

Collimations & Quasi-coincidences: fuzzy points & fuzzy singletons

(Collimazioni e Quasi-coincidenze: punti e singoletti fuzzy)

Nicola Umberto Animobono*

*“as far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain;
and as far as they are certain, they do not refer to reality”*

A. Einstein

Abstract

In *fuzzy* set theory, the membership is a flexible, non-dichotomous relationship, whereby the concepts of *fuzzy point*, *element* and *singleton* are different from the corresponding definitions of ordinary sets. Furthermore, they are not consolidated and stable concepts. In the development of theory, these concepts, being *marginal*, have not been explored in depth: each author has limited himself to proposing definitions appropriate for his own purposes.

In this short note, we provide an overview of solutions adopted by various authors, as well as some terminological suggestions, hoping that someone will take up the baton.

Keywords: fuzzy point, fuzzy singleton, collimation, quasi-coincidence, median fuzzy set.*

Sunto

Nella teoria degli insiemi fuzzy l'appartenenza è una relazione flessibile, non dicotomica, per cui i concetti di punto, singoletto ed elemento fuzzy si discostano dalle corrispondenti definizioni degli insiemi ordinari. Inoltre,

*Retired, Independent scholar (Fabriano, Italy); nicolaumbertoanimobono@gmail.com.

non sono concetti consolidati e stabili. Nello sviluppo della teoria, questi concetti, essendo *marginali*, non sono stati approfonditi: ogni autore si è limitato a proporre definizioni opportune per le proprie finalità.

In questa breve nota, noi mostriamo una panoramica di soluzioni adottate dai vari autori, nonché alcuni suggerimenti terminologici, sperando che qualcuno raccolga il testimone.

Parole chiave: punto fuzzy, singoletto fuzzy, collimazione, quasi-coincidenza, insieme fuzzy mediano.[†]

1. Introduzione

Nell'esergo cito una ben nota e paradossale frase di Einstein: *la matematica, se esatta, non riflette la realtà; se aderisce alla realtà, non è precisa*. Negli anni, diversi autori (Pascal, Russell, Kolmogoroff, Shannon, Zadeh, Pawlak, ecc.) hanno tentato di regimentare la informazione *vaga*.

Allo scopo nel 1965 Zadeh [1] propone una nuova struttura matematica [2]: l'insieme **fuzzy**, reso in italiano con *sfocato* (Fadini) [3] o *sfumato* (Bellacicco) [4]. Egli sostituisce la *funzione caratteristica* χ , tipica degli insiemi ordinari, con la *funzione d'appartenenza* $\mu: \Omega \rightarrow I$ ($I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$), cioè allargando l'insieme dei valori (codominio) da $\{0,1\}$ a $[0,1]$.

Nella neonata teoria tutti i concetti sono stati sottoposti a fuzzificazione (*fuzzification*), così definita da Zadeh [5]: “*processo di accostare una struttura fuzzy a una definizione (concetto), teorema, o persino una intera teoria*”, detto *principio d'estensione* [6].

1.1 Appartenenza fuzzy

Moltissimi concetti ordinari trovano una *naturale* collocazione fuzzy, *alcuni* subiscono una *forzatura*: tra questi ultimi l'appartenenza, cioè la *correlazione* tra *elemento* ed *insieme*. Su questa fattispecie, in letteratura, abbiamo una ridondanza di definizioni e tutte risalenti agli albori della teoria, che condensiamo in questa nota, attraverso la cronistoria di *elemento*, *punto* e *singoletto*.

[†]Received on September 28, 2025. Accepted on December 20, 2025. Published on December 31, 2025.
doi: 10.23756/sp.v13i2.1714. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765. ©Nicola Umberto Animobono. This paper is published under the CC-BY licence agreement.

Il *punto* era nato come idea *geometrica* (Euclide). Successivamente, con la teoria degli insiemi, “*punto di un insieme*” diventa sinonimo di “*elemento di un insieme*”, cioè un costituente dello scheletro dell’insieme, tanto che la odierna *General Topology* in precedenza era battezzata *Point-Set Topology*.

Il *singoletto* $\{x\}$ è un *insieme* costituito dal solo *elemento* x .

Comunque, a meno di isomorfismi, un singoletto e un singolo elemento sono spesso interpretati come *equivalenti*: “punto” sinonimo di “elemento”.

Queste quantità, nell’ambiente fuzzy, attendono ancora una adeguata collocazione teorica.

2. Preliminari

2.1 Insiemi

2.1.1 Insiemi ordinari o crespi

Ω	<i>universo di discorso,</i>
$\{x\}_{x \in X} = X$	<i>un insieme con i suoi elementi,</i>
$P(X)$	<i>insieme potenza di X (totalità sottoinsiemi),</i>
$\mathbb{R}$	<i>insieme numeri reali,</i>
$\mathbb{Z} = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$	<i>reticolo minimale di $\mathbb{Z}$,</i>
$\chi: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$	<i>funzione caratteristica di un insieme crespo,</i>
2^Ω	<i>cantoriano o totalità insiemi crespi,</i>
$I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$	<i>intervallo reale unitario.</i>

2.1.2 Insiemi fuzzy

$\mu: \Omega \rightarrow I$	<i>insieme fuzzy,</i>
$\mu_\alpha = \{x \in \Omega \mid \mu(x) > \alpha\}$	<i>α-taglio forte di μ ($\alpha \in [0, 1[$),</i>
$\mu_\sigma = \{x \in \Omega \mid \mu(x) > 0\}$	<i>supporto di μ (o 0-taglio forte),</i>
$I^\Omega = Z(\Omega) = Z$	<i>zadehano o totalità insiemi fuzzy,</i>
$\mathbf{C}\mu(x) = 1 - \mu(x)$	<i>complemento di x in Ω.</i>

2.2 Punti e singoletti

2.2.1 Singoletti fuzzy

Zadeh [5] stesso fornisce la prima intuitiva definizione:

$x \in \Omega, \mu: \Omega \rightarrow I \Rightarrow \forall y \neq x \mu(y) = 0 ; y = x \mu(y) = \lambda \in]0, 1]$	<i>singoletto fuzzy,</i>
$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\Omega)$	<i>totalità singoletti fuzzy su Ω.</i>

Goguen [7] limita il singoletto fuzzy al caso *crespo*:

$$x \in \{x\}, \mu: \Omega \rightarrow I \Rightarrow y \neq x \mu(y) = 0; y = x \mu(y) = 1$$

estendendolo all'intero supporto (universo di discorso), inteso come insieme fuzzy cantoriano:

$$A \subseteq \Omega, A^+: \Omega \rightarrow I \Rightarrow y \notin A A^+(y) = 0; y \in A A^+(y) = 1.$$

2.2.2 Punti fuzzy

Wong [8] introduce il *punto fuzzy* distinguendolo dal *singoletto fuzzy*:

$$x \in \Omega, \mu: \Omega \rightarrow I \Rightarrow \forall y \neq x \mu(y) = 0; y = x \mu(y) = \lambda \in]0,1[\quad \text{punti fuzzy;} \\ S^< = S^<(\Omega) \quad \text{totalità punti}$$

fuzzy.

La principale distinzione è tra i simboli $\leq$ e $<$ cioè il *punto fuzzy* è un sottoinsieme proprio del *singoletto fuzzy*.

Pu Pao-Ming & Liu Ying-Ming [9] unificano punti e singoletti fuzzy in modalità singoletto chiamandoli solo punti fuzzy, cioè:

$$x \in \Omega, \mu: \Omega \rightarrow I \Rightarrow \forall y \neq x \Rightarrow \mu(y) = 0 \\ y = x \Rightarrow \mu(y) = \lambda \in]0,1] \quad \text{punto fuzzy:}$$

punto fuzzy è un insieme fuzzy con supporto formato da un singoletto crespo (Pu&Liu).

2.3 Complemento fuzzy e dualità

$$x \in \Omega, \lambda \in]0,1] p = p_x(\lambda) \in S \Rightarrow \text{complemento punto fuzzy.}$$

$$\forall y \neq x \quad (\mathbf{C}(p))(y) = 1, \quad y = x \quad (\mathbf{C}(p))(y) = (1-\lambda).$$

Il punto fuzzy p fluttua nel suo complemento perdendo le sue linee di livello.

Il suo *duale* $\delta(p)$ suscita maggiore interesse.

$$p = p_x(\lambda) \Rightarrow \delta(p) = p_x(1-\lambda) \quad \text{punto fuzzy duale.}$$

2.4 Appartenenza a insieme fuzzy

Un altro concetto correlato al punto è la sua appartenenza a un insieme, cioè stabilire quando un punto fuzzy è in un insieme fuzzy e quando non lo è.

Wong propone, usando lo stesso simbolo ordinario $\in$

$$x \in \Omega, A: \Omega \rightarrow I, p = p_x(\lambda) \in S^< : p \in A \Leftrightarrow \lambda < A(x)$$

(nota: il simbolo $\in$ deve essere letto *ordinariamente* in $p \in S^<$ e *fuzzy* in $p \in A$).

Un punto fuzzy p è *elemento* di un insieme fuzzy A quando p è un sottoinsieme *proprio* di A ($p(x_p) < A(x_p)$) in x_p . È denotato con vari simboli: per non appesantire la scrittura preferiamo adottare, in assenza di ambiguità, il simbolo classico $\in$.

3. Coincidenze

3.1 Collimazioni

Dopo Wong and Pu Pao-Ming & Liu Ying-Ming, i punti/singoletto con lo stesso supporto necessitano un appropriato termine e il nostro intento è di chiamarli *punti fuzzy collimanti* (o *in sovrapposizione parziale fuzzy*) mentre, con differenti supporti, *punti fuzzy disgiunti* o *separati*.

3.2 Quasi-coincidenza

Pu Pao-Ming & Liu Ying-Ming [7] cambiano la descrizione di Wong introducendo un nuovo concetto: la *quasi-coincidenza*.

I punti fuzzy $p_1(x, \lambda_1)$ e $p_2(x, \lambda_2)$ (con lo stesso supporto x e rispettivi valori λ_1 e λ_2) sono detti:

$$\begin{aligned} \text{punti fuzzy quasi-coincidenti, denotati } \mathbf{q}: & \quad p_1 \mathbf{q} p_2, \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 > 1; \\ \text{sua negazione, denotata } \neg \mathbf{q}: & \quad p_1 \neg \mathbf{q} p_2 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1. \\ p \text{ quasi-coincidente con } A \text{ (} p = p_x(\lambda) \in S, A \in Z \text{):} & \quad p \mathbf{q} A, \Leftrightarrow p + A(p_s) > 1. \end{aligned}$$

3.3. Inclusione

- i) $A \in Z \Rightarrow A \neg \mathbf{q} \mathbf{C}A$;
- ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \ A(x) \leq B(x) \Leftrightarrow A(x) + 1 \leq B(x) + 1 \Leftrightarrow \alpha \text{ o } \beta$:
 - $\alpha) \quad A(x) + (1 - B(x)) \leq 1 \Leftrightarrow A(x) + \mathbf{C}(B(x)) \leq 1 \Leftrightarrow A \neg \mathbf{q} \mathbf{C}B$,
 - $\beta) \quad (-A(x) + 1) + B(x) \geq 1 \Leftrightarrow B(x) + \mathbf{C}(A(x)) \geq 1 \Leftrightarrow 1 \text{ or } 2$:
 - 1) $B(x) + \mathbf{C}(A(x)) > 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}A \mathbf{q} B$,
 - 2) $B(x) + \mathbf{C}(A(x)) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{C}(A(x)) = 1 - B(x) \Leftrightarrow \mathbf{C}A = \mathbf{C}B \Leftrightarrow A = B$ e per

i):

$$\Leftrightarrow \mathbf{C}A \neg \mathbf{q} B \quad \Leftrightarrow A \neg \mathbf{q} \mathbf{C}B.$$

3.4 Peculiarità

Nella teoria degli insiemi con la parola “insieme” sono associate pure le parole “sotto-insieme, sopra-insieme”. Similarmente noi usiamo “sotto-punto, sopra-punto” in armonia con “punto”. Chiamiamo *rango pre-cantoriano* il sottoinsieme $\{\lambda \in I \mid \lambda > \frac{1}{2}\}$. Posto l'insieme fuzzy costante $M : \Omega \rightarrow \{\frac{1}{2}\}$, detto insieme fuzzy *mediano* (*idempotente* col suo complementare: $M = \mathbf{C}M = M \cup \mathbf{C}M = M \cap \mathbf{C}M$, macroscopica differenza dagli insiemi ordinari dicotomici) *Shakhatreh & altri* [8] definiscono un insieme fuzzy F *quasi vuoto* oppure *quasi universale* quando $F \subset M$ o rispettivamente $F \supset M$.

Proposizione 1 Due punti fuzzy collimanti sono quasi-coincidenti sse il valore del *sovra-punto* appartiene al rango pre-cantoriano.

Dim. Per punti fuzzy collimanti p e s ($p_s = s_s$), con $p < s$ (e: $s^c = 1 - s$), risulta:

a) $s \in]0, s^c] \Rightarrow p + s \leq 1$,

b) $s \in]s^c, 1] \Rightarrow p + s > 1$.

Da: $s \leq s^c (= 1 - s) \Leftrightarrow s + s \leq 1 \Leftrightarrow 2s \leq 1 \Leftrightarrow s \leq \frac{1}{2}$,

risulta: $s \leq s^c \Leftrightarrow s \leq \frac{1}{2}$,

cioè: i punti collimanti p & s , con $p < s$, sono quasi-coincidenti sse $s > \frac{1}{2}$.■.

4. Conclusioni

Quando una nuova disciplina cresce, man mano che si sviluppa deve aggiustare i suoi obiettivi e uniformare la terminologia. Anche un concetto *marginale* deve sottostare a questo regime: ciò rafforza i suoi fondamenti e consolida la teoria.

In questa breve nota, senza proporre soluzioni integrative, abbiamo mostrato un argomento sviluppato, fin dalla nascita della teoria, non in modo univoco e da allora rimasto frammentario e sospeso in attesa di una formulazione unitaria.

Dichiarazioni

L'autore dichiara assenza di conflitti di interesse e di finanziamento alcuno.

Ringraziamenti

L'autore ringrazia editore e revisori per le *annotazioni* rilevate e per l'*accondiscendenza* nell'accogliere la stesura definitiva.

Bibliografia

- [1] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, *Information & Control*, 8, 338 -353, 1965.
- [2] Ventre, A.G.S., Insiemi fuzzy: motivazioni e primi concetti, *Science & Philosophy*, 3 (2), 3-10, 2015.
- [3] Fadini, A., *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori, Napoli, 1979.
- [4] Bellacicco, A., La Bella, A. *Le strutture matematiche dei dati*, Feltrinelli, Milano, 1979.

- [5] Zadeh, L.A., A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges, *Memorandum N°. ERL-M335* (1 avril 1972), Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, Berkeley; appeared in: *Journal of Cybernetics*, 2 (2), 4-34, 1972; reprinted in: Yager, R.R., Ovchinnikov, S., Tong, R.M., Nguyen, H.T. (ed), *Fuzzy sets and Applications: Selected papers by L.A. Zadeh*, J. Wiley&Sons, N.Y., 1987 .
- [6] Dubois, D., Prade, H., *Fuzzy sets and systems Theory and applications*, Academic Press, N.Y., London, 1980.
- [7] Goguen, J.A., L-fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 8, 145-174, 1967.
- [8] Wong, C.K., Fuzzy Points and Local Properties of Fuzzy Topology, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 46, 316-328, 1974.
- [9] Pu Pao-Ming and Liu Ying-Ming, Fuzzy Topology. I: Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 76, 571-599, 1980.
- [10] Shakhathreh MAH, Shatanawi WAA, Jaradat MMM, Fora AAA: On fuzzy partitions, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 30 (4), 467-474, 2006.