geometriche, sia per la loro presenza in vari contesti scientifici, e non solo. Essi hanno sempre colpito la fantasia degli studiosi che hanno indagato le loro caratteristiche geometriche fino dall'antichità.

Con il presente articolo intendiamo fornire un contributo alla divulgazione di queste figure, affrontando tale argomento in maniera un po' diversa da quella tradizionale. Non intendiamo, dunque, presentare un trattato sui poliedri, ma mostrare che questi hanno molte attrattive, interessanti e, anche, divertenti applicazioni nell'arte, nella natura e, perfino, nella vita quotidiana.

2. I Poliedri Regolari

Ricordiamo che un poliedro (convesso) si dice regolare se tutte le sue facce sono poligoni regolari, congruenti fra loro, ed in ogni vertice arriva lo stesso numero di facce.

Proclo, storico della matematica del V secolo dopo Cristo, attribuisce a Pitagora la scoperta dei poliedri regolari; Proclo afferma: "Egli (Pitagora) scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche (i poliedri regolari)".

In realtà i pitagorici conoscevano il tetraedro, il cubo e il dodecaedro. In seguito i greci introdussero anche l'ottaedro e l'icosaedro (Brusotti, 1955).

La loro scoperta può essere ricondotta al fatto che nella Magna Grecia si rinvenivano facilmente cristalli di pirite che hanno la forma di un cubo, di un ottaedro e di un dodecaedro (anche se non regolare).

Successivamente Teeteto (circa 410 a. C.) dimostrò che i poliedri regolari sono soltanto questi cinque (Brusotti, 1955); la dimostrazione è abbastanza

semplice e si basa essenzialmente sul fatto che la somma delle facce di un angoloide è minore (strettamente) di un angolo giro.

I cinque tipi di poliedri regolari sono detti anche solidi platonici, poiché Platone ne parla esplicitamente nella sua opera *Il Timeo* (Frajese, 1951). Secondo Platone, ognuno di questi solidi doveva corrispondere alla struttura degli elementi fondamentali della materia. Infatti, il tetraedro fu abbinato al fuoco, l'ottaedro all'aria, l'icosaedro all'acqua, il cubo alla terra e il dodecaedro alla quintessenza.

Fra i poliedri regolari, il cubo era considerato dal greco Filolao (480-400 a. C.) il più perfetto, perché possiamo vedere che, fra i numeri delle sue facce, vertici e spigoli, intercorrono i rapporti musicali di ottava ($12/6 = 2/1$), quinta ($12/8 = 3/2$) e quarta ($8/6 = 4/3$). Per questo motivo nel Rinascimento molti palazzi avevano la forma di un cubo, come, ad esempio, avevano inizialmente il Palazzo Medici-Riccardi ed il Palazzo Rucellai a Firenze; dobbiamo, tuttavia, tenere presente che gran parte di queste costruzioni hanno perso il loro aspetto originario per le trasformazioni attuate nei secoli successivi (Conti et Al, 2017).

Per il fatto che il dodecaedro era associato alla quintessenza, Salvador Dalí ambientò il suo dipinto, *Ultima cena*, all'interno di questo poliedro.



Figura 1. Salvador Dalí. Ultima Cena

Inoltre, tutto il dipinto è contenuto in un rettangolo aureo (Livio, 2003); infatti, le dimensioni della tela sono 167x268, il cui rapporto è molto vicino a quello aureo. Questo fatto non è casuale; difatti Luca Pacioli, nel suo famoso volume *De divina proportione*, stampato a Venezia (1509), scoprì che i centri delle facce di un dodecaedro determinano tre rettangoli aurei (due a due perpendicolari fra loro); inoltre, egli dimostrò che anche i 12 vertici

dell'icosaedro formano tre rettangoli aurei, sempre due a due perpendicolari. Questo fatto può suggerire un semplice modo per costruire un icosaedro.

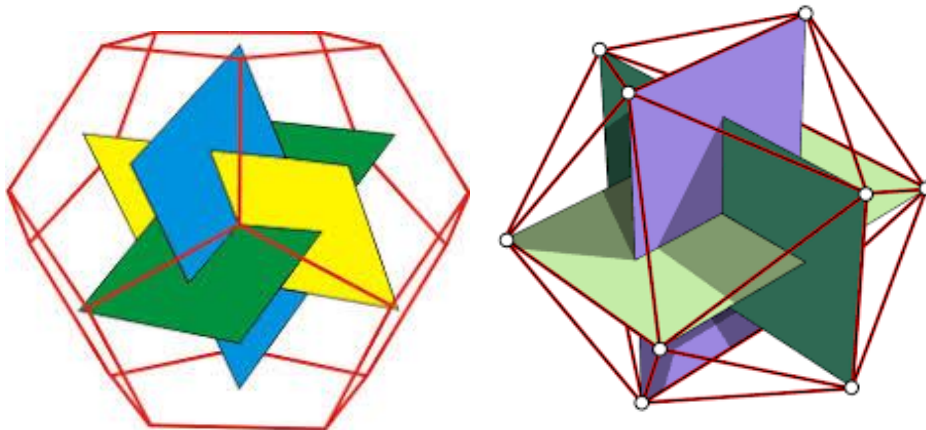


Figura 2. Rettangoli aurei nel dodecaedro e nell'icosaedro

Il *De divina proportione* è diviso in tre parti (Sgarbi, 1982); la terza parte è ripresa quasi integralmente dal libro di Piero della Francesca: *Libellus de quinque corporibus regularibus* (1482-1492), che tratta i cinque poliedri regolari. Notiamo che Luca Pacioli era allievo di Piero della Francesca ed entrambi erano originari di Borgo San Sepolcro (Arezzo). Osserviamo che il Vasari critica aspramente il comportamento di Luca Pacioli nei confronti di Piero della Francesca; infatti dice di Pacioli (Vasari, 1991): "... come empio e maligno cercò di annullare il nome di Piero suo precettore, et usurpar quello onore che solo a lui doveva ...".

Nel suo trattato Piero sostiene che il mondo è pieno di corpi complessi o senza una particolare forma, ma ognuno di essi può essere ricondotto ai cinque poliedri regolari che rappresentano la forma eterna, l'eterna perfezione.

I disegni dei solidi, presenti nel libro di Luca Pacioli, sono opera di Leonardo da Vinci.

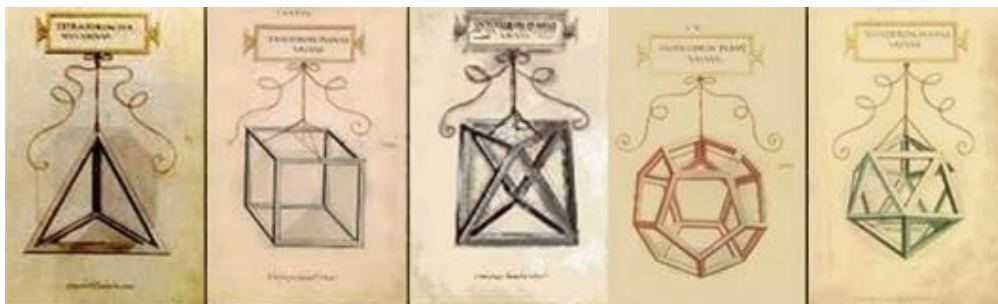


Figura 3. I poliedri regolari disegnati da Leonardo da Vinci

Sottolineiamo il fatto che nei disegni di Leonardo, come in quelli di Piero della Francesca, si nota una profonda conoscenza delle regole prospettiche. Il *Libellus de quinque corporibus regularibus* è successivo al suo *De prospectiva pingendi* (1472-1475), nel quale Piero mostra le regole della prospettiva, che erano già presenti nel primo libro del *De pictura* (l'edizione in volgare è del 1435), in cui Leon Battista Alberti espone i principi geometrici e le applicazioni della prospettiva che aveva appreso da Brunelleschi.

Nei libri di Pacioli e di Piero della Francesca si trovano molte figure e disegni esplicativi. Oggi questo fatto ci appare scontato, ma a quei tempi le cose andavano diversamente: infatti, gli umanisti dell'epoca ritenevano che le sole parole fossero sufficienti per spiegare i concetti geometrici.

I poliedri regolari sono presenti in vari aspetti dell'arte, della natura e della vita quotidiana a partire dall'antichità fino ai giorni nostri.

In Scozia sono state trovate figure di argilla, risalenti al 2000 a. C. circa, la cui forma si avvicina moltissimo ai poliedri regolari. Si ritiene che questi oggetti fossero elementi decorativi o, forse, destinati ad una specie di gioco. Tali manufatti sono attualmente esposti nel Museo Ashmolean di Oxford.



Figura 4. Figure a forma di poliedri regolari ritrovate in Scozia. Periodo neolitico

L'origine di questi pezzi può essere estetica, mistica, oppure religiosa, ma è anche possibile che siano stati osservati in natura sotto forma di scheletri di animali marini, come i Radiolari.

Infatti, gli scheletri di alcuni Radiolari hanno la forma di poliedri regolari (D'Arcy, 2003) ed esistono in natura cristalli di fluorite e di pirite che, come già detto, possono avere la forma di un cubo, di un ottaedro e di un dodecaedro (quest'ultimo non regolare).

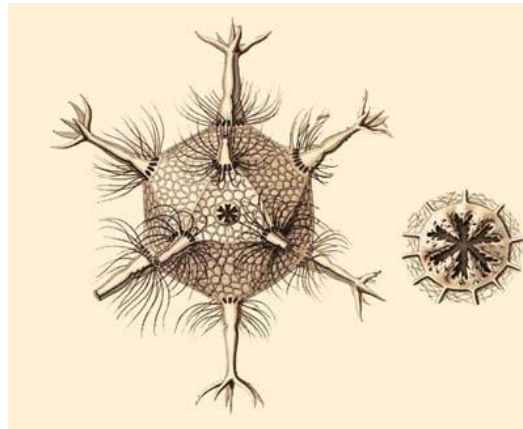


Figura 5. Fossile di una specie di Radiolaria a forma di icosaedro

Sono stati trovati, soprattutto nel nord della Francia ed in Germania, numerosi oggetti d'epoca romana, risalenti a II e III secolo d. C., che hanno la forma di un dodecaedro e di un icosaedro regolari. Non è noto quale fosse l'uso di questi manufatti; sono state avanzate numerose ipotesi sul loro impiego, ma la loro funzione rimane ancora oggi un mistero, tenendo anche conto che non sono presenti in alcun'altra opera di epoca romana.

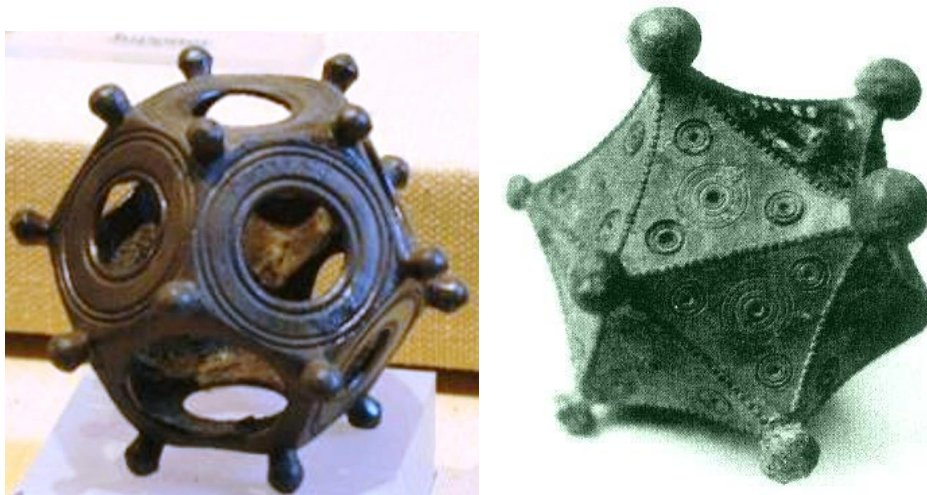


Figura 6. Oggetti di epoca romana (II, III secolo d. C.) a forma di poliedri

Alcuni contenitori di sostanze liquide hanno la forma di un tetraedro regolare; le prime confezioni con questa conformazione risalgono alla ditta Tetra Pak (1952).



Figura 7. Contenitori di bevande a forma di tetraedro

Dalla variazione della sola struttura cristallina nascono le enormi differenze tra la grafite ed il diamante; nella grafite gli atomi di carbonio formano degli esagoni disposti su piani paralleli fra loro (da qui deriva la tenerezza della grafite), dove ognuno di questi esagoni si lega ad altri tre; nei diamanti gli atomi di carbonio, invece, formano dei tetraedri regolari.

La molecola di metano CH_4 ha una struttura tetraedrica.



Figura 8. Molecola di Metano, CH_4

Il tetrapode è una struttura, di solito in cemento armato, utilizzata come frangiflutti; i suoi estremi si trovano nei vertici di un tetraedro regolare. Con la sua forma dissipa in maniera efficiente la forza delle onde, permettendo all'acqua di fluire attorno alla struttura piuttosto che contro essa.



Figura 9. Tetrapodi utilizzati come frangiflutti

L'Atomium è una costruzione in acciaio che rappresenta i 9 atomi di un cristallo di ferro; questo è rappresentato da otto sfere, che si trovano nei vertici di un cubo; la nona sfera è collocata nel centro del cubo. Venne innalzato in occasione dell'Esposizione Universale di Bruxelles del 1958.



Figura 10. Atomium. Bruxelles

Nel Cloruro di sodio NaCl lo ione Na^+ è circondato da sei primi vicini ioni di Cl^- disposti nei vertici di un ottaedro, il cui centro è occupato da Na^+ . In questo modo i sei Cl^- , coordinati ottaedricamente, neutralizzano con i loro legami la carica dello ione Na^+ , posto al centro del poliedro. Ma anche Cl^- ha intorno a sé sei ioni Na^+ , cosicché anche la forza, per ciascuno dei legami che

raggiungono Cl^- è di $1/6$; di conseguenza anche la carica sullo ione Cl^- viene neutralizzata dai sei ioni di Na^+ , che risultano essere anch'essi coordinati ottaedricamente con lo ione Cl^- .

Una struttura ottaedrica si trova anche nella molecola di Esafluoruro di Zolfo SF_6 . Lo Zolfo sta nel centro e gli atomi di Fluoro occupano i sei vertici dell'ottaedro.

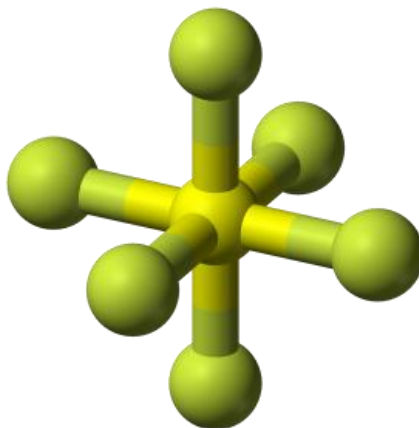


Figura 11. Esafluoruro di Zolfo.

Esistono altoparlanti aventi la forma di un dodecaedro, come il Dodecahedron Loudspeaker.



Figura 12. Dodecahedron Loudspeaker

Con la sua conformazione questo altoparlante distribuisce il suono in maniera uniforme in ogni direzione.

L'ingegnere Eduardo Torroja progettò nel 1951 un edificio a forma di dodecaedro per l'Istituto di Scienza della Costruzione dell'Università di Madrid. Come afferma lo stesso Torroja, esso era costruito, in maniera

semplice ed economica, mediante giunzione di lastre prefabbricate pentagonali.

Questa struttura era originariamente progettata come deposito di carbone per il riscaldamento, ma negli anni successivi è diventata un segno distintivo dell'Istituto.



Figura 13. E. Torroja. Edificio a forma di dodecaedro. Università di Madrid
Nel Museo Galileo di Firenze si trovano orologi solari dodecaedrici.



Figura 14. S. Bonsignori. Orologio solare, 1587. Museo Galileo. Firenze

L'icosaedro si trova frequentemente in natura. Esso è la sagoma dell'involucro esterno (capside) di molti virus, come, ad esempio, il virus dell'epatite A, il virus HIV, l'adenovirus, l'herpesvirus, il reovirus. Il capsid è la struttura proteica che racchiude l'acido nucleico del virus per proteggerlo. Il motivo per cui i virus hanno il loro involucro di forma icosaedrica dipende dal

fatto che, essendo un poliedro regolare, i codici genetici per la riproduzione degli stessi virus sono più semplici (Du Sautoy, 2007). Inoltre, fra i cinque poliedri regolari, l'icosaedro è quello che, a parità di superficie esterna, racchiude il volume più grande, essendo quello che più si avvicina alla sfera.

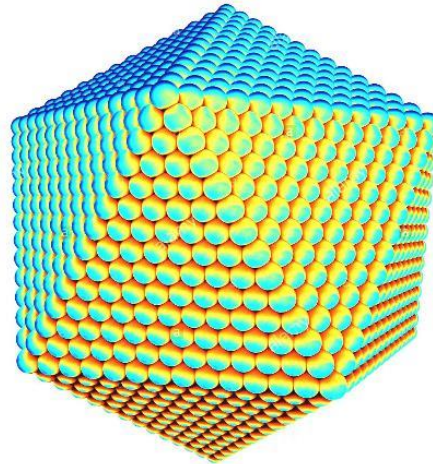


Figura 15. Struttura icosaedrica dei virus.

Nel suo *Mysterium cosmographicum* (1596) Keplero aveva creato un modello del sistema solare basato sui poliedri regolari. Keplero fu il primo a sostenere nel 1609 che le orbite dei pianeti sono ellittiche: tuttavia, al tempo della pubblicazione del *Mysterium*, egli le considerava ancora circolari, in accordo con l'opinione del tempo (Folicaldi, 2005).

Egli affermava: "L'orbita della Terra è la misura di tutte le cose. Si circoscriva attorno ad essa un dodecaedro, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Marte; attorno a Marte si circoscriva un tetraedro, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Giove; si circoscriva attorno a Giove un cubo, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Saturno. Poi si inscriva nell'orbita terrestre un icosaedro, e il cerchio contenuto sarà l'orbita di Venere, e ancora si inscriva all'interno dell'orbita di Venere un ottaedro e il cerchio contenuto sarà l'orbita di Mercurio."

Notiamo che al tempo di Keplero i pianeti conosciuti erano sei.

Tuttavia questo modello del sistema solare fu abbandonato dallo stesso Keplero poiché non corrispondeva alle reali misure delle distanze fra i pianeti, i quali, inoltre, percorrono orbite ellittiche e non circolari.

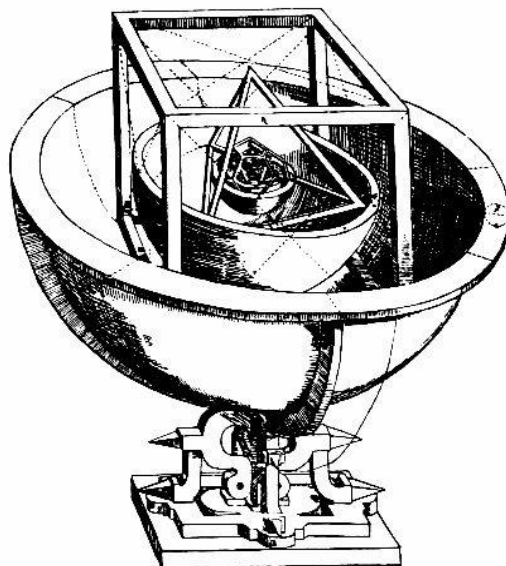


Figura 15. Modello del sistema solare di Keplero

3. I Poliedri Archimedei

Spesso si afferma che la palla è rotonda, ma questo non è sempre vero. Un pallone di calcio non è una sfera perfetta; esso è composto da pezzi che s'inarcano verso l'esterno quando lo gonfiamo, facendogli assumere così una forma simile ad una sfera. Sicuramente la prima risposta che viene in mente è che questi pezzi siano degli esagoni regolari. Ma, riflettendoci, possiamo osservare che non può essere così: infatti, gli esagoni regolari permettono di “piastrellare” una superficie piana, mentre, aggiungendo dei pentagoni, si riesce ad ottenere una superficie chiusa.

Per dare una risposta esauriente, dal punto di vista pratico e geometrico, alla forma del pallone da calcio, occorre anzitutto tornare indietro nel tempo.

Nel IV secolo d. C., in un'opera di Pappo di Alessandria, comparve una nuova famiglia di poliedri. Pappo, che li elencò e li studiò, li attribuì ad Archimede; per questo motivo essi furono chiamati in suo onore poliedri archimedei (Brusotti, 1955). Talvolta sono denominati anche poliedri semiregolari,

Si definisce poliedro (o solido) archimedeo un poliedro convesso che soddisfa le proprietà seguenti:

- 1) le sue facce, di almeno due tipi distinti, sono poligoni regolari e, di conseguenza, i suoi spigoli sono tutti congruenti;
- 2) le facce devono essere disposte nello stesso ordine intorno a ciascun vertice;

3) il solido non è un poliedro regolare, né un prisma archimedeo, né un antiprisma archimedeo.



Figura 16. I 13 poliedri archimedei

Ricordiamo che un antiprisma archimedeo è un poliedro formato da due poligoni regolari, chiamati basi, paralleli fra loro, con n lati ($n > 3$), e da $2n$ triangoli equilateri che congiungono ciascun lato di una base con il vertice opposto dell'altra base, e ruotata rispetto alla prima di 45° . Dunque, a differenza dei prismi archimedei, le basi di un antiprisma sono connesse da triangoli equilateri invece che da n quadrati.

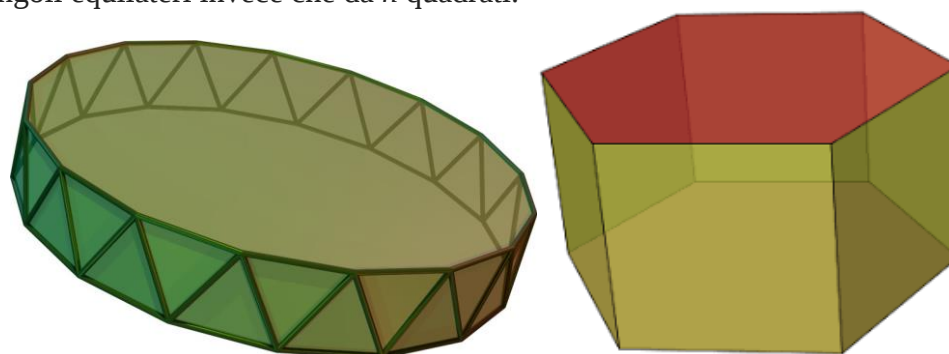


Figura 17. Un antiprisma archimedeo e un prisma archimedeo

Un poliedro convesso, le cui facce siano tutte costituite da poligoni regolari, ma che non sia né un solido platonico, né un solido archimedeo, né un prisma, né un antiprisma, si chiama solido di Johnson.

Il più semplice esempio di solido di Johnson è la piramide a base quadrata e avente per facce laterali quattro triangoli equilateri.

Essi furono scoperti da Norman Johnson (Johnson, 1966) il quale ne elencò 92; in seguito fu dimostrato che i solidi di Johnson sono esattamente 92 (Zalgaller, 1967).

I solidi archimedei sono 13 e sono tutti inscrittibili in una sfera, che passa per tutti i vertici del poliedro; tuttavia essi non circoscrivibili ad una sfera (Cundy et Al., 1974).

Cinque di questi (tetraedro troncato, cubo troncato, ottaedro troncato, dodecaedro troncato, icosaedro troncato) possono essere ottenuti per *troncamento*, tagliando, cioè, gli angoli dei cinque solidi platonici in modo che gli spigoli del poliedro così ottenuto siano tutti uguali fra loro, ma non uguali alla metà degli spigoli del poliedro di partenza.

Tagliando gli spigoli di un cubo a metà degli spigoli stessi, si ottiene il cubottaedro; eseguendo la stessa operazione per l'icosaedro, si ha l'icosidodecaedro.

Gli altri sei poliedri archimedei sono: il cubottaedro troncato, l'icosidodecaedro troncato, il rombicododecaedro, il rombicubottaedro, il cubottaedro camuso e l'icosidodecaedro camuso.

Gli ultimi due sono poliedri chirali, ovvero non sono equivalenti alla propria immagine riflessa; ad esempio, due guanti (destro e sinistro) sono oggetti chirali. Notiamo che, se consideriamo anche le loro immagini riflesse, i poliedri archimedei diventano 15.

Alcuni orologi solari, presenti nel Museo Galileo a Firenze, hanno la forma di un tetraedro troncato. Esso ha 4 facce triangolari e 4 facce esagonali.

Altri orologi solari, esposti nello stesso Museo, hanno la forma di un ottaedro troncato; notiamo che questo solido archimedeo possiede 6 facce quadrate, 8 esagonali, 36 spigoli e 24 vertici.



Figura 18. Ottaedro troncato. Orologio solare del XVI secolo. Museo Galileo. Firenze

Nel 1887 Lord Kelvin si chiese come fosse possibile eseguire una tassellazione dello spazio con poliedri di uguale volume, aventi superficie minima. Lord Kelvin pensava che questi poliedri dovessero avere la forma di un ottaedro troncato. Tuttavia, non dette la dimostrazione di tale risultato, il quale per più di un secolo rimase una congettura, poiché non si riusciva a trovare né una dimostrazione, né un controesempio.



Figura 19. Tassellazione dello spazio con ottaedri troncati

Soltanto nel 1993 i fisici R. Phelan e D. Weaire del Trinity College di Dublino hanno trovato due poliedri irregolari di uguale volume, un dodecaedro irregolare con facce pentagonali, e un tetracaidecaedro formato da 2 esagoni e 12 pentagoni con i lati tutti diversi, che tassellano lo spazio. Notiamo che a questa struttura si sono ispirati i progettisti del Centro Acquatico di Pechino.



Figura 20. Centro Acquatico di Pechino

L'area della superficie della configurazione di Weaire-Phelan è inferiore a quella della struttura di Kelvin dello 0, 3%, ma non è stato ancora dimostrato che essa sia la soluzione della congettura di Kelvin.

Il pallone da calcio non è altro che un icosaedro troncato; esso è formato da 90 spigoli, 60 vertici, 12 facce pentagonali e 20 facce esagonali. La storia del pallone di calcio è davvero molto interessante. Questo design fu portato alla ribalta dalla ditta Adidas per il Campionato Europeo di calcio del 1968 e per la Coppa del Mondo di calcio del 1970 in Messico. Esso fu chiamato Telstar, dal nome del satellite che assicurava i collegamenti televisivi intercontinentali. Furono scelti i pentagoni neri e gli esagoni bianchi per assicurare una migliore visione televisiva (in bianco e nero) rispetto al classico pallone a strisce di cuoio marrone.



Figura 21. La genesi geometrica del pallone da calcio

Inoltre, l'icosaedro troncato rappresenta il miglior equilibrio fra numero di facce ed approssimazione della sfera; infatti, un poliedro con un numero inferiore di facce approssima peggio la sfera, mentre, con numero maggiore, l'approssimazione è migliore ma diventa più complicata la sua realizzazione a causa dei troppi pezzi da assemblare (osserviamo che l'icosaedro approssima la sfera al 60%, mentre quello troncato l'approssima all'87% e, gonfiato, al 96%).

La storia del “pallone di calcio” non è ancora finita. Nel 1985 i chimici H. W. Kroto, R. F. Curl e R. E. Smalley ottennero un composto le cui molecole erano formate da 60 atomi di carbonio, legati in modo da formare la molecola C_{60} . In questa molecola gli atomi di carbonio sono disposti nei 60 vertici dell'icosaedro troncato, quindi essa ha proprio la forma del pallone da calcio. Per questa scoperta i tre scienziati ricevettero nel 1996 il premio Nobel per la Chimica.

Tale molecola, che è utilizzata in campo medico, nell'industria litografica e nella meccanica come lubrificante, è stata chiamata fullerene o buckyball, in onore dell'architetto statunitense Buckminster Fuller, che aveva costruito vari edifici con cupole geodetiche, le quali erano poliedri, spesso con facce pentagonali ed esagonali.



Figura 22. B. Fuller, cupola geodetica. Esposizione Montreal 1967

Una delle più famose fu la cupola per il padiglione degli Stati Uniti all'Expo '67 di Montreal. Questa cupola è formata da esagoni; ogni tanto viene inserito qualche pentagono per incurvare e chiudere la struttura (Barone et Al, 2017). Le sue facce sono suddivise in triangoli; infatti, per un teorema dovuto a Cauchy, se un poliedro convesso è costituito da facce non deformabili, allora il poliedro non è deformabile.

Vorremmo notare che anche Leonardo da Vinci disegnò un icosaedro troncato, nel già citato libro *De divina proporzione*, con il nome di Ycokedron Abscisus vacuus.



Figura 23. L'icosaedro troncato disegnato da Leonardo

Nelle Isole Faroe esistono delle costruzioni (Kivivik igloo) che hanno la forma di un icosaedro troncato.



Figura 24. Igloo delle Isole Faroe

Esistono altre costruzioni a forma di poliedri archimedei, come il Poliedro abitabile a Bogotá, opera dell'architetto Manuel Villa, che ha la forma di un cubottaedro troncato (formato da 12 quadrati, 8 esagoni e 6 ottagoni regolari).



Figura 25. Poliedro abitabile. Bogotá. Cubottaedro troncato

Nel Museo Nazionale di Capodimonte a Napoli si trova un dipinto che ritrae Luca Pacioli. La paternità del dipinto è controversa; molti studiosi lo attribuiscono a Jacopo de' Barbari (1470-1516), ma non tutti sono d'accordo.

Dietro Pacioli è raffigurato un giovane identificato con il duca Guidubaldo da Montefeltro. Sul tavolo è riprodotto un dodecaedro, posto alla sinistra di Pacioli e appoggiato su un libro, mentre dietro la sua spalla destra il pittore ha dipinto un poliedro archimedeo che pende dal soffitto tramite un filo: si tratta di un rombicubottaedro, formato da 8 triangoli equilateri e 18 quadrati.



Figura 26. Dipinto che raffigura Luca Pacioli

Notiamo che il rombicubottaedro è stato disegnato da Leonardo nel già citato libro di Luca Pacioli: *De divina proportione*.

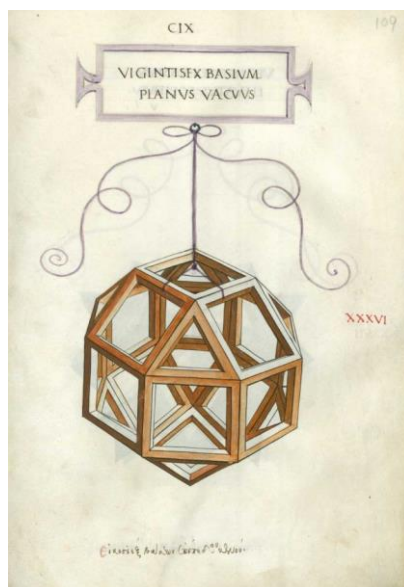


Figura 27. Rombicubottaedro disegnato da Leonardo

Anche l'edificio (inaugurato nel 2006) che ospita la Biblioteca Nazionale di Minsk ha la forma di un rombicubottaedro.



Figura 28. Biblioteca Nazionale. Minsk

4.1 Solidi di Catalan

Interessanti, sia dal punto di vista geometrico, sia nelle applicazioni, sono i solidi (detti anche poliedri) di Catalan, (descritti nel 1865 dal matematico belga Eugène Charles Catalan), che si ottengono congiungendo i centri delle facce (poliedri duali) dei poliedri archimedei. Tali poliedri sono 13.

Un notevole esempio di poliedro è l'elemento posto a coronamento della Lanterna della cupola della Sagrestia Nuova, opera di Michelangelo, della chiesa di San Lorenzo a Firenze.

Michelangelo scelse questa forma, al posto della classica forma sferica, poiché le sue sfaccettature lo fanno somigliare a un cristallo che scompone la luce in varie direzioni.

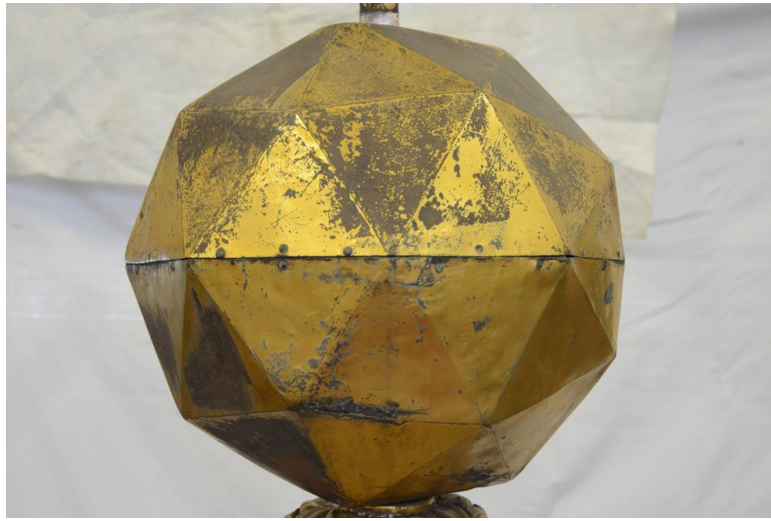


Figura 29. Poliedro della Lanterna della Sagrestia Nuova di San Lorenzo. Firenze

Esso si realizza a partire da un dodecaedro, dove, su ogni faccia (pentagonale), si costruisce una piramide avente quella faccia come base. Dunque, questo poliedro ha 60 facce triangolari; è curioso notare che il Vasari afferma che il poliedro realizzato da Michelangelo era “una palla a 72 facce”.

Tale solido ricorda moltissimo il pentacisdodecaedro, che è uno dei tredici poliedri di Catalan, ed è il duale dell'icosaedro troncato archimedeo.

Osserviamo che anche questo solido è raffigurato da Leonardo da Vinci nel *De divina proportione*, con il nome di Duodecedron elevatus solidus.

In realtà il poliedro di Leonardo ha per facce dei triangoli equilateri, mentre quelle del pentacisdodecaedro sono dei triangoli isosceli aventi la base che sta nel rapporto $(9 - \sqrt{5})/6$ con gli altri due lati obliqui. Osserviamo che il poliedro di Michelangelo (formato da triangoli isosceli) è molto più simile al pentacisdodecaedro di quello di Leonardo.

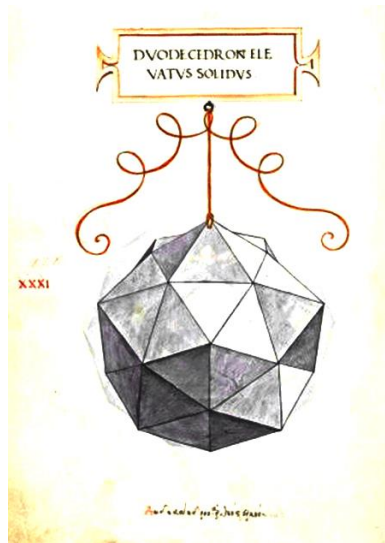


Figura 30. Il Duodecedron elevatus solidus di Leonardo

Il cristallo di Andradite (ed anche quello di Granato) è un solido di Catalan, chiamato dodecaedro rombico, poiché possiede 12 facce a forma di rombo ed è il duale di un solido archimedeo: il cubottaedro. Osserviamo che anche il dodecaedro rombico può tassellare lo spazio.



Figura 31. Cristallo di granato a forma di dodecaedro rombico

A Seattle si trovano le tre Amazon Spheres che fanno parte della nuova sede della Amazon. Esse si basano sulla forma di un esacontaedro pentagonale, un poliedro di Catalan, le cui facce sono dei pentagoni irregolari.

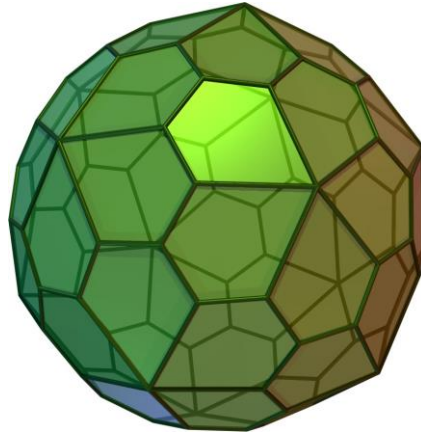


Figura 32. L'esacontaedro pentagonale

Tale poliedro è il duale di un poliedro archimedeo: il cubottaedro camuso. In onore del matematico belga, lo studio Nbbj, che le ha progettate, le ha ribattezzato: Catalany.



Figura 33. Le Amazon Spheres

5. Conclusioni

Abbiamo passato in rassegna i poliedri regolari, quelli semiregolari (o di Archimede) e quelli di Catalan; inoltre, con degli esempi, abbiamo evidenziato la loro presenza nella natura, nell'arte ed in alcuni aspetti della vita quotidiana.

Esistono molti altri tipi di poliedri.

I più diffusi sono i prismi; hanno la forma di un prisma, ad esempio, le antiche torri difensive, che possono avere per base un poligono di 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16 lati.

Un'altra classe interessante di poliedri sono i Poliedri di Goldberg (scoperti da Michael Goldberg nel 1937). Si tratta di poliedri convessi, le cui facce sono pentagoni o esagoni, tali che in ogni vertice concorrono esattamente tre facce.

Notiamo che gli esagoni che compongono i poliedri di Goldberg sono equilateri; tuttavia, non è detto che siano poligoni regolari. Invece, i pentagoni di questi poliedri sono sempre regolari. Dunque tali poliedri hanno tutti gli spigoli uguali.

Dalla formula di Eulero segue che tutti i poliedri di Goldberg possiedono esattamente 12 pentagoni; il numero degli esagoni, invece, è variabile.

La dimostrazione di questo fatto è davvero interessante. Indichiamo con F_5 e F_6 il numero delle facce pentagonali ed esagonali rispettivamente. Poiché ogni spigolo è comune a due facce e ogni vertice è comune a tre facce, si ha, indicando con S e V il numero degli spigoli e dei vertici rispettivamente:

$$\frac{5F_5 + 6F_6}{2} = S \text{ e } \frac{5F_5 + 6F_6}{3} = V .$$

Sostituendo tali valori nella relazione di Eulero $S - V = F - 2$, ovvero $S - V = F_5 + F_6 - 2$, si ottiene:

$$\frac{5F_5 + 6F_6}{2} - \frac{5F_5 + 6F_6}{3} = F_5 + F_6 - 2 , \text{ da cui, con facili calcoli, si ha:}$$

$$5F_5 + 6F_6 = 6F_5 + 6F_6 - 12 \quad \text{ovvero} \quad F_5 = 12 .$$

Semplici esempi di questi poliedri sono il dodecaedro e l'icosaedro troncato.

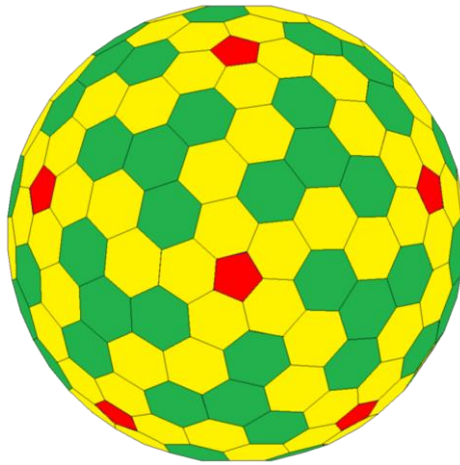


Figura 34. Un poliedro di Goldberg

I poliedri di Goldberg possono avere molte applicazioni per il semplice fatto che forniscono ottime approssimazioni di una sfera.

Esempi di questi poliedri si possono trovare nell'Eden Project, un complesso turistico in Cornovaglia, a circa 2 km dalla città di St Austell, ricavato nello spazio interno di una ex-cava. Esso è composto da cupole geodetiche le cui facce sono esagoni e pentagoni.

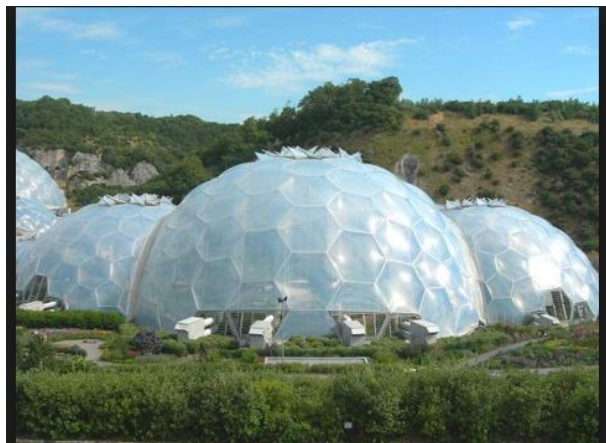


Figura 35. Poliedri di Goldberg dell'Eden Project. Cornovaglia

Un altro esempio si ha nell'impianto all'aperto per testare i motori a reazione progettati dalla Rolls- Royce.

Nella figura seguente sono evidenziate le facce pentagonali.

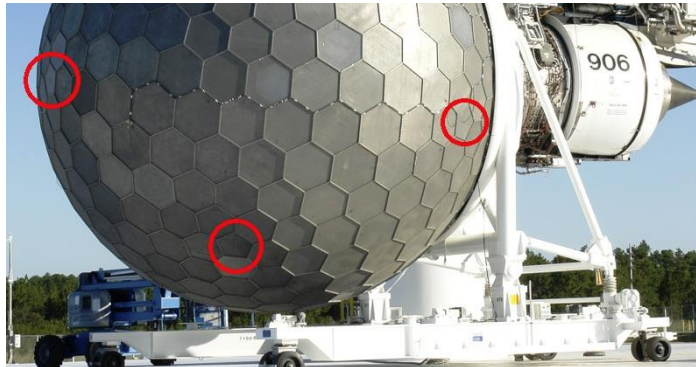


Figura 36. Impianto prova motori della Rolls-Royce

Bibliografia

V. Barone, P. Bianucci, (2017), *L'infinita curiosità: Breve viaggio nella fisica contemporanea*, Edizioni Dedalo, Bari.

L. Brusotti (1955), *Poligoni e poliedri*. Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi, Volume II – Parte 1^a, Editore Ulrico Hoepli, Milano, pp. 255-322.

F. Folicaldi a cura di (2005), *Il Numero e le sue Forme*, Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze, Nardini Editore, Firenze.

A. Frajese (1951), *La matematica nel mondo antico*, Editrice Studium, Roma.

V. Sgarbi (1982), *De divina proportione*, FMR n. 9, Franco Maria Ricci, Milano.

G. Conti, B. Sedili, A. Trotta (2017), *Matematica, musica e architettura*, Science & Philosophy, Vol. 5 (1), pp. 129-148.

H. M. Cundy. A. P. Rollett (1974), *I modelli matematici*, Giangiacomo Feltrinelli Editore, Milano.

W. D'Arcy Thompson (2003), *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri, Torino.

N. Johnson (1966): *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian Journal of Mathematics, **18**, pp. 169–200.

M. Livio (2003), *La sezione aurea*, Rizzoli Editore, Milano.

M. Du Sautoy (2007), *Il disordine perfetto*, Saggi BUR, Rizzoli Editore, Milano.

G. Vasari (1991), *Le vite dei più eccellenti pittori, scultori e architetti*, Newton Compton Editori, Roma.

V. A. Zalgaller (1967), *Convex Polyhedra with Regular Faces*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **2**, Nauka, Moscow–Leningrad, pp. 5–221. Versione inglese: Seminars in Mathematics, V. A. Steklov Mathematical Institute, Leningrad, 1969, 2.

**Is the golden section a key for
understanding beauty?
Part I
(La sezione aurea è una chiave per la
comprensione del bello?)
Parte I**

Franco Eugeni*, Luca Nicotra[°]

Received: 03-03-2018. **Accepted:** 01-05-2018. **Published:** 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.402

®Eugeni and Nicotra



Abstract

Our goal is to prove that the golden section, however important, is not the only key to understand a mathematical-formalizing approach to the idea of beauty. Having developed, from this point of view, reading keys linked to the post-modern, it is necessary to link together the multiple rivulets of knowledge that gather in this direction. Moreover, the canons of the approaches presented up to now are very indicative for the understanding of many aspects of beauty, which however depends on the historical moment and the cultures created in

* Teramo University. Full Professor of Logics and Science Philosophy, Teramo, Italy; eugenif3@gmail.com.

[°] Cultural Association “Arte e Scienza”, President. Mechanical Engineer and Editor in chief of *ArteScienza* magazine, Rome, Italy; luca.nicotra1949@gmail.com.

the various civilizations. Therefore, we can affirm that there is no effective definition of "beauty" that can be codified through fixed canons, but that the concept is expressed by a series of stratifications and interpretations that tend to link several major variations, expressing the various answers given by man to the question: what is the beauty?

Keywords: Golden Section, Golden Number, Beauty, Golden Rectangle, Fractals

Sunto

Nostro obiettivo è provare che la sezione aurea, per quanto di importanza notevole, non è l'unica chiave per comprendere un approccio matematico-formalizzante dell'idea di bellezza. Essendosi sviluppate, da questo punto di vista, chiavi di lettura legate al post-moderno, occorre legare tra loro i molteplici rivoli di saperi che si addensano in questa direzione. Inoltre, i canoni degli approcci fino ad oggi presentati sono molto indicativi per la comprensione di molti aspetti della bellezza, che però dipende dal momento storico e dalle culture createsi nelle varie civiltà. Pertanto possiamo affermare che non esiste una effettiva definizione del "bello" che possa essere codificata attraverso canoni fissi, ma che il concetto si esprime con una serie di stratificazioni e interpretazioni che tendono a collegare fra loro numerose varianti principali, esprimenti a loro volta le varie risposte date dall'uomo alla domanda: cosa è il bello?

Parole chiave: Sezione Aurea, Numero Aureo, Bellezza, Rettangolo Aureo, Frattali

1 Introduzione

La percezione del bello, da parte della sensibilità estetica soggettiva, è stata giustificata e analizzata con tre precisi approcci a confronto, che qui riassumiamo.¹

L'approccio neuro-psicologico attribuisce il carattere del bello a particolari forme percepite, in quanto queste esprimono corrispondenza con

¹ Franco Eugeni, Ezio Sciarra, Raffaele Mascella, *Mathematical structures and sense of beauty*, in Capeocchi, V.; Buscema, M.; Contucci, P.; D'Amore, B. (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts*, Springer Verlag, XV, 2010, pp. 519-536; Franco Eugeni, Ezio Sciarra, Raffaele Mascella, *Il senso del bello* in TABULARIA A.MMX (S.S.Quator Coronatorum), "academia" editrice d'Italia e San Marino, 2010.

funzioni gratificanti, soprattutto della riproduzione e della espansione selettiva, relative alla conservazione e perfezionamento della specie.

L'approccio socio-culturale attribuisce il carattere del bello a forme percepite come gratificanti in funzione delle convenzioni, delle mode, delle credenze connesse all'equilibrio dei modelli culturali della comunicazione sociale e relativi al tempo storico.

L'approccio matematico-formalizzante, che nasce dal centralizzare il concetto della sezione aurea nell'analisi del bello, ritiene che la sensibilità estetica umana e la percezione soggettiva del bello trovino fondamento in strutture di forme e di rapporti numerici oggettivi presenti in natura.

Nostro obiettivo è provare che la sezione aurea, per quanto di importanza notevole, non è l'unica chiave per comprendere quello che abbiamo chiamato "approccio matematico-formalizzante" e che, essendosi sviluppate da questo punto di vista chiavi di lettura legate al post-moderno, occorre legare tra loro i molteplici rivoli di saperi che si addensano in questa direzione.

Del resto giova osservare che, indipendentemente dalle tre classificazioni sopra richiamate, noi siamo indotti a pensare che, nei tentativi vaghi di definire il bello, sarebbe da fare nostra quell'idea interessante che il sommo filosofo Immanuel Kant (1724-1804) esprime nella sua *Critica del Giudizio*:

Il gusto è la facoltà di giudizio su d'un oggetto o su d'una specie di rappresentazione, che solo il genio dell'artista ha la capacità di introdurre, produce una soddisfazione od insoddisfazione, che al di là di tutto, dev'essere scevra d'ogni interesse economico o di parte. L'oggetto d'una tale soddisfazione si dice bello!²

Sulla comprensione del bello, specie per l'approccio neuro-psicologico e biologico, sembra essere significativo, e da considerare in parallelo, quanto asserisce Herbert Spencer (1820-1903) a proposito dell'evoluzionismo, ponendosi in una posizione ampia che lo porta oltre la visione positivista³ dei suoi predecessori: l'empirismo sia del francese August Comte⁴ (1798-1857)

² Immanuel Kant, *Critica del Giudizio*, a cura di A. Bosi, Torino, UTET, 1993, pp. 180-87.

³ Il positivismo nel nostro contesto va inteso in quella che fu la promozione della filosofia della rivoluzione industriale e della scienza. In particolare, nella Francia napoleonica era nata l'Ecole polytechnique, caratterizzata da un orientamento spiccatamente tecnico-scientifico, in antitesi con la Sorbona, che aveva il suo asse portante nell'insegnamento della teologia e delle discipline umanistiche.

⁴ August Comte è considerato il padre del positivismo e anche il fondatore della fisica sociale. Il suo positivismo rispecchia pienamente il mondo sociale francese del suo tempo. Enuncia la legge dei tre stadi, (teologico, metafisico, positivo), che a suo avviso è la legge evolutiva dell'umanità. Nel teologico prevale l'immaginazione e l'uomo aspira alla conoscenza assoluta e individua le cause dei fenomeni in entità soprannaturali antropomorficamente concepite; nel metafisico prevale l'atteggiamento critico-distruttivo, e le entità soprannaturali vengono sostituite da entità astratte (essenze, forze occulte o vitali, principi astratti); infine, nello

sia dell'inglese John Stuart Mill (1806-1873), differenziandoli tutti dallo stesso Charles Darwin (1809-1882).⁵ Al contrario di loro Spencer amplia il modello di Darwin, parlando esplicitamente di «evoluzionismo cosmico», nella convinzione che le leggi che regolano la biologia e la natura siano pressoché le stesse della fisica, della politica, della cultura, della società, e perché no - aggiungiamo noi - dell'arte e quindi anche di aspetti matematico-formalizzanti che possano interagire nelle forme di comprensione del bello. Sicché basterebbe, in linea teorica, individuare le leggi dell'evoluzionismo per poter studiare l'intera realtà umana.⁶ Appare chiaro che, seguendo Spencer, si potrebbe indagare sulla realtà e magari desumerne delle leggi di comportamento, ma a suo avviso mai in una forma completa ed esaustiva, in quanto l'essenza della realtà indagata sarebbe un *quid* che resta inconoscibile, nel senso che sfugge a ogni inquadramento conoscitivo. Ciò secondo Spencer⁷ si verificherebbe anche per ogni possibile generalizzazione di una qualunque teoria, quindi anche per teorie riguardanti l'arte e il bello, per cui coloro che possiamo chiamare i «costruttori delle teorie» non potranno mai penetrare ciò che Spencer chiama l'Inconoscibile, che Kant chiamava la «cosa in sé», e che altri chiamano l'«incognito esoterico».⁸ È interessante, in questa introduzione, citare anche Henri Bergson⁹ (1859-1941), che a nostro avviso precorre il dibattito sull'idea del Disegno Intelligente¹⁰ di Pierre Teilhard de Chardin

scientifico l'uomo rinuncia al sapere assoluto – cioè alla ricerca delle essenze e delle cause ultime – e si limita a cercare, attraverso l'osservazione e il ragionamento, le leggi effettive dei fenomeni.

⁵ Charles Darwin, come ben noto, concepisce l'evoluzionismo nell'ambito puramente biologico e organico.

⁶ Ovviamente questa idea è ben lontana da quanto asseriva Comte.

⁷ Secondo Herbert Spencer questa impotenza della scienza la rende compatibile con la religione e sulla sua indagine sull'Inconoscibile e le due discipline si supportano a vicenda, proiettando le loro indagini su questioni diverse ma ugualmente necessarie. Naturalmente, questo può avvenire solamente se la scienza e la religione non hanno la pretesa di sconfinare nel campo altrui: e a tal proposito la vicenda di Galileo simboleggia appunto lo sconfinare della religione nel campo scientifico.

⁸ Franco Eugeni, *L'esoterismo nella cultura scientifica*, «ArteScienza», Anno III, N. 5, pp. 9-54. Tale concetto esprime ciò che la scienza e la filosofia non riusciranno mai a spiegare come il tempo che si misura ma non si sa cosa sia, lo spazio che si osserva ma non sappiamo come definire, il bello che si intuisce e si afferrà emotivamente ma che non si è capaci di definire.

⁹ Bergson è qui citato per la sua opera: *L'Évolution créatrice* (1907), tr. Umberto Segre, Milano, Athena, 1925 e Corbaccio-Dall'Oglio, Milano 1965 (due delle tante edizioni).

¹⁰ Ricordiamo che allo stato attuale due sono gli atti di fede possibili: credere al disegno intelligente oppure credere alla natura quale principio attivo. L'attuale visione si è sostituita all'antico dibattito tra i creazionisti, che sostenevano ingenuamente che l'uomo era stato creato così come è oggi, e gli evoluzionisti che dal loro canto pensavano all'ameba, come il comune antenato, dibattito che si è ampliato in una miriade di direzioni sostenute dai pitagorici, dai neoplatonici, dai positivisti e da tanti altri, ciascuno arbitro delle proprie convinzioni. Per questa via naturalmente si possono operare delle varianti della visione del mondo, siano esse darwiniane o spenseriane o altro.

(1881-1955), in quanto asserisce che l'universo tutto ha un preciso fine, sia che esso sia dettato da una volontà divina, sia che esso nasca dalla natura stessa, pensata come principio attivo. L'uomo deve trasformare se stesso, evolversi, per scorgere una vetta morale ed eventualmente religiosa. Senza una tale creazione individuale la vita e l'universo sarebbero già finiti o finirebbero in futuro. Lo slancio vitale (*élan vital*) sarebbe la forza che muove la vita, come adattamento dinamico all'ambiente, ne segue che l'evoluzione è creatrice, perché va oltre sia il meccanicismo sia un cattivo finalismo.

Si tratta di metodi paradigmatici di come si costruisce una intera visione del mondo, che non solo orienta i futuri sviluppi della scienza, della filosofia e dell'arte ma anche le conoscenze e le operazioni comuni, a livello sia di strati colti che di massa. Tale visione comporta un suo esoterismo, in quanto lascia aperte le condizioni di conoscibilità di aree incognite, che qualificano quelle che Spencer chiamava i «misteri della scienza e della filosofia» e - noi aggiungiamo - dell'arte.

Pertanto possiamo affermare che non esiste una effettiva definizione del "bello", che possa essere codificata attraverso canoni fissi. Riconosciamo che i canoni degli approcci presentati siano molto indicativi per la comprensione di molti aspetti del capire il bello, comprendiamo che viene evidenziato in modo molto corretto come il concetto di bello dipenda dal momento storico, dalle sociologie createsi nelle varie civiltà, ma si evince anche che il concetto si esprime con una serie di stratificazioni e interpretazioni che tendono a collegare fra loro numerose varianti principali, esprimenti a loro volta le varie risposte date dall'uomo.

Quindi tutti i canoni precedenti dovrebbero essere messi da parte, perché non ci sarebbe più un criterio condivisibile a cui appellarsi. Bisogna possedere quel senso speciale che taluno chiama "gusto" o "sensibilità artistica", in altre parole quello che dovrebbe essere un vero insondabile, non classificabile e quindi un indefinibile "senso del bello". Il possesso di questo senso speciale implicherebbe l'esistenza di un elemento soggettivo dominante e implicherebbe che, soprattutto, l'opera d'arte venga introiettata da chi giudica.

Quanto abbiamo asserito sembra essere condiviso da Kant:

Per decidere se una cosa sia bella o no, noi non poniamo, mediante l'intelletto, la rappresentazione in rapporto con l'oggetto, in vista della conoscenza; la rapportiamo invece, tramite l'immaginazione (forse connessa con l'intelletto), al soggetto e al suo sentimento di piacere e di dispiacere. Il giudizio di gusto non è pertanto un giudizio di conoscenza; non è quindi un atto logico ma estetico, intendendo con questo termine ciò il cui principio di determinazione non può essere che soggettivo (e quindi atto extralogico).¹¹

¹¹ Immanuel Kant, *Op.cit.* p. 179.

Tuttavia va aggiunto - ed è nostra convinzione - che tale extra logico “senso del bello” sarebbe solo parzialmente guidato da un ipotetico arbitrio individuale posseduto e immutabile, perché il gusto, il senso del bello, la comprensione dell’arte nelle sue varie forme possono essere educati, e anzi tutta l’arte moderna e l’estetica stessa, in quanto discipline, nascono proprio dalla necessità di educare il gusto.

Nel presente lavoro è nostro desiderio ripartire dallo studio della sezione aurea nella sua accezione originaria geometrica, antico e mai tramontato tentativo di formalizzazione matematica del bello, aggiungendo vari complementi, che vanno dall’enunciazione di una ipotetica legge universale della bellezza a varie osservazioni critiche sull’uso improprio del termine “sezione aurea”, che purtroppo si è diffuso in epoca moderna, fino allo studio dei marchi nella pubblicità. Altro aspetto che ci interessa è sfatare la convinzione che l’approccio matematico-formalizzante per la comprensione del bello passi esclusivamente attraverso la sezione aurea. Oggi vi sono anche altri interessanti aspetti da esaminare. Per questo parleremo della bellezza delle formule nella matematica e nella fisica, della bellezza delle immagini derivanti da formule e da concetti matematici molto astratti o addirittura patologici, come quelle derivanti dai frattali, condurremo una analisi derivante da situazioni irreali legate a errori prospettici studiati ad arte o di composizioni matematiche usate negli spettacoli e nella pubblicità.

2 La Divina proporzione: Euclide e la Grecia

La sezione aurea era nota fin dall’antichità. È noto che gli egiziani la usarono nel papiro di Rhind come rapporto sacro ed è pure riscontrabile nella piramide di Cheope, nella quale l’altezza, con una certa approssimazione, sta al lato della base nel rapporto definito dalla sezione aurea.

Si può dire che la sua storia inizia con quella della civiltà occidentale, ma si è sviluppata soprattutto nella Grecia antica.

È nel contesto della Scuola Pitagorica (VI-IV secolo a.C.) che l’idea di bellezza nasce dalla particolare proporzione definita dalla sezione aurea, concetto questo sul quale occorre approfondire i dati numerici, poiché per comprendere questi aspetti matematici occorre andare nei dettagli. Probabilmente era nota, anche se soltanto come fenomeno, allo stesso Platone (427-347 a.C.).¹²

¹² Platone, *Timaeus*, (Translated by Benjamin Jowett), The Internet Classics Archive. Retrieved 30 May 2006. Platone descrive i suoi cinque poliedri regolari (tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro) tutti legati alla sezione aurea.

Ciò che noi oggi chiamiamo “sezione aurea” è niente altro che la *divisione di un segmento di retta in due parti disuguali, tali che il rapporto fra l'intero segmento e la parte maggiore sia uguale a quello fra la parte maggiore e la minore*.¹³ Come vedremo più avanti, tale rapporto comune è espresso dal numero irrazionale $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Essa doveva molto probabilmente essere già nota ai pitagorici attraverso lo studio del pentagono regolare e del pentagono stellato formato dalle diagonali del pentagono regolare (figura 1). Infatti, *le diagonali del pentagono regolare si intersecano fra loro in punti che dividono ciascuna diagonale secondo la sezione aurea e il lato del pentagono regolare risulta essere la parte maggiore della sezione aurea della diagonale*.

L'angolo al centro che insiste su ciascun lato del pentagono regolare, essendo la quinta parte di 360° , misura 72° (figura 1) e quindi tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su lati del pentagono misurano 36° . Consideriamo, per esempio, la diagonale AC divisa nei punti D' , E' dalle due

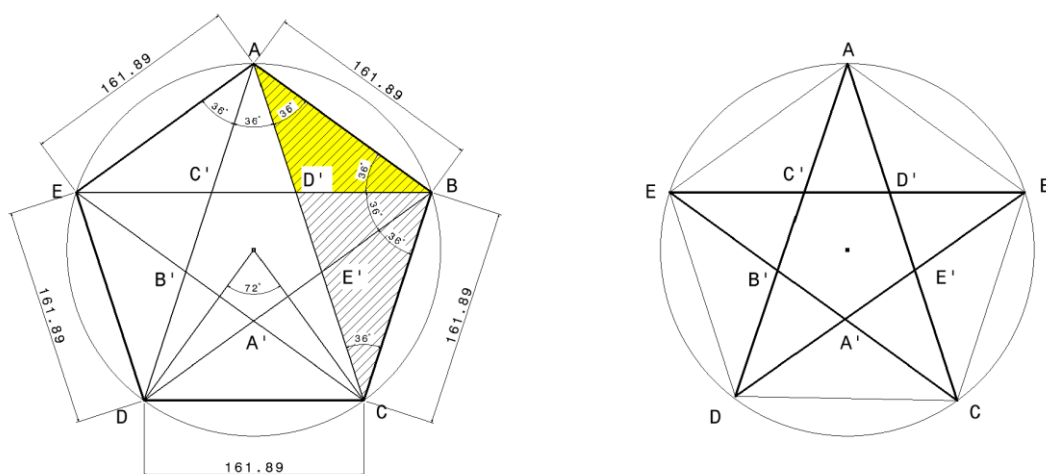


Figura 1 – Il pentagono regolare e il pentagono stellato da esso derivato.

diagonali uscenti da B . I triangoli ABC e ABD' sono simili, avendo in comune sia il lato AB sia l'angolo $\hat{CAB} = 36^\circ$, ed essendo $\hat{BCA} = \hat{ABD'} = 36^\circ$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono su un lato del pentagono. Allora possiamo scrivere:

$$(1) \quad CA : AB = AB : D'A$$

¹³Nel seguito dell'articolo l'espressione “sezione aurea” avrà unicamente questo significato.

Inoltre, il triangolo BCD' è isoscele sulla base BD' poiché è $D'\hat{B}C = 72^\circ$, insistendo su due lati consecutivi del pentagono, e $CD'B = 72^\circ$ essendo $B\hat{C}A = 36^\circ$. Pertanto, essendo $BC = CD'$ e quindi $AB = BC = CD'$, possiamo così riscrivere la precedente proporzione:

$$(2) \quad CA : CD' = CD' : D'A$$

Infine, i triangoli ABD' e BCE' sono isosceli, sulle basi AB e BC , e congruenti, poiché hanno congruenti le basi e gli angoli alla base, uguali a 36° in quanto angoli alla circonferenza che insistono su un lato del pentagono. Risulta allora $D'A = CE'$ e $CD' = E'A$ essendo CD' e $E'A$ somme del segmento $E'D'$ con i segmenti uguali $D'A$, CE' . Per sostituzione dalla (2) si ottiene quindi:

$$(3) \quad CA : E'A = E'A : CE'$$

Considerazioni analoghe alle precedenti possono essere ripetute per ciascuna delle altre diagonali del pentagono regolare. Pertanto possiamo concludere che la (1) dimostra essere il lato del pentagono regolare la parte maggiore della sezione aurea della diagonale, mentre le (2), (3) dimostrano che le diagonali di un pentagono regolare si tagliano reciprocamente secondo la sezione aurea. Le (2), (3) corrispondono alla proprietà 8 del Libro XIII degli *Elementi* di Euclide, come vedremo più avanti in queste stesse pagine:

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλευροῦ καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν ἐὺθιεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλῃς, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστί τῷ πενταγώνου πλευρῷ.¹⁴

(Se in un pentagono equilatero e equiangolo rette sottendono due angoli consecutivi, allora si secano tra loro nel rapporto estremo e medio, e i loro segmenti maggiori sono uguali al lato del pentagono).¹⁵

¹⁴ Testo greco tratto da: *Euclid's Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, editio et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick.*

¹⁵ Trad. it. di Fabio Acerbi.

Queste stesse proprietà possono essere riferite al pentagono stellato, derivato dal pentagono regolare intrecciando fra loro tutte le diagonali di questo: la stella a cinque punte così ottenuta (figura 1) è formata da segmenti che a coppie sono fra loro nel rapporto definito dalla sezione aurea, poiché sono gli stessi segmenti definiti dalle intersezioni delle diagonali del pentagono regolare di cui si è poc'anzi trattato.

Se si fa un nodo normale¹⁶ in una striscia di carta e poi lo si spiana accuratamente, si vedrà apparire il pentagono regolare (figura 2) e se la carta usata è una carta velina, esaminandolo in controluce appare anche la stella fiammeggiante.¹⁷

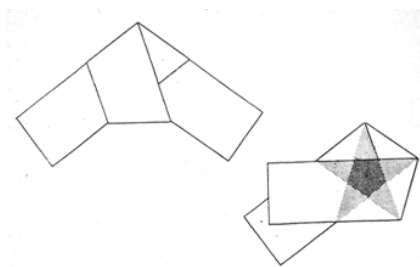
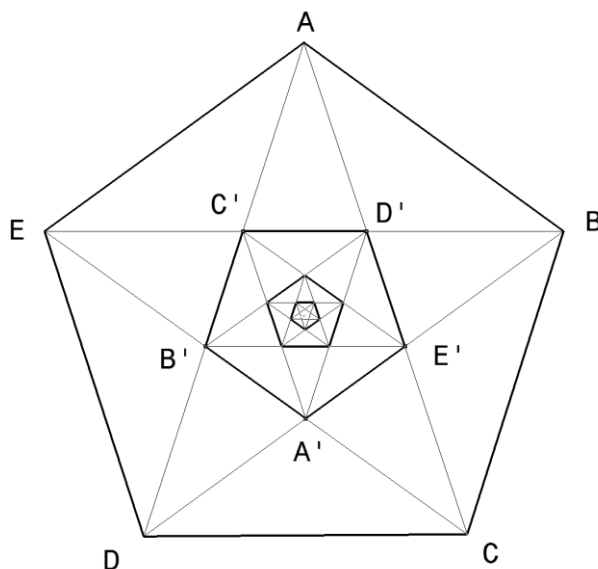


Figura 2 - Il nodo pitagorico e il pentagono stellato.



Tale idea del nodo è stata oggetto di interessanti interpretazioni esoteriche¹⁸ da parte del matematico pisano Arturo Reghini.

Da notare che il pentagono stellato definisce il pentagono regolare più piccolo $A'B'C'D'E'$ che è omotetico e simmetrico rispetto al pentagono $ABCDE$. Il pentagono stellato definito dal pentagono regolare $A'B'C'D'E'$ definisce a sua volta un altro pentagono regolare più piccolo che è omotetico e simmetrico rispetto al pentagono $A'B'C'D'E'$. Questo processo può essere iterato all'infinito (figura 2) ed è strettamente collegato alla natura irrazionale del rapporto aureo.

¹⁶ Luigia Berardi e Albrecht Beutelspacher, *Il pentagono regolare e la sezione aurea*, «Periodico di Matematiche». Serie VI, Vol. 66, N. 1 (1990), Roma.

¹⁷ Franco Eugeni, *Da una semplice striscia di carta: il nodo pitagorico*, Roma, «Officinae» 2 (1992) 17-22. Edimai.

¹⁸ Arturo Reghini, *La tradizione Pitagorica* (cfr. Parte II: *Per la restituzione della geometria pitagorica*), Fr. Melita editori, Genova, 1988. (Per il nodo pitagorico si veda p.78.)

Questo modo di dividere un segmento dovette diventare tanto comune presso i matematici greci, da essere chiamato “sezione” senza alcun'altra specificazione.¹⁹

Ma è soltanto negli *Elementi* di Euclide che di esso si ha la prima testimonianza scritta.

Nel libro VI, infatti, è riportata la seguente definizione:²⁰

Α κ ρ ο ν κ α ῖ μ ε σ ο ν λ ό γ ο ν ε ὕ θ ε ῖ α
τ ε τ μ ῆ σ θ α ι λ ε γ ε τ α ι , ὅ τ α ν ῆ ὥ ς ἡ ὅ λ η π ρ ὸ ς
τ ὸ μ ε ῖ ζ ο ν τ μ ῆ μ α , ο ὅ τ ω ς τ ὸ μ ε ῖ ζ ο ν π ρ ὸ ς τ ὸ
ἔ λ α τ τ ὸ ν .²¹

(Una retta [retta sta per segmento n.d.t.] è detta secata in rapporto estremo e medio quando la retta totale sta al segmento maggiore, come il maggiore al minore).²²

In realtà lo stesso contenuto di questa proposizione è espresso da Euclide già nella proposizione 11 del Libro II, anziché come uguaglianza fra rapporti di segmenti come uguaglianza fra aree:

Τ ῆ ν δ ο θ ε ῖ σ α ν ε ὕ θ ε ῖ α ν τ ε μ ε ῖ ν ὥ σ τ ε τ ὸ
ὕ π ὸ τ ῆ ς ὅ λ η ς κ α ῖ τ ο ὓ ἐ τ ἔ ρ ο υ τ ὃ ν τ μ ῆ μ ᾶ τ ω ν
π ε ρ ι ε χ ὅ μ ε ν ο ν ὁ ρ θ ο γ ῶ ν ι ο ν ῖ σ ο ν ε ῖ ν α ι
τ ὃ ᾰ π ὸ τ ο ὓ λ ο ι π ο ὓ τ μ ῆ μ α τ ο ς τ ε τ ρ α γ ῶ ν ῶ .²³

(Secare la retta data in modo che il rettangolo compreso da quella totale e da uno dei segmenti sia uguale al quadrato sul restante segmento).²⁴

¹⁹ Carl B. Boyer. *Storia della Matematica*, Milano, Mondadori, 1990, p. 60.

²⁰ Nell'edizione critica degli *Elementi* di Euclide di J. L. Heiberg: *Euclid's Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885)* ... è la seconda definizione mentre è la terza nelle precedenti edizioni. Nell'edizione di Heiberg manca infatti quella che è la seconda nelle altre edizioni.

²¹ Testo greco tratto da: *Euclid's Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885)*...

²² Questa traduzione moderna è dovuta a Fabio Acerbi. Nella celebre traduzione in italiano di Niccolò Tartaglia degli *Elementi* (1565): «Esempi gratia, quando che la proportionione di tutta le linea ,a,b, alla sua maggiore parte ,a,c, fusse si come della detta parte ,a,c, all'altra parte ,c,b, tal linea se diria esser diuisa secondo la proportionione hauente il mezzo & duoi estremi in ponto .c.» In: *Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrita ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano. Secondo le due tradottioni. Con vna ampla esposizione dello istesso tradottore di nuouo aggiunta*, Venezia, Curtio Troiano, 1565, Libro VI, Diffinitione 3.

²³ *Euclid's Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885)*...op. cit.

²⁴ Trad. it. di Fabio Acerbi.

Si tratta in entrambi i casi di due modi diversi, ma equivalenti, di esprimere quel particolare modo di dividere un segmento di retta in due parti disuguali tali che "l'intero segmento sta alla parte maggiore come questa sta alla minore", ovvero secondo una proporzione continua nella quale la parte maggiore risulta media proporzionale fra l'intero segmento e la parte minore. Federico Commandino, nella sua celebre traduzione degli *Elementi* euclidei del 1575, nello *scholio* alla proposizione 11 del Libro II riconosce in questa proposizione la "divisione in media ed estrema ragione"²⁵ di un segmento, ma argutamente osserva che Euclide non la chiama così per il semplice motivo che a questo punto degli *Elementi* non ha ancora trattato la teoria delle proporzioni di Eudosso, che si trova nel Libro V (figura 3).

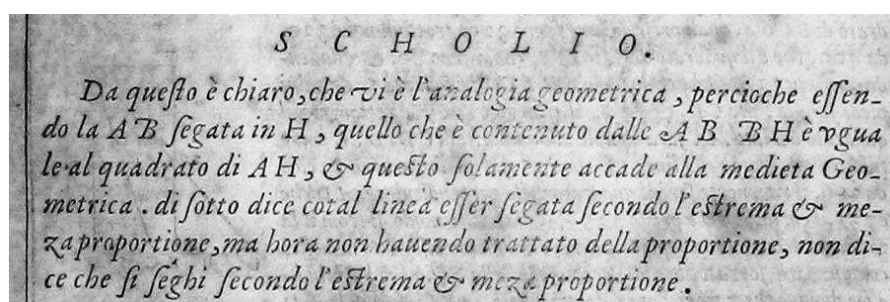


Figura 3 – Federico Commandino, *Elementi* di Euclide (1575): *scholio* alla proposizione 11 del Libro II

Per questo motivo, infatti, Euclide stesso definirà soltanto nel VI libro questo modo di dividere un segmento «in rapporto estremo e medio».

È degno di nota il fatto che nello stesso Libro VI, dopo aver dato tale definizione, Euclide sente il bisogno di riprendere lo stesso concetto come uguaglianza di aree, fornendo nella proposizione 30 una costruzione geometrica del tutto simile a quella già data nel Libro II - Prop. 11.

Euclide ritorna a trattare della sezione aurea nel libro XIII, dedicato alle proprietà dei poliedri regolari, applicando più volte la divisione di un segmento in media ed estrema ragione, traendone alcune proprietà:

Prop. 1: Se una retta è secata nel rapporto estremo e medio, allora il quadrato sul segmento maggiore aggiunto a metà del totale è cinque volte il quadrato sulla metà.

Prop. 2: Se il quadrato su una retta è cinque volte il quadrato su un segmento su di essa, allora, quando il doppio del detto segmento è secato

²⁵ Nel testo del Commandino: «estrema e meza proportione»

nel rapporto estremo e medio, il segmento maggiore è la parte restante della retta in origine.

Prop. 3: Se una retta è secata nel rapporto estremo e medio, allora il quadrato sulla somma del segmento minore e della metà del segmento maggiore è cinque volte il quadrato sulla metà del segmento maggiore

Prop. 4: Se un segmento è secato nel rapporto estremo e medio, allora la somma dei quadrati sul totale e sul segmento minore è tripla del quadrato sul segmento maggiore.

Prop. 5: Se una retta è secata nel rapporto estremo e medio, ed è sommata ad essa una retta uguale al segmento maggiore, allora la retta totale risulta secata nel rapporto estremo e medio, e la retta in origine è il segmento maggiore.

Prop. 6: Se una retta razionale è secata nel rapporto estremo e medio, allora ognuno dei segmenti è la retta irrazionale detta apotome.

Prop. 8: Se in un pentagono equilatero e equiangolo rette sottendono due angoli consecutivi, allora si secano tra loro nel rapporto estremo e medio, e i loro segmenti maggiori sono uguali al lato del pentagono

Prop. 9: Se il lato dell'esagono e quello del decagono inscritti nello stesso cerchio sono sommati, allora la retta totale risulta secata nel rapporto estremo e medio, e il suo segmento maggiore è il lato dell'esagono.²⁶

Ancora nel Libro XIII, Euclide applica alla geometria la teoria delle proporzioni di Eudosso e rileva la presenza della sezione aurea («rapporto estremo e medio») nel pentagono regolare:

Prop. 11: Se un pentagono equilatero è inscritto in un cerchio che ha il diametro razionale, allora il lato del pentagono è la retta irrazionale chiamata minore.²⁷

e nei due solidi platonici (figura 4) più complessi: il dodecaedro e l'icosaedro. Nel dodecaedro, che ha 12 facce pentagonali:

Prop. 17: Costruire e circondare con una sfera un dodecaedro, come nelle predette figure e dimostrare che il quadrato sul lato del dodecaedro è la retta irrazionale chiamata apotome.

Corollario: Se il lato del cubo è secato nel rapporto estremo e medio, il segmento maggiore è il lato del dodecaedro.²⁸

Nell'icosaedro, che ha 20 facce costituite da triangoli equilateri, che è il duale del dodecaedro:

²⁶ Trad. it. di Fabio Acerbi.

²⁷ Trad. it. di Fabio Acerbi.

²⁸ Trad. it. di Fabio Acerbi.

Prop. 16: Costruire e circondare con una sfera, come per le precedenti figure, e dimostrare che il quadrato sul lato dell'icosaedro è la retta irrazionale chiamata minore.

Corollario: Il quadrato sul diametro della sfera è cinque volte il quadrato sul raggio del cerchio su cui risulta descritto l'icosaedro, e il diametro della sfera è composto dal lato dell'esagono e da due dei lati del decagono inscritto nello stesso cerchio.²⁹

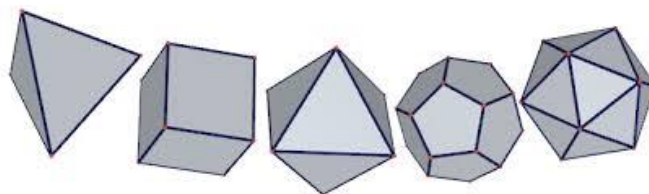


Figura 4 – I solidi platonici: tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

3 La Sezione aurea attraverso la storia

È ben noto che la proporzione secondo cui un segmento è diviso in media ed estrema ragione è stata applicata in svariati casi nell'arte figurativa, sia nella pittura sia nell'architettura, e si riscontra anche in molti casi in natura stessa, nel mondo animale, vegetale e inorganico. Per questi riscontri della sezione aurea nell'arte e nella natura si rimanda all'ampia letteratura già esistente.³⁰ Essa è stata sempre associata a una sensazione di armonia e bellezza circondata da un alone di mistero, dovuto all'incommensurabilità dei segmenti interessati e quindi alla natura irrazionale dei loro rapporti.

Fu proprio questo aspetto esoterico, assieme alla bellezza della proporzione, che in pieno Rinascimento indusse il matematico italiano Luca Pacioli (1445-1514) a chiamarla “divina” nell'opera del 1509 dal titolo *De Divina Proportione*, in cui osservò che era stata utilizzata, ad esempio, anche

²⁹ Trad. it. di Fabio Acerbi.

³⁰ Un'approfondita e originale interpretazione della sezione aurea come formalizzazione matematica dell'idea di bello nelle arti, nella musica e nella natura si trova, assieme a una vasta rassegna di casi documentati da fotografie, in Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Pavia, Cedam, 1970. Cfr. anche Luca Nicotra, *L'ideale estetico nell'opera dello scienziato*, in *Nello specchio dell'altro. Riflessi della bellezza tra arte e scienza*, (a cura di L. Nicotra e R. Salina Borello), Roma, Universitalia, 2011, pp. 45-67; Luca Nicotra, *La legge della bellezza di Carmelo Ottaviano*, in «Notizie in...controluce», nn. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (2011); M. C. Ghyka, *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts*, Parigi, Gallimard, 1927; H. E. Huntley, *The divine proportion. A study in mathematical beauty*, New York, Doubleday & Co. Inc., 1974; Fernando Corbalan, *La sezione aurea*, RBA Italia S.r.l., 2011, capp. 4, 5.

nella costruzione del decagono regolare e che è presente nelle forme più armoniche della natura. La chiamò “divina” avendo osservato che il rapporto che la definisce è un numero irrazionale³¹ e quindi in conoscibile (perché non esprimibile compiutamente con un numero razionale), così come in conoscibile è Dio con la ragione umana ed essendo tre i suoi elementi come nella santissima trinità:

Commo Idio propriamente non se po diffinire ne per parolle a noi intendere, così questa nostra proportion non se po mai per numero intendibile assegnare, né per quantità alcuna rationale esprimere, ma sempre fia occulta e secreta e da li mathematici chiamata irrazionale.³²

Secondo lo storico della matematica Carl B. Boyer,³³ fu nel secolo XVI, e non già nell’antichità, che comparve per essa, successivamente al “divina”, l’appellativo di “sezione aurea”. Luca Pacioli nel suo libro già citato illustrò i solidi platonici con disegni del suo amico Leonardo da Vinci, il quale fu probabilmente il primo a usare la denominazione *sectio aurea*, cioè “sezione aurea”.

Pacioli presentò 13 delle interessanti proprietà di tale rapporto, concludendo che «per amor della salvezza, la lista deve terminare a questo punto», perché 13 era il numero dei presenti alla tavola dell’Ultima Cena. Inoltre egli ridusse le otto operazioni dell’aritmetica a sette, in segno di rispetto per i sette doni dello Spirito Santo.

Nel 1600 Johannes Kepler (1571-1630), che fondava la sua teoria dei cieli sui cinque solidi platonici, si entusiasmava per la proporzione divina,³⁴ come appare chiaramente nella sua famosa frase:

La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l’altro è la sezione aurea di un segmento. Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d’oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello.

³¹ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

³² Luca Pacioli, *De divina proportione*, Venezia, Paganino Paganini, 1509.

³³ Carl B. Boyer. *Op. cit.*, p. 60.

³⁴ Kepler inoltre provò che la sezione aurea è il limite a cui tende il rapporto di due successivi numeri di Fibonacci.

Questa sua espressione viene comunemente riportata per testimoniare il riferimento all'oro del rapporto che definisce la sezione aurea, ma l'“oro” in questa frase sembra riferito al teorema di Pitagora e non alla sezione aurea! L'unica cosa certa, invece, è che la prima testimonianza scritta della denominazione “sezione aurea”, fino ad oggi disponibile, risale soltanto al 1835, nel libro *Die Reine Elementar-Mathematik* del matematico tedesco Martin Ohm, dove si trova scritto: «È chiamata sezione aurea», dando a intendere che l'espressione era già affermata a quel tempo e quindi precedente, senza però specificare di quanto.



Figura 5 – Il rettangolo aureo sul fronte del Partenone di Atene.

Non vi sono dubbi sul fatto che la sezione aurea fu consapevolmente utilizzata dagli artisti del Rinascimento, ai quali era nota come “proporzione divina”. Gli artisti di questo periodo, infatti, la utilizzarono per dividere la superficie di un dipinto in parti ben proporzionate, così come gli architetti la usavano normalmente per stabilire le proporzioni di un edificio. Nella prima edizione italiana del *De architectura* di Vitruvio³⁵ viene utilizzata la sezione aurea per analizzare la facciata del Duomo di Milano.

Nello stabilire proporzioni ritenute armoniose, pittori e architetti hanno spesso utilizzato il “rettangolo aureo”, ovvero un rettangolo nel quale il rapporto dei lati consecutivi è quello della sezione aurea. Tale rapporto risulta “incompiutamente” espresso da un particolare numero irrazionale³⁶ denominato “aureo”, che è stato indicato, nel 1909, dal matematico, fisico e

³⁵ Marco Vitruvio Pollione, architetto e scrittore romano, vissuto nella seconda metà del I secolo a.C., considerato il più famoso teorico dell'architettura di tutti i tempi. Nel 1486 il suo trattato *De architectura* fu pubblicato a stampa per la prima volta da Sulpicio da Veroli e nel 1521 uscì la prima edizione tradotta in italiano dal pittore e architetto Cesare Cesariano.

³⁶ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ingegnere statunitense Mark Barr (1871-1950) con la lettera maiuscola Φ (Phi) dell'alfabeto greco, per ricordare, attraverso l'iniziale del suo nome, il geniale architetto Fidia (490-430 a.C.),³⁷ autore del Partenone ove si ritrova applicato in più parti della facciata il rettangolo aureo (figura 5). Essendo irrazionale, il "numero aureo" non esprime in maniera esatta il rapporto fra l'intero segmento e la parte maggiore della sezione aurea (uguale a quello fra il segmento maggiore e il minore), perché in forma decimale è costituito da infinite cifre decimali non periodiche, delle quali si può considerare soltanto una parte comunque estesa, ottenendo così una approssimazione che si può spingere quanto si vuole.

Usualmente si considera la sua approssimazione alla terza cifra decimale: 1,618... L'irrazionalità di Φ equivale a riconoscere che sono incommensurabili fra loro sia il segmento intero e la sua parte maggiore sia le due parti in cui il segmento è diviso. Accanto ad esso si considera pure il rapporto inverso che viene denotato con la lettera greca minuscola (ϕ) $\phi = 1/\Phi = 0,618...$

L'architetto Le Corbusier in tempi recenti ha usato la sezione aurea nel progettare il suo *Modulor*,³⁸ (figura 6) con cui si può scomporre la figura umana in più sezioni auree, per risalire, da qui, all'abitazione ideale dell'uomo.

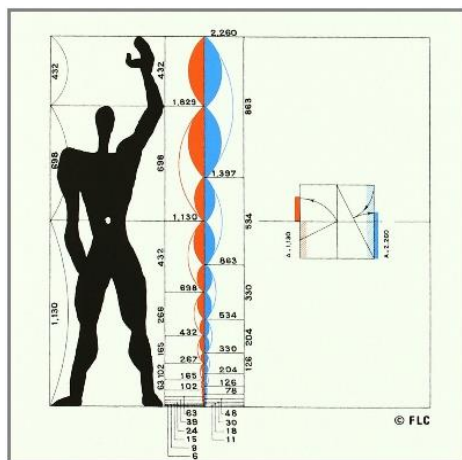


Figura 6 - Il *Modulor* di Le Corbusier.

³⁷ Fidia fu il sovrintendente ai lavori per il nuovo tempio, il *Partenone*, dedicato ad Atena. Collaborò con gli architetti incaricati e seguì i lavori per la decorazione scultorea del tempio fino al 438 a.C. circa, quando si data la sua partenza per Olimpia, e la consacrazione della colossale statua detta *Atena Parthenos*, realizzata da Fidia per la cella del tempio.

³⁸ Al secolo l'architetto franco-svizzero Charles Jenneret-Gris (1887-1965), detto Le Corbusier. Il *Modulor* è una scala di proporzioni basate sulle misure dell'uomo inventata da Le Corbusier come linea guida di un'architettura a misura d'uomo. Cfr. Le Corbusier, *The Modulor*, p.25 (come appare in Richard Padovan, *Proportion: Science, Philosophy, Architecture*, ed. Taylor and Francis, 1999, p. 316.).



Figura 7 – Salvador Dalí, *Ultima cena* (1955) (tela 268 x 167 cm). National Gallery of Art, Washington.

Infine *Il Sacramento dell'Ultima Cena*, dipinto da Salvador Dalí nel 1955, ha dimensioni 268 x 167 cm (con ottima approssimazione quelle di un rettangolo aureo) ed è inserito entro un enorme dodecaedro che, avendo facce pentagonali, mostra un evidente richiamo alla sezione aurea (figura 7). Lo psicologo Gustav Fechner usò la sezione aurea per fondare l'estetica su basi sperimentali. Misurava incessantemente le dimensioni di quadri, cartoline, libri, tabaccherie, carta da lettere, finestre e mille altre cose nel tentativo di sviluppare un'estetica sperimentale "dal basso". La sua conclusione fu che il rettangolo preferito ha i lati proporzionati secondo la sezione aurea.

Il rettangolo aureo lo si ritrova anche in oggetti di uso quotidiano, come le tessere magnetiche (carta di credito, bancomat, ecc..) e gli schermi degli attuali televisori digitali, il cui formato 16:9 (= 1, 777...) è abbastanza prossimo al rettangolo aureo.

Una semplicissima costruzione geometrica di un rettangolo aureo è indicata in figura 8 a partire dal quadrato $ABCD$, il cui lato viene assunto come lato minore del rettangolo stesso. Con centro nel punto medio M di AB si traccia un arco di circonferenza di raggio pari a MC che interseca in E il prolungamento di AB : il segmento AE è il lato maggiore del rettangolo aureo. Infatti, assumendo come unità di misura il lato del quadrato $ABCD$ e applicando il teorema di Pitagora al triangolo MBC si ha:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

e quindi:

$$ME = MC = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad AE = AM + ME = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dunque il rettangolo $AEFD$ è aureo, essendo il rapporto fra i suoi lati consecutivi:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

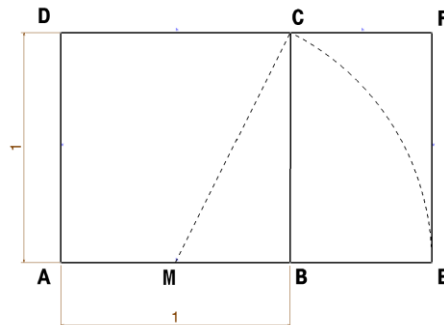


Figura 8 – Una costruzione geometrica del rettangolo aureo.

Il rettangolo aureo gode di varie proprietà, delle quali due sono notevoli.

- 1) Proprietà di autorigenerazione o autosomiglianza del rettangolo aureo: sommando (o sottraendo) a un rettangolo aureo il quadrato di lato congruente al suo lato maggiore (o minore) si ottiene un altro rettangolo aureo, quindi della stessa “forma”. In altri termini il quadrato di lato congruente al lato maggiore (o minore) di un rettangolo aureo è lo gnomone³⁹ di questo.

Facendo riferimento alla figura 8, sommando al rettangolo aureo $BEFC$ il quadrato $ABCD$ di lato congruente al lato maggiore di $BEFC$ si ottiene il rettangolo aureo $AEFD$; viceversa sottraendo dal rettangolo aureo $AEFD$ il quadrato $ABCD$ di lato congruente al lato minore di $AEFD$ si ottiene il rettangolo aureo $BEFC$.

³⁹ Poiché, secondo una definizione nota fin dagli antichi greci, lo gnomone di una figura è un'altra figura che aggiunta alla prima ne riproduce una simile, possiamo dire, considerando la somma in senso algebrico, che sia il quadrato di lato pari alla dimensione maggiore sia quello di lato pari alla dimensione minore del rettangolo aureo è lo “gnomone” di questo.

Dimostriamo la proprietà nel caso della somma. Per ipotesi il rettangolo $BEFC$ è aureo, dobbiamo dimostrare che è aureo anche il rettangolo $AEFD$.

Essendo aureo il rettangolo $BEFC$, è $EF/BE = \Phi$ e EF , BE si possono pensare come le parti maggiore e minore della sezione aurea, e quindi $EF + BE$ è l'intero segmento. Ma poiché $EF = AB$, l'intero segmento è $AB + BE = AE$. Per la definizione di sezione aurea si può scrivere allora:

$$AE : EF = EF : BE = \Phi$$

e concludere che il rettangolo $AEFD$ è aureo.

Dimostriamo ora la proprietà nel caso della differenza. Per ipotesi, questa volta è aureo il rettangolo $AEFD$ e dobbiamo dimostrare che è aureo anche il rettangolo $BEFC$.

Essendo il rettangolo $AEFD$ aureo, è $AE/EF = \Phi$ e AE , EF si possono pensare come l'intero segmento e la parte maggiore della sua sezione aurea, e quindi $AE - EF$ è la parte minore. Ma poiché $EF = AB$, la parte minore è $AE - AB = BE$. Per la definizione di sezione aurea si può scrivere allora come nel caso precedente:

$$AE : EF = EF : BE = \Phi$$

e concludere che il rettangolo $BEFC$ è aureo.

- 2) Verifica grafica di rettangoli aurei: si può verificare graficamente se un dato rettangolo è aureo disponendo come in figura 9 orizzontalmente il rettangolo dato $ABCD$ e verticalmente una sua "replica" $A'B'C'D'$ in modo che il lato maggiore del rettangolo dato sia adiacente al lato minore della sua replica. Condizione necessaria e sufficiente affinché il rettangolo dato sia aureo è che il prolungamento della sua diagonale AC passi per il vertice B' della sua copia posta in verticale.

Infatti, supponendo che il rettangolo dato sia aureo, anche la sua replica $A'B'C'D'$ lo è e dobbiamo dimostrare che la diagonale AC si prolunga in B' . Per la proprietà precedente, anche il rettangolo $C'CEB'$ è aureo, essendo la differenza fra il rettangolo aureo $A'B'C'D'$ e il quadrato $CD'A'E$ che ha per lato il lato minore di $A'B'C'D'$. Pertanto è $B'C' : C'C = AB : BC = \Phi$. I triangoli rettangoli ABC , $B'C'C$ sono quindi simili e, in particolare, sono congruenti gli angoli $\hat{BCA}$ e $\hat{C'CB'}$, ma poiché i lati BC e CC' sono allineati, per costruzione, devono essere allineati anche i lati AC e CB' .

Viceversa, supponendo che la diagonale AC si prolunghi in B', dobbiamo dimostrare che il rettangolo dato è aureo (e quindi anche la sua copia). I triangoli ABC, AA'B' sono simili, avendo in comune l'angolo in A e proporzionali i lati uscenti da A per il teorema di Talete applicato alle parallele D'C, A'B' tagliate dalle trasversali AA', AB'. Pertanto possiamo scrivere: $AA' : A'B' = AD' : D'C$. Poichè è $A'B' = AD'$ e $D'C = D'A'$ si può scrivere:

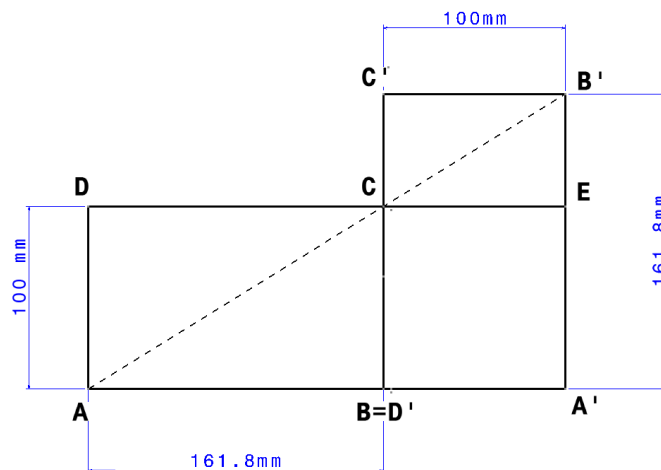


Figura 9 – Verifica grafica di rettangoli aurei.

$$(AD' + D'C) : AD' = AD' : D'C = \Phi$$

che è la proporzione che definisce la sezione aurea. Dunque il rettangolo ABCD è aureo.

4 La geometria della sezione aurea

Secondo l'uso corrente viene definita la sezione aurea di un segmento AB quella parte AX che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante XB.⁴⁰ Noi riteniamo errata sotto diversi punti di vista questa definizione, che non trova riscontro in nessuna parte degli *Elementi* di Euclide.

La differenza è sostanziale: nella già ricordata definizione di Euclide (*Elementi*, Libro VI – def. 3) la sezione aurea è la “divisione di un segmento in media ed estrema ragione”, che si distingue da tutte le infinite possibili divisioni di un segmento in parti disuguali.

Nella definizione oggi comunemente condivisa, invece, la sezione aurea di un segmento viene intesa come “la parte maggiore della sua divisione in

⁴⁰ H. E. Huntley, *The Divine Proportion*, New York, Dover Publications, 1970.

estrema e media ragione”, cioè è una particolare parte della divisione di un segmento in parti disuguali. Spiegheremo più avanti le ragioni per cui riteniamo errata tre volte tale definizione: dal punto di vista storico, dal punto di vista del significato del termine “sezione”, dal punto di vista del significato estetico che si attribuisce alla sezione aurea.

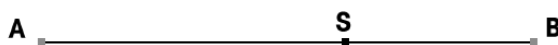
Qui mostreremo come sia possibile ricavare immediatamente molte delle proprietà della sezione aurea applicando semplicemente le ben note proprietà delle proporzioni, essendo la sezione aurea stessa definita da una particolare proporzione continua.⁴¹

In base alla definizione di Euclide, se indichiamo con S il punto che divide il segmento AB in "media ed estrema ragione", la “divina proporzione” o “sezione aurea” è espressa dalla seguente proporzione:

$$(4) \quad AB : AS = AS : SB = \phi$$

ovvero, in termini di aree:

$$(4)' \quad AS^2 = AB \times SB$$



La sezione aurea può essere espressa con altre tre proporzioni equivalenti, ottenute dalla (4):

Invertendo nella (4) antecedente con conseguente:

$$(5) \quad AS : AB = SB : AS$$

Permutando in quest'ultima i medi:

$$(6) \quad AS : SB = AB : AS$$

(che si ottiene anche dalla 4) applicando la proprietà simmetrica dell'uguaglianza)

Permutando nella (4) gli estremi:

⁴¹ Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Convegno “Matematica, Natura, Architettura”, 17 novembre 2017, Mathesis- Dipartimento di Architettura, Napoli.

$$(7) \quad SB : AS = AS : AB$$

(che si ottiene anche dalla 5) applicando la proprietà simmetrica dell'uguaglianza)

Dunque, la sezione aurea di un segmento può essere espressa da quattro proporzioni fra i tre segmenti che la caratterizzano, che sono equivalenti perché in esse risulta sempre valida la (4)', così come dalla proposizione 2.11 di Euclide:

... il rettangolo compreso da quella totale [AB] e da uno dei segmenti [SB] sia uguale al quadrato sul restante segmento [AS].

Le (6) e (7) sono definite dagli stessi rapporti (l'uno inverso dell'altro) rispettivamente delle (4) e (5). La sezione aurea pertanto può pensarsi definita indifferentemente dalle proporzioni (4) e (6), (5) e (7) secondo rapporti l'uno inverso dell'altro.

In realtà, dunque, la definizione di sezione aurea più esaustiva è quella che Euclide pone (correttamente) per prima nel Libro II in termini geometrici di equivalenza fra aree, ma non come definizione bensì come proposizione 11. Infatti da essa possono dedursi le quattro possibili ed equivalenti definizioni di sezione aurea come proporzioni continue, formate con un segmento e due sue parti disuguali.

Applicando successivamente il componendo e lo scomponendo alla (4) si ottengono inoltre altre proporzioni che corrispondono ad altre proprietà della sezione aurea.

1a proprietà
Componendo, si ha dalla (4):

$$(AB + AS) : AS = (AS + SB) : SB$$

e quindi:

$$(AB + AS) : AS = AB : SB$$

da cui essendo $SB = AB - AS$:

$$(8) \quad (AB + AS) : AS = AB : (AB - AS)$$

In una sezione aurea, la somma dell'intero segmento con la sua parte maggiore sta alla parte maggiore come l'intero segmento sta alla differenza fra l'intero segmento e la parte maggiore.

Oppure, essendo $AS = AB - SB$:

$$(9) \quad (AB + AS) : (AB - SB) = AB : SB$$

In una sezione aurea, la somma dell'intero segmento con la sua parte maggiore sta alla differenza fra l'intero segmento e la parte minore come l'intero segmento alla parte minore.

Della (8) è immediato dedurre una formulazione geometrica in termini di aree. Da essa infatti si ha:

$$(8)' \quad AB^2 - AS^2 = AB \times AS$$

In una sezione aurea, la differenza fra i quadrati costruiti sull'intero segmento e la sua parte maggiore è equivalente al rettangolo costruito sull'intero segmento e sulla sua parte maggiore, (rettangolo aureo).

Analogamente dalla (9) si ottiene:

$$(9)' \quad (AB + AS) \times SB = AB \times (AB - AS)$$

In una sezione aurea, il rettangolo costruito sulla somma dell'intero segmento con la parte maggiore e la parte minore è equivalente al rettangolo costruito sull'intero segmento e la differenza fra l'intero segmento e la sua parte maggiore.

2a proprietà

Componendo in altro modo, si ha dalla (4):

$$(AB + AS) : AB = (AS + SB) : AS$$

$$(10) \quad (AB + AS) : AB = AB : AS.$$

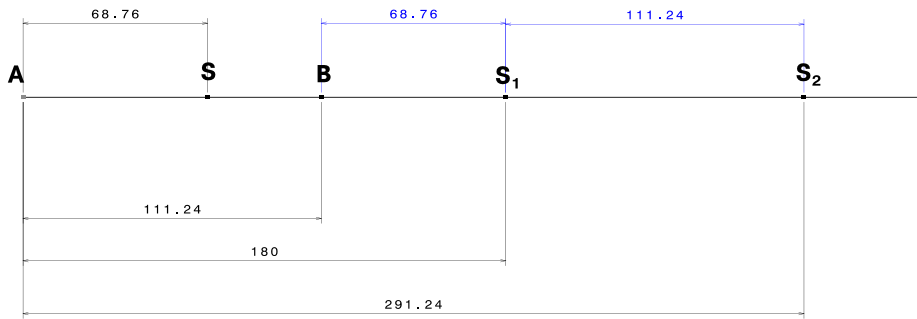
La (10) è di immediata interpretazione: *il rapporto aureo Φ sussiste anche fra la somma di un segmento con la parte maggiore della sua sezione aurea e il segmento stesso.* Si tratta cioè della già citata quinta proprietà del Libro XIII degli *Elementi* di Euclide: *Se una retta è secata nel rapporto estremo e medio, ed è sommata ad essa un retta uguale al segmento maggiore, allora la retta*

totale risulta secata nel rapporto estremo e medio, e la retta in origine è il segmento maggiore.

Cioè la somma di un segmento con la parte maggiore della sua sezione aurea dà luogo a una nuova sezione aurea che ha come parte maggiore il segmento stesso.

La (10) esprime dunque l'importante proprietà di auto-riproduzione della sezione aurea in accrescimento.

Infatti è possibile individuare sul prolungamento di AB il punto S_1 tale che sia $BS_1 = AS$. e quindi $AS_1 = AB + BS_1$.



Allora la (10) si può riscrivere nel seguente modo:

$$(AB + BS_1) : AB = AB : BS_1$$

$$(10)' \quad AS_1 : AB = AB : BS_1.$$

permettendoci di concludere che il punto B divide AS_1 in media ed estrema ragione.

Alla (10)' si può applicare di nuovo la proprietà espressa dalla (10) ottenendo:

$$(10)'' \quad (AS_1 + AB) : AS_1 = AS_1 : AB$$

Si può ripetere lo stesso ragionamento di prima: è possibile individuare sul prolungamento di AS_1 il punto S_2 tale che sia $S_1S_2 = AB$ e quindi $AS_2 = AS_1 + S_1S_2$ e riscrivere così la (10)'':

$$AS_2 : AS_1 = AS_1 : S_1S_2$$

permettendoci di concludere che il punto S_1 divide in media ed estrema ragione AS_2 .

Questo procedimento può ripetersi all'infinito.

3a proprietà

Scomponendo, si ha dalla (4):

$$(AB - AS) : AS = (AS - SB) : SB$$

$$SB : AS = (AS - SB) : SB$$

Da cui invertendo:

$$(11) \quad AS : SB = SB : (AS - SB)$$

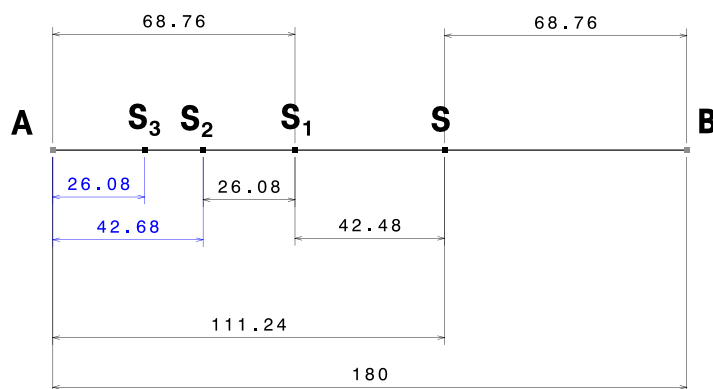
Il rapporto aureo Φ sussiste anche fra la parte minore e la differenza fra le due parti della sezione aurea di un segmento.

Cioè la differenza fra le due parti di una sezione aurea dà luogo alla sezione aurea della parte maggiore.

In termini più precisi: *è possibile riprodurre la sezione aurea sulla parte maggiore della sezione aurea di un segmento, assumendo come parte maggiore della nuova sezione aurea la parte minore della prima sezione aurea.*

La (11) esprime dunque l'importante proprietà di auto-riproduzione della sezione aurea in decremento.

Infatti è possibile individuare su AS il punto S_1 tale che sia $AS_1 = SB$ e quindi $AS - SB = AS - AS_1 = S_1S$.



Allora la (11) si può riscrivere nel seguente modo:

$$AS : AS_1 = AS_1 : S_1S$$

permettendoci di concludere che il punto S_1 divide in media ed estrema ragione la parte maggiore AS della sezione aurea del segmento AB .

Lo stesso ragionamento si può ripetere per la parte maggiore AS_1 della seconda sezione aurea, giungendo a individuare su AS_1 il punto S_2 che divide AS_1 in media ed estrema ragione creando una terza sezione aurea, sulla cui parte maggiore AS_2 si può ripetere lo stesso ragionamento individuando su AS_2 il punto S_3 che divide AS_2 in media ed estrema ragione creando una quarta sezione aurea, e così via.

Questo procedimento può ripetersi all'infinito: sarà sempre possibile dividere la parte maggiore di una sezione aurea secondo una nuova sezione aurea tramite la parte minore.

Anche nel caso della (11) è immediato dedurre una formulazione geometrica in termini di aree. Da essa infatti si ha:

$$(11)' \quad SB^2 = AS \times (AS - SB)$$

Ovvero: *in una sezione aurea, il quadrato costruito sulla parte minore è equivalente al rettangolo costruito sulla parte maggiore e sulla differenza fra le due parti.*

4a proprietà

Scomponendo in altro modo, si ha dalla (4):

$$(AB - AS) : AB = (AS - SB) : AS$$

$$SB : AB = (AS - SB) : AS$$

da cui, permutando gli estremi:

$$AS : AB = (AS - SB) : SB$$

e quindi invertendo:

$$(12) \quad AB : AS = SB : (AS - SB)$$

Essendo $AB = AS + SB$, si ha:

$$(AS + SB) : AS = SB : (AS - SB)$$

da cui:

$$AS^2 - SB^2 = AS \times SB$$

In una sezione aurea, la differenza fra i quadrati costruiti sulle sue due parti è equivalente al rettangolo costruito su di esse (rettangolo aureo).

5 Uso Improprio del termine “sezione”

Abbiamo già posto in evidenza quanto l’abitudine di chiamare “sezione aurea di un segmento” la parte maggiore della sua divisione in media ed estrema ragione non corrisponda alla definizione data da Euclide negli *Elementi*. Anche nel vocabolario *Treccani on-line* si legge:

...la sezione aurea di un segmento è la parte del segmento, detta anche media ragione, che è media proporzionale fra l’intero segmento e la parte rimanente.

Tale denominazione, oltre a non corrispondere all’idea di sezione aurea espressa da Euclide è impropria sia rispetto al significato di sezione sia rispetto all’attribuzione dell’aggettivo “aurea”, utilizzato per porre in evidenza il senso di bellezza che ne scaturisce.⁴²

È anzitutto errata rispetto allo stesso concetto di sezione, salvo completarla con una giusta specificazione di cui si dirà.

Sezione deriva dal latino *sectio*, *-onis* (taglio), a sua volta derivato da *sectus*, participio passato di *secare* (tagliare). La parola “sezione”, dunque, ha in sé un duplice significato: sia quello dell’operazione del “dividere” qualcosa in più parti (*secare*) sia quello del risultato dell’operazione stessa (*sectus*).

Il caso più semplice è quello in cui il “taglio” genera due parti. In tal caso si può articolare il concetto diversamente a seconda dell’attenzione che si presta agli elementi dell’operazione di “sezione” o meglio di “sezionamento” (volendo con tale termine sciogliere l’ambiguità fra operazione e risultato insita nel termine “sezione”). Si possono distinguere tre casi:

- (1) Si prende in considerazione il risultato “globale” dell’operazione: l’oggetto, inizialmente intero, e i due oggetti in cui risulta ora scomposto, la cui unione è l’oggetto intero e la cui intersezione è l’insieme vuoto (insiemi complementari).
- (2) Si prende in considerazione l’elemento comune all’oggetto sezionato e all’oggetto sezionante. È il caso della sezione di una figura piana o solida, considerata dalla Geometria Descrittiva come risultato dell’intersezione fra

⁴² Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, op. cit.

una linea (retta o curva) e una figura piana, o fra una superficie (in particolare un piano) e una figura solida.

- (3) Si prende in considerazione alternativamente l'una o l'altra delle due parti dell'oggetto sezionato. È il caso della sezione tecnica del Disegno Meccanico, definita come la vista perpendicolare al piano di sezione che risulta dalla eliminazione di una delle due parti in cui l'oggetto è diviso da quest'ultimo. Per ciò stesso un medesimo piano di sezione, a seconda che si tolga l'una o l'altra parte, dà luogo a due sezioni tecniche distinte, costituite ciascuna dalla figura intersezione fra il piano di sezione e l'oggetto (sezione della Geometria Descrittiva) completata dalla rimanente parte in vista, che in generale è diversa per le due sezioni.

In figura 10 è rappresentata una staffa con il piano di sezione. In figura 11

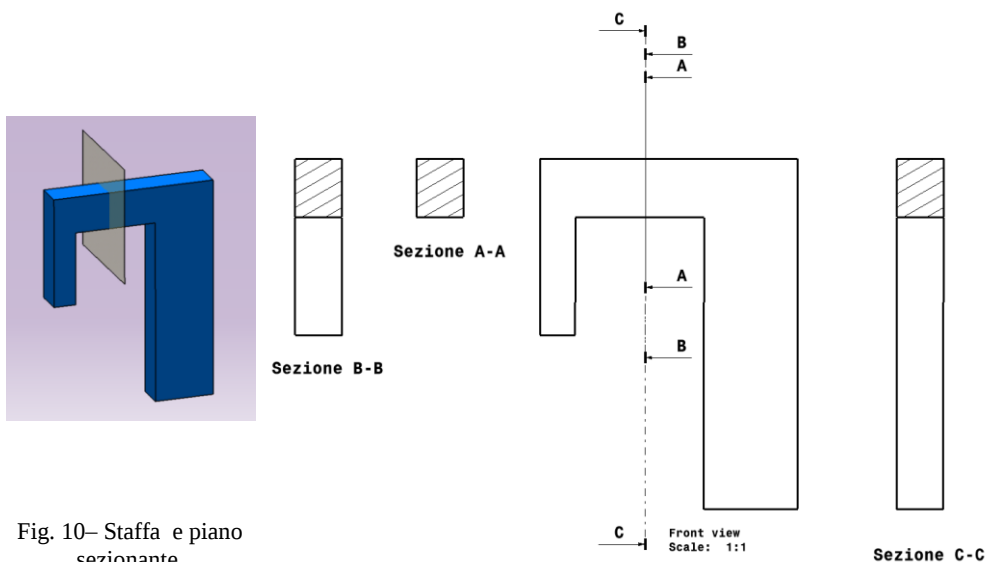


Fig. 10– Staffa e piano sezionante.

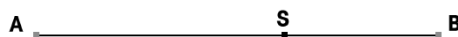
Fig. 11– Sezioni della staffa considerate dalla Geometria Descrittiva (Sezione A-A) e dal Disegno Meccanico (Sezioni tecniche B-B e C-C).

sono riportate la sezione A-A della staffa dal punto di vista della Geometria Descrittiva e le due sezioni tecniche B-B e C-C ottenute rimuovendo l'una o l'altra delle due parti in cui il piano taglia la staffa e invertendo il senso di proiezione.

In entrambe, secondo le regole del Disegno Meccanico, risulta tratteggiata la sezione della Geometria Descrittiva.

Applichiamo ora gli stessi concetti di sezione (espressi ai numeri 1, 2, 3) al segmento AB sezionato in media ed estrema ragione.

Nel caso 1 otterremo il segmento AB con la sua divisione nei segmenti AS , SB come già indicato sopra:



Nel caso 2 otterremo invece soltanto il punto S comune ai due segmenti AS , SB :



Nel caso 3 otterremo invece il segmento AS di media ragione (sezione tecnica vista da destra):



oppure il segmento SB di estrema ragione (sezione tecnica vista da sinistra):



È evidente che l'applicazione del concetto di sezione come al punto 2 non avrebbe alcun significato nel caso della “sezione aurea”. Invece l'applicazione del concetto di sezione come al punto 3 può avere senso ma con le dovute precisazioni. Infatti è inesatto dire *tout court* (come è invece uso diffuso) che il segmento AS è la sezione aurea di AB . Le denominazioni corrette (volendo applicare l'accezione 3 del termine sezione) sono invece: “sezione aurea maggiore di AB ” per il segmento AS e “sezione aurea minore di AB ” per il segmento SB . D'altra parte queste denominazioni (purtroppo oggi dimenticate se non ignorate) si trovano già nella citata traduzione degli *Elementi* di Euclide fatta da Niccolò Tartaglia nel 1565, a proposito della definizione di sezione aurea (Libro VI, terza definizione):

Una linea se dice esser diuisa seconda la proportion hauente il mezzo, & duoi estremi quando che egliè quella medesima proportion di tutta la linea alla sua maggiore sectione che è della maggior sectione alla minore.⁴³

⁴³ Dalla celebre traduzione di Niccolò Tartaglia degli *Elementi* di Euclide: *Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrità ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano. Secondo le due tradottioni. Con vna ampla espositione dello istesso tradottore di nuouo aggiunta*, Venezia, Curtio Troiano, 1565, Libro VI, Diffinitione 3.

Dal punto di vista del solo significato del termine sezione, sembrerebbero quindi plausibili entrambi i significati specificati ai punti 1 e 3, con le precisazioni terminologiche dette.

Ma alla sezione aurea di un segmento si attribuisce un significato estetico che travalica quello puramente tecnico di sezione, che è evidenziato proprio dall'aggettivo "aurea". Risulta ben evidente che dal punto di vista della qualifica "aurea", per indicare il senso di bellezza, non ha alcun significato considerare isolatamente l'uno o l'altro dei possibili "risultati" dell'operazione di sezione, perché né il segmento AS né il segmento SB può "da solo" suscitare alcuna sensazione di bellezza, così come una singola nota di un qualsiasi accordo musicale non può produrre nessuna particolare sensazione gradevole. L'attribuzione dell'aggettivo "aurea" ha senso soltanto se riferita all'insieme delle due parti (maggiore e minore) in cui il segmento è diviso secondo la "divina proporzione". Questo concetto, da tutti condivisibile, è stato chiaramente espresso dal grande pittore e incisore Albrecht Dürer, il quale fu anche un illustre geometra. Sull'esempio di Leon Battista Alberti e Leonardo da Vinci, cercò di fissare in pubblicazioni le sue conoscenze teoriche acquisite sulle proporzioni del corpo umano investigate nella sua intensa attività artistica.⁴⁴ In particolare nel 1525 pubblicò il primo libro di matematica scritto in tedesco, *Underweysung der Messung, mit den Zirckel vn[d] Richtscheyt, in Linien ebnen vnnd gantzen Corporen* (noto in Italia con il titolo semplificato di *Trattato sulla misurazione*), nel quale scrive che la bellezza consiste:

...nell'armonia delle parti fra loro e con il tutto [...] allo stesso modo in cui ogni parte in se stessa deve essere convenientemente tracciata, così la loro unione deve creare un'armonia di insieme [...] poiché gli elementi armoniosi vengono tenuti per belli.

Vediamo ora come la definizione, oggi utilizzata, di sezione aurea come parte maggiore della divisione in media ed estrema ragione, applicata all'arte, dia risultati palesemente inaccettabili.⁴⁵

Consideriamo, per esempio, il caso del celebre quadro di Sandro Botticelli *Nascita di Venere*, una delle opere d'arte più famose e amate del mondo, dipinta tra il 1482 e il 1485, diventata un simbolo della pittura del Rinascimento italiano.

Con il programma CATIA abbiamo importato in un modello CAD una fotografia del quadro scalandola in grandezza 1:1 (1,72 x 2,78 m), in modo da

⁴⁴ Albrecht Dürer, *Underweysung der messung, mit den zirckel un richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen*, 1525; *Unterricht zu Befestigung der Stett (in latino)*, 1535; *Vier Bücher von menschlicher Proportion (in latino)*, 1557; *Della simmetria dei corpi humani*, edizione italiana, Venezia, 1594.

⁴⁵ Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, op. cit.

avere una riproduzione virtuale del quadro a grandezza naturale, per poter prendere su di essa misure reali delle sue parti (figura 12).

La distanza verticale fra la sommità della testa e l'estremità dei piedi è risultata 1365,59 mm, mentre la distanza fra l'ombelico e la stessa estremità dei piedi è risultata 844 mm. Il loro rapporto è 1,61799, coincidente, a meno degli errori di misura, con il rapporto aureo 1,618. Dunque l'ombelico divide quella distanza in media ed estrema ragione, ovvero secondo la sezione aurea.

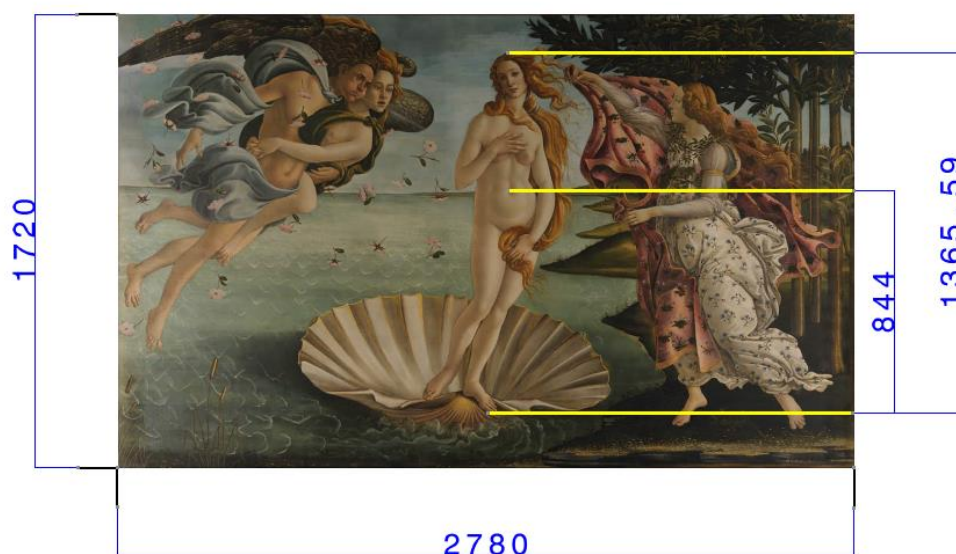


Fig. 12 – Sandro Botticelli, *Nascita di Venere* (1482-1485), Galleria degli Uffizi, Firenze.

Volendo applicare alla *Nascita di Venere* il significato tradizionale di sezione aurea si otterrebbe invece il risultato evidentemente inaccettabile mostrato in figura 13, essendo la distanza “ombelico-estremità dei piedi” la parte maggiore della divisione in media ed estrema ragione della distanza totale “sommità testa-punta dei piedi”.



Fig.13 – La sezione aurea nella *Nascita di Venere* secondo la definizione corrente.

Dunque, è l'operazione di sezionamento in media ed estrema ragione "considerata nella totalità dei suoi elementi" che può generare quel senso del bello che dall'antichità si attribuisce a tutto ciò che viene diviso secondo la "divina proporzione", per dirla con Luca Pacioli. Infatti in tutti i casi, nella pittura e nell'architettura, in cui si trova applicata la sezione aurea, il senso del bello deriva dalla percezione della proporzione che la definisce, che implica la presenza dei suoi tre elementi: l'intero segmento, la parte maggiore e la parte minore. La loro visione contemporanea dà l'idea di bello, così come il suono contemporaneo di due o più note, in un accordo musicale, può produrre una sensazione di bellezza.

In conclusione l'unico modo corretto di usare l'espressione "sezione aurea" di un segmento è quello indicato al punto 1, che considera l'operazione di sezione del segmento in media ed estrema ragione nella sua totalità: la "sezione aurea" di un segmento è semplicemente la sua divisione in media ed estrema ragione e non la sua parte maggiore (media ragione).

Bibliografia

Berardi L., Beutelspacher A., (1990), *Il pentagono regolare e la sezione aurea*, «Periodico di Matematiche». Serie VI, Vol. 66, N. 1, Roma.

Bergson H., (1925), *L'Évolution créatrice*, tr. Umberto Segre, Milano, Athena.

Boyer C. B. (1990), *Storia della Matematica*, Milano, Mondadori.

Commandino F. (1575) , *De gli Elementi d'Euclide libri quindici con gli Scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da m. Federico Commandino da Urbino & con Commentarij illustrati, et hora d'ordine dell'istesso trasportati nella nostra vulgare, & da lui riveduti. Con privilegio. In Urbino, appresso Domenico Frisolino MDLXXV. Con licentia de' Superiori.*

Corbalan F., (2011), *La sezione aurea*, RBA Italia S.r.l.

Dürer A., (1525), *Underweysung der messung, mit den zirckel un richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen.*

Dürer A., (1535), *Unterricht zu Befestigung der Stett (in latino)*, 1535.

Dürer A., (1557), *Vier Bücher von menschlicher Proportion (in latino)*.

Dürer A., (1594), *Della simmetria dei corpi humani*, edizione italiana, Venezia.

Eugeni F. (1992), *Da una semplice striscia di carta: il nodo pitagorico*, Roma, «Officinae» 2, 17-22. Edimai.

Eugeni F, Sciarra E., Mascella R., (2010¹), *Mathematical structures and sense of beauty*, in Capecchi, V.; Buscema, M.; Contucci, P.; D'Amore, B. (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts*, Springer Verlag, XV, 2010, pp. 519-536.

Eugeni F, Sciarra E., Mascella R., (2010²), *Il senso del bello* in TABULARIA A.MMX (S.S.Quator Coronatorum),"academia" editrice d'Italia e San Marino.

Eugeni F. (2016), *L'esoterismo nella cultura scientifica*, «ArteScienza», Anno III, N. 5, pp. 9-54

Ghyka M. C., (1927), *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts*, Parigi, Gallimard.

Heiberg J.L. (1885), *Euclid's Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick.*

Huntley H. E., (1970), *The Divine Proportion*, New York, Dover Publications.

Huntley H. E., (1974), *The divine proportion. A study in mathematical beauty*, New York, Doubleday & Co. Inc.

Kant I., (1993), *Critica del Giudizio*, a cura di A. Bosi, Torino, UTET.

Nicotra L., (2011), *L'ideale estetico nell'opera dello scienziato*, in Nicotra L., Salina Borello R. (a cura di), *Nello specchio dell'altro. Riflessi della bellezza tra arte e scienza*, Roma, UniversItalia,

Nicotra L., (2011), *La legge della bellezza di Carmelo Ottaviano*, in «Notizie in...controluce», nn. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Nicotra L., (2017), *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Convegno "Matematica, Natura, Architettura", 17 novembre 2017, Mathesis-Dipartimento di Architettura, Napoli.

Ottaviano C., (1970), *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Pavia, Cedam.

Pacioli L., (1509), *De divina proportione*, Venezia, Paganino Paganini.

Padovan R., (1999), *Proportion: Science, Philosophy, Architecture*, ed. Taylor and Francis.

Platone, (1970), Platone, *Dialoghi* (trad. Francesco Aciri), Torino, Einaudi.

Reghini A., (1988), *La tradizione Pitagorica* (cfr. Parte II: *Per la restituzione della geometria pitagorica*), Fr. Melita editori, Genova.

Tartaglia N., (1565), *Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematiche. Diligentemente rassettato, et alla integrita ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano. Secondo le due tradottioni. Con vna ampla esposizione dello istesso tradottore di nuouo aggiunta*, Venezia, Curtio Troiano.

From De Finetti to Today: Against the Domain of Mathematics for Deficients (Da De Finetti a Oggi: Contro il Dominio della Matematica per Deficienti)

Andrea Laforgia¹

Received: 03-05-2018. **Accepted:** 01-06-2018. **Published:** 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.418

©Laforgia



Abstract

We present original remarks on some possible applications of classical results of Calculus. Suggestions to the higher schools' teachers are also given.

1. Introduzione

In una Nota ormai classica [1], dall'eloquente titolo "Contro la 'Matematica per Deficienti' " De Finetti esprimeva forti critiche a un certo modo di insegnare e di imparare la Matematica in "forme 'adatte per deficienti', ossia per persone prive della capacità di vedere le cose in grande o impedita di, manifestarla, per limitarsi ad accumulare piccole insipide sterili sconnesse formali nozioncine didattiche".

¹ Dipartimento di Matematica e Fisica, Università di Roma 3, Largo San Leonardo Murialdo, 1; laforgia@mat.uniroma3.it.

Va da sé che tale “modo di insegnare” è del tutto inadatto alla formazione matematica dello studente e contribuisce a mantenere scadenti le capacità critiche dell’allievo.

Il pensiero di De Finetti ha ancora oggi parecchi aspetti di attualità. Di ciò mi sono occupato nel lavoro [3] dove ho suggerito al docente di Matematica (quello intelligente, premuroso e con elevato senso de dovere) alcuni spunti di riflessione utili a superare sacche di resistenza, purtroppo ancora esistenti, finalizzate alla conservazione del modo di insegnare e di imparare così ben descritto da De Finetti.

Nel presente lavoro sono sottoposti all’attenzione dei docenti alcuni scenari critici desunti da problemi specifici dell’Analisi matematica. Ritengo che sotto la sapiente e insostituibile guida del docente, ciascuno degli argomenti qui suggeriti possa essere collocato nelle pertinenti classi di scuola secondaria superiore.

2. Funzione Costante e Derivata Nulla

Alcuni anni fa, durante un convegno Mathesis, prendendo lo spunto da un quesito assegnato all’esame di Stato, ci si trovò a discutere la seguente “proprietà”: se una funzione ha derivata prima uguale a zero in ogni punto del suo dominio, allora essa è costante. Il “teorema” in questione è palesemente falso come immediatamente si verifica osservando la figura 2.1 dove è riportato il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

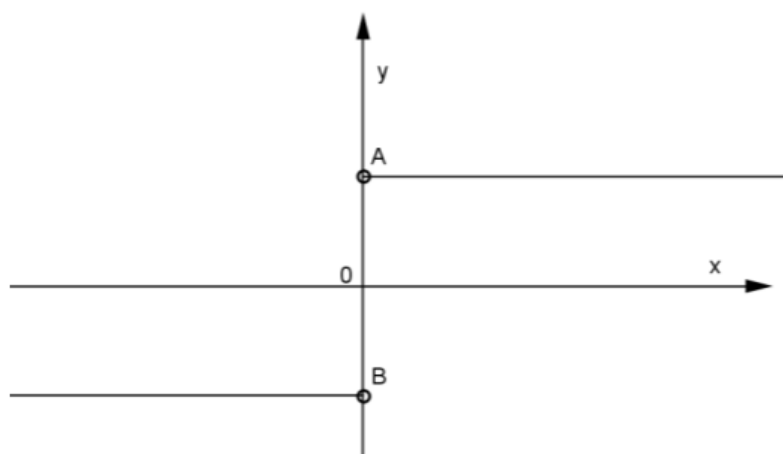


Figura 2.1

Questa funzione è definita in ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio, ma non è costante, perché non assume un solo valore, $f(x) = k$, bensì due valori: 1 e -1. Durante il convegno feci notare a un autorevole dirigente dell'associazione il mio punto di vista opposto al suo. Egli si ostinò a difendere tenacemente la propria opinione e continuò a sostenere la sua tesi, anche quando il mio collega Luigi Verolino, presente al convegno, fornì ulteriori spiegazioni e esempi a favore delle mie argomentazioni sulle quali peraltro tutti gli altri presenti concordavano. L'insistenza del docente mi fece ritenere che il suo punto di vista potesse derivare da una lettura superficiale di un testo di un matematico autorevole.

E così torniamo a De Finetti. In [2, pag. 370] De Finetti scrive: "... essa ha infatti derivata $g'(x) - f'(x) = 0$, sicché ci si riduce a dimostrare che una funzione che non sia costante non può avere una derivata sempre nulla..."

Vale a dire: soltanto le funzioni costanti hanno derivata nulla. Questa affermazione sembrerebbe dar ragione alla mia controparte: solo una funzione costante può avere derivata nulla. Lo dice De Finetti! Ma leggiamo la frase di De Finetti nella sua interezza:

"..., e ciò lo dice appunto il teorema di Lagrange perché, se è $f(b) \neq f(a)$ esiste entro (a, b) , un punto x_0 in cui

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0.$$

Insomma, De Finetti fa riferimento al Teorema di Lagrange di cui si era occupato in precedenza, valido, com'è noto, sotto le condizioni che f sia continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) . La corretta versione del "teorema" precedente è la seguente.

Se la funzione f è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) e se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è costante in (a, b) .

Ho avuto modo di verificare che questo tipo di errore è piuttosto frequente tra gli studenti e ne ho dedotto che i docenti dovrebbero porre molta attenzione a questi problemi. L'invito è perciò a esaminare con attenzione le ipotesi dei teoremi studiati e a verificare attraverso controesempi, come la conclusione (tesi) di un teorema sia erronea quando viene meno anche una sola delle ipotesi.

3. Il Teorema di Rolle

Il Teorema di Rolle è ben noto e non è il caso di starlo qui a richiamare. Altrettanto note sono alcune sue semplici applicazioni, alcune delle quali richieste in anni recenti (e precisamente due anni fa) nella risoluzione di quesiti posti all'esame di Stato.

Per esempio, il teorema torna utile (ma non è indispensabile) per provare che l'equazione

$$f(x) = e^x + x = 0$$

ammette una e soltanto una radice reale.

E' subito visto che $f(0) = 1 > 0$, $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ e quindi esiste una radice x_1 reale tra -1 e 0.

Per provare che essa è unica, basta supporre per assurdo che ne esista un'altra x_2 . Allora sull'intervallo $[x_1, x_2]$ potrebbe applicarsi il teorema di Rolle per il quale esisterebbe un punto x^* , tale che $f'(x^*) = 0$. Ma ciò è assurdo perché $f'(x) = e^x + 1$ è sempre maggiore di zero.

In questo paragrafo ci occupiamo di alcune insolite applicazioni del teorema di Rolle. Non sono stato in grado di trovare simili applicazioni in letteratura.

3.1 Sia f una funzione che soddisfa alle ipotesi del teorema di Rolle, continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e tale che $f(a) = f(b) = 0$. Provare che esiste almeno un punto $c \in (a, b)$, per il quale

$$f(c) + cf'(c) = 0, \quad c \in (a, b).$$

Soluzione. Posto $g = xf(x)$, è subito visto che la funzione g soddisfa tutte le condizioni del teorema di Rolle.

Dunque esiste un punto $c \in (a, b)$, tale che

$$g'(c) = f(c) + cf'(c) = 0, \quad c \in (a, b).$$

Un interessante caso particolare del precedente risultato si ha quando $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$. Allora esiste almeno un punto $c \in (0, \pi)$, tale che

$$\sin c + c \cos c = 0, \quad c \in (0, \pi).$$

Vale a dire: l'equazione $\tan x = -x$ ha almeno una soluzione sull'intervallo $(0, \pi)$.

Osservazione. Il risultato può estendersi facilmente a ogni intervallo $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ottenendo così la proprietà più generale, che l'equazione $\tan x = -x$ ha almeno una soluzione su ogni intervallo $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

3.2 La funzione f soddisfi tutte le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo (a, b) . Sia k una costante reale.

Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = kf(c)$.

Soluzione. Sia $g(x) = e^{-kx}f(x)$. Allora la funzione g soddisfa tutte le condizioni del teorema di Rolle. Dunque esiste un punto $c \in (a, b)$: $g'(c) = 0$, ovvero

$$g'(c) = -ke^{-kc}f(c) + e^{-kc}f'(c) = 0,$$

$$e^{-kc}[f'(c) + kf(c)] = 0,$$

$$f'(c) = -kf(c).$$

Se, come nell'esempio precedente, scegliamo $f(x) = \sin x$, otteniamo che su ogni intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$, $n = 0, 1, 2 \dots$ la funzione $\sin x$ assume tutti i valori reali e perciò è suriettiva! Una impensabile connessione tra il teorema di Rolle e le funzioni suriettive.

Invitiamo il docente interessato a considerare ulteriori casi in cui la funzione g assume forme differenti.

4. Le Funzioni. Comuni Credenze e ... ci Vuole Ordine

Invitiamo il docente a fornire una risposta ai quesiti che seguono e quindi a proporli in classe (prevalentemente nell'ultima classe di Liceo scientifico).

Stabilire se sono vere o false le seguenti affermazioni.

- a) Se una funzione f è continua e decrescente per ogni $x > 0$ e $f(x) > 0$, allora la funzione ha esattamente una radice.
- b) Se una funzione f ammette una inversa su (a, b) allora f è crescente o decrescente su (a, b) .
- c) Una funzione f è limitata su $\mathbb{R}$ se per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$.

Soluzioni

a) L'affermazione è falsa. Si consideri infatti la funzione $y = \frac{1}{x}$. Essa è continua e decrescente per tutti i valori positivi di x .

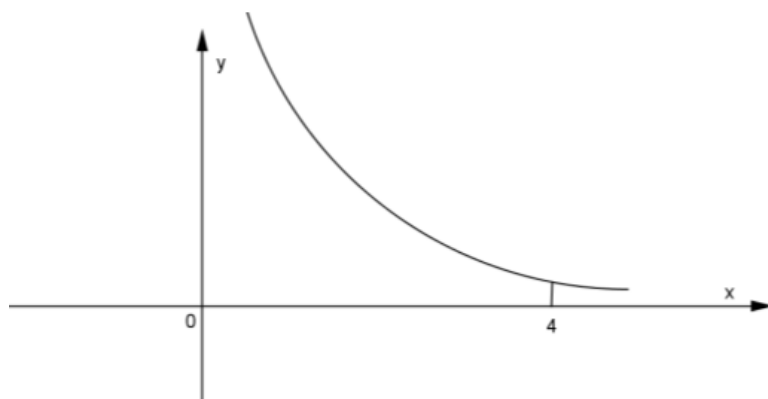


Figura 4.1

Tuttavia non esiste alcun valore positivo di x in cui f si annulli
 b) L'affermazione è falsa. Basta osservare la figura 4.2

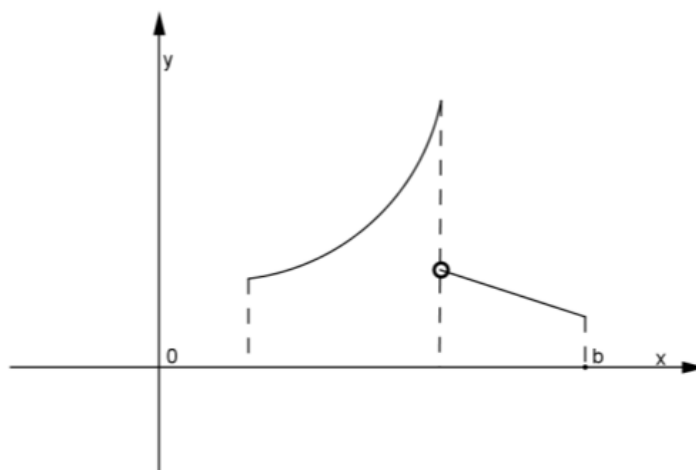


Figura 4.2

Il grafico della funzione mostra che f è biunivoca su (a, b) , ma non è crescente, né decrescente su (a, b) .

c) L'affermazione è falsa. Infatti se consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ per ogni valore reale di x , vediamo che c'è un numero $M > 0$ (per esempio $x^2 + 1$), tale che $|f(x)| \leq M$, mentre com'è noto, $f(x) = x^2$ è illimitata.

Si tratta di un errore frequente da parte degli alunni. L'ordine in cui è presentata la definizione è di fondamentale importanza: *una funzione f è limitata su $\mathbb{R}$ se esiste un $M > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.*

E ora la ciliegia sulla torta.

Se f non è monotona su (a, b) , allora la funzione quadrato f^2 non può essere monotona su (a, b) .

Anche questa affermazione è falsa. Basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ è razionale} \\ -x, & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

sull'intervallo $(0, +\infty)$. Il grafico è riportato nella figura 4.3.

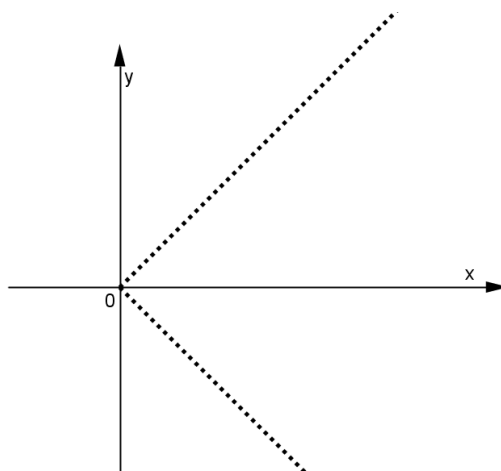


Figura 4.3

Chiaramente questa funzione non è monotona, ma il suo quadrato $f^2(x) = x^2, x > 0$ lo è.

5. L'integrale

Chiudiamo il presente lavoro con tre considerazioni relative agli integrali.

a) Il calcolo di $\int \cos^2 x dx$ e $\int \sin^2 x dx$ può farsi in più modi. Per esempio possiamo risolvere per parti il primo e calcolare il secondo attraverso la formula

$$(4.1) \int \sin^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) dx;$$

oppure possiamo calcolare il primo osservando che $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ e il secondo per mezzo della (4.1).

Qui proponiamo una terza via piuttosto insolita.

Posto

$$A = A(x) = \int \cos^2 x dx, \quad B = \int \sin^2 x dx$$

risulta

$$A + B = \int 1 \cdot dx = x + C_1$$

$$A - B = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C_2$$

e risolvendo il sistema lineare in due equazioni in due incognite

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \\B &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

b) Se F è una primitiva di f , $F' = f$, allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

L'affermazione è falsa. Sia per esempio $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$.
Chiaramente F è una primitiva di f . Tuttavia l'integrale improprio

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$

non esiste. Va da sé che l'affermazione risulta vera se si fa l'ulteriore ipotesi che f sia continua su $[a, b]$.

c) Per finire propongo un test da eseguire alla fine dell'anno scolastico.

Perché nell'integrazione la costante arbitraria può scriversi nella forma $\log c$, $c > 0$ e non nella forma $e^c, \operatorname{senc}, \operatorname{arctg} c, \dots$?

Bibliografia

1. De Finetti Bruno, *Contro la “Matematica per Deficienti”*, Periodico di Matematiche, 1974, serie 5, vol. 50, n. 1-2.
2. De Finetti Bruno, *Matematica logico intuitiva*, Terza edizione riveduta, Edizioni Cremonese, Roma, 1959.
3. Laforgia Andrea, *Resistere, resistere, resistere*, in “*La prova di Matematica all’esame di Stato: proposte per una nuova organizzazione della didattica e della prova finale*”, Seminario di lavoro, Scuola Media Statale “E. Fieramosca”, Barletta, 16-18 dicembre 2015, pp.5-21.

Science & Philosophy, Volume n.6, Issue n.1, 2018

Contents

Papers in English Language

Hafiz Syed Husain

Schleiermacher's Universal Hermeneutics and the Problematics
of Rule-Following 3-14

Catia Eliana Gentilucci

Mediterranean Civil Economy and the European System 15-30

Dario Imperatore

A Legal and Social Framework for the Inclusion of Persons with
Disability through Accessible Tourism and Transportation by Bus 31-46

Papers in Italian Language

Franco Eugeni, Fabrizio Maturo

Bruno Rizzi and Number Theory 47-66

Giuseppe Conti, Alberto Trotta, Francesco Conti

A Journey into the Polyhedrons' World 67-92

Franco Eugeni, Luca Nicotra

Is the Golden Section a Key for Understanding Beauty? - Part I 93-126

Andrea Laforgia

From De Finetti to Today: Against the Domain of Mathematics
for Deficients 127-135

Published by APAV (Accademia Piceno - Aprutina dei Velati
in Teramo)