

Sulla gravità dei gravi: Galileo e Aristotele (On the Gravity of Heavy Bodies: Galileo and Aristotle)

Luca Granieri*

Abstract

We discuss some mathematical and philosophical aspects connected with the free fall question according to the aristotelian and galileian point of view. In particular we deal with the question of the mass dependence of the fall velocity. Identifying the aristotelian velocity with a limit velocity in a resistive medium, the dispute focuses on the role of continuous functions and the two different approaches recreate in the different order of taking limits for the motion in a vacuum.

Keywords: Free fall; limit velocity; Continuous functions and limits; aristotelian and galileian physics.¹

Abstract

Si propongono alcune considerazioni sui modelli matematici impliciti nel punto di vista aristotelico e galileiano sulla questione della dipendenza dalla massa della velocità di caduta dei gravi. Identificando la velocità di caduta aristotelica con una velocità limite in un mezzo resistente, la controversia si cristallizza nel ruolo delle funzioni continue, ricomponendosi nel diverso ordine di passaggio al limite nei due differenti approcci nel considerare la possibilità del moto in uno spazio vuoto.

Keywords: Caduta libera; velocità limite; funzioni continue e limiti; fisica aristotelica e galileiana.

*Liceo Scientifico E. Fermi, Bari, Italy; granieriluca@libero.it

¹Received on July 30, 2025. Accepted on December 27, 2025. Published on December 31, 2025. doi: 10.23756/sp.v13i2.1709. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765. ©Luca Granieri. This paper is published under the CC-BY licence agreement.

1 Introduzione

Nel ripensare alla propria vocazione da scienziato si potrebbero individuare momenti precisi dell'infanzia come il giocare col *piccolo chimico*, le strane attrazioni magnetiche delle calamite, o la capacità di eseguire a mente calcoli complicati. Ma forse il seme della curiosità scientifica è molto più universale e un po' tutti siamo stati dei piccoli scienziati, magari senza ricordarcene. Per esempio quando, tenuti in braccio o seduti sul seggiolone, lasciavamo cadere ripetutamente gli oggetti più vari, mentre i nostri genitori assecondavano più o meno divertiti questa prima raccolta di evidenze empiriche, sperimentando che *i corpi cadono*.

Crescendo, tutti dimenticano questa esperienza precoce, e il fatto che i corpi cadono diventa ben presto un'ovvietà della vita quotidiana, immancabilmente ribadita dai nostri genitori ogniqualvolta ci allontanavamo in bici, per giocare a pallone o ad acchiapparella: *Attento ancora cadi!* Ma è proprio guardando con prospettive nuove gli aspetti quasi banali dei fenomeni naturali che la scienza ha fatto i progressi più decisivi, come, nel caso specifico della caduta dei gravi, è accaduto con Newton, nel considerare l'orbita lunare come una eterna caduta verso la Terra, o nel *pensiero più felice della mia vita* che Einstein racconta nella sua autobiografia: *Stavo seduto in una poltrona nell'Ufficio Brevetti di Berna, quando all'improvviso mi ritrovai a pensare: se una persona cade liberamente, non avverte il proprio peso. Rimasi stupefatto. Questo pensiero così semplice mi colpì profondamente e ne venni sospinto verso una teoria della gravitazione*.

In particolare, il tema della caduta dei gravi è centrale nel passaggio dalla filosofia della natura di stampo aristotelico alla scienza moderna galileiana. Sebbene sia presentato sin dai primi anni di studio nei rudimenti di cinematica come esempio base di moto uniformemente accelerato, questo fenomeno quotidiano si rivela invece piuttosto ostico, e anche per questo si presta molto bene ad essere approfondito in diverse direzioni, anche in chiave multidisciplinare.

A tal proposito, il tema può consentire di discutere alcuni aspetti della modellizzazione matematica della realtà costitutiva del metodo scientifico e le relazioni con gli aspetti empirico-sperimentali. In questo articolo si propone una rilettura matematica e filosofica del dibattito sulla caduta dei gravi, focalizzando alcuni aspetti matematici impliciti nell'analisi aristotelica e galileiana. In particolare, si troverà che queste due differenti analisi, generalmente ritenute completamente contrapposte, mostrano invece un sottofondo matematico comune costituito dalla nozione matematica di funzione continua e di limite, e pertanto si possono in parte riconciliare tramite i modelli matematici moderni.

2 Cadere con filosofia

Com'è noto, nella filosofia aristotelica i gravi cadono verticalmente verso il centro della Terra, coincidente con il centro assoluto cosmico e unico centro di gravità, quello che F. Battiato forse chiamerebbe il *centro di gravità permanente*. Nella grandiosa e onnicomprensiva visione aristotelica del cosmo intero, la caduta dei gravi e il collegato problema del moto del proiettile costituiscono però anche il principale punto debole che fornirà il grimaldello per la costruzione della nuova fisica e il collasso dell'aristotelismo stesso. Col senno dei vincitori, anche nell'insegnamento, spesso si tende in un certo senso a liquidare frettolosamente il pensiero filosofico antico, nella fattispecie quello aristotelico, considerandolo come puramente speculativo e alieno dalle osservazioni empirico-sperimentali. Si racconta che Galileo promosse l'iconica prova sperimentale di caduta di gravi dalla torre di Pisa per appurare che i corpi cadono con la stessa velocità, indipendentemente dal loro peso (massa), e così sconfiggere la fisica aristotelica. Certo, la spettacolare scena imbastita dall'astronauta David Scott durante una missione Apollo 15 (1971) sulla Luna consente anche a noi di gridare che Galileo aveva ragione. Ma non è affatto vero che gli antichi non osservassero la natura o non facessero esperimenti. Anzi, proprio da attente osservazioni gli aristotelici concludevano che i corpi pesanti cadono più in fretta di quelli leggeri, rallentandone la caduta tramite mezzi resistenti come l'acqua. Del resto, questo è proprio quello che avviene in natura: i corpi cadono sempre in un mezzo resistente giacché, nella fisica aristotelica, il vuoto non può esistere. Galileo invece perviene per varie vie, sia sperimentali che teoriche, alla conclusione opposta: ossia che il vuoto può esistere e in esso i corpi cadrebbero, a partire dalla stessa altezza, uno accanto all'altro se lasciati cadere simultaneamente come nella dimostrazione di Scott, tutti con la stessa velocità. Tuttavia, ancora al tempo di Galileo le evidenze empiriche potevano corroborare proprio le ragioni aristoteliche: i corpi pesanti cadevano veramente più velocemente di quelli leggeri. Le prime realizzazioni di vuoti apprezzabili sono infatti relativamente recenti. La situazione è ben riassunta in questo estratto di T.S. Khun:

Ci è stato spesso detto che è solo perché gli scienziati medievali anteponevano l'autorevolezza della parola scritta, e preferibilmente antica, all'autorevolezza dei loro propri occhi che essi potevano continuare ad accettare l'assurda affermazione di Aristotele che i corpi pesanti cadono più velocemente di quelli leggeri. La scienza moderna, secondo questa interpretazione prevalente, ebbe inizio quando Galileo ripudiò i testi scritti a favore della sperimentazione, e poté osservare che due corpi di peso ineguale, lasciati cadere dalla sommità della torre di Pisa, toccavano il suolo contemporaneamente. Oggi tutti gli scolari sanno che i corpi leggeri e pesanti hanno la stessa velocità di caduta. Ma gli scolari sbagliano e sbaglia anche la storia di Galileo. Nel mondo d'ogni giorno, come

Aristotele osservava, i corpi pesanti cadono in effetti più velocemente di quelli leggeri. Questo a prima vista. La legge di Galileo è più utile alla scienza di quella di Aristotele, non perché interpreta l'esperienza più perfettamente, ma perché, dietro la regola superficiale svelata dai sensi, sa cogliere un aspetto del moto più essenziale, ma nascosto. La verifica sperimentale della legge di Galileo richiede speciali strumenti: senza un aiuto, i sensi non potrebbero negarla o confermarla. Galileo stesso non giunse a formular la legge grazie all'osservazione, o almeno grazie a nuove osservazioni, ma attraverso una catena di argomentazioni logiche [...]. Con ogni probabilità non effettuò il famoso esperimento sulla torre di Pisa. Questo venne invece effettuato da uno dei suoi critici ed il risultato diede ragione ad Aristotele. Il corpo pesante toccò il suolo per primo. Il racconto popolare della confutazione della teoria aristotelica fatta da Galileo è, in gran parte, un mito creato dalla mancanza di una vera prospettiva storica. Noi dimentichiamo volentieri che molti dei concetti in cui crediamo ci sono stati faticosamente inculcati nella nostra giovinezza. Noi li accettiamo troppo facilmente come i prodotti naturali e incontestabili delle nostre sole percezioni e respingiamo invece concetti differenti dai nostri come errori, radicati nell'ignoranza e nella stupidità e perpetuati da una cieca obbedienza all'autorità [Khun, 2000, p. 122].

Dunque, la dipendenza della velocità di caduta dal peso, ovvero dalla massa, cosa che porterà successivamente Newton a porre il problema dell'identità tra massa inerziale e massa gravitazionale, non poteva essere risolta dalla sola osservazione. Un'occhiata agli aspetti matematici, spesso solo impliciti sia nelle argomentazioni galileiane che in quelle aristoteliche, ci aiuterà forse a capire le ragioni più profonde del dibattito sulla caduta dei gravi. In effetti, comunemente la differenza tra i due approcci è confinata all'importante risultato galileiano sul moto uniformemente accelerato, ovvero che nella caduta libera ciò che conta è l'accelerazione piuttosto che la velocità. Conseguentemente, la controversia sostanzialmente si riformula così: velocità costante vs accelerazione costante. Per quanto, col senno di poi, tutto ciò sia corretto e ben conosciuto, in questo articolo ci si propone di far emergere delle differenze ancora più sostanziali, generalmente meno conosciute o comunque poco discusse. Infatti, per poter considerare il moto nel vuoto è necessario ricorrere al principio filosofico del *natura non facit saltus*, traducibile matematicamente attraverso il concetto di continuità, o comunque attraverso un processo di *passaggio al limite*. Questo principio è però utilizzato sia da Galileo che dai peripatetici in modo soltanto implicito e piuttosto intuitivo (la sistemazione dell'*analisi matematica* introdotta nel seicento richiederà ancora moltissimo tempo), portando a due conclusioni opposte. In particolare, trascurando la fase accelerata iniziale, i peripatetici assumono una formula semplificata della velocità di caduta come inversamente proporzionale alla resistenza del mezzo. Mentre Galileo, trascurando invece la resistenza del mezzo, focalizza l'attenzione sull'accelerazione e sul conseguente moto uniformemente accelerato.

Inoltre, come ulteriore punto non secondario, per considerare gli studi galileiani sul piano inclinato o sulle oscillazioni del pendolo rilevanti per la caduta libera, occorre il principio di composizione dei moti, ovvero il carattere vettoriale dello spazio. La concezione di uno spazio vuoto rappresenta una delle fondamentali novità che accompagnano la rivoluzione scientifica seicentesca, permettendo il passaggio da una scienza di carattere *olistico* a una di tipo *riduzionistico*. Questa conquista si poggia essenzialmente su una base matematica, da cui si deduce per esempio la traiettoria parabolica del proiettile, mentre, in un mezzo resistente, la traiettoria di matrice aristotelica come quella di di Tartaglia (Figura 3), per quanto errata, può rappresentare meglio le traiettorie reali. Infine, con un'analisi moderna del problema, vedremo che i due differenti approcci si possono ricollegare al diverso ordine in cui si effettuano i *passaggi al limite* necessari.

Per comprendere meglio le differenti posizioni, compresa quella di Galileo, snodo cruciale della scienza moderna (si veda Granieri [2019] per alcuni complementari aspetti matematici della scienza moderna), occorre allora paradossalmente allontanarsi dall'osservazione puramente empirica e indossare *occhiali matematici*. Ma prima occupiamoci di un primo approccio qualitativo alla questione.

3 Esperimenti mentali

Il problema fondamentale è allora quello di capire cosa succederebbe se ci fosse il vuoto. La fisica aristotelica suddivide i moti in *naturali* e *violenti*. Nel mondo sublunare l'unico moto naturale è quello verticale, di caduta per i corpi *pesanti* o di ascesa per quelli *leggeri*. Ma la caduta dei gravi avviene talmente in fretta da risultare alquanto difficile da analizzare. Gli aristotelici allora “rallentavano” il moto per poterlo meglio osservare utilizzando diversi mezzi resistenti. Le evidenze empiriche raccolte sulla caduta di corpi in tali mezzi resistenti portavano gli aristotelici a concludere che, a parità di mezzo resistente, corpi più pesanti cadono più velocemente, mentre, a parità di corpo, la velocità di caduta cresce man mano che il mezzo diventa più *rarefatto*. E. Bellone in [Bellone, 2009, pp. 26-27] così riassume la faccenda:

Alcuni di questi principi sono stati già formulati da Aristotele e non sono mai stati falsificati. Ti capita di tenere fra le dita un corpo pesante. Una pietra, ad esempio. Quando la pietra sta nella tua mano e tu te ne stai fermo in piedi, è ovvio che la sua velocità è nulla. Ora apri le dita. In un istante la pietra acquista una sua velocità e scende in linea retta verso il basso. Guarda bene questo movimento e poi chiedi come si svolge. La risposta è chiara: c'è una brusca variazione iniziale di velocità - che non puoi sicuramente valutare perché è troppo rapida - e poi la caduta si realizza con una velocità costante. I tuoi occhi, infatti,

non avvertono nessuna variazione di questa velocità. E non avvertono variazioni d'alcun genere sia nel caso che la pietra cada dalla tua mano, sia nel caso che essa scenda dalla cima di un albero, dal tetto di una casa o dalla cima di un torrione. Sì allora più accurato, e lascia cadere - dalla medesima altezza - oggetti più pesanti e meno pesanti della pietra con cui hai cominciato le tue osservazioni: sfere di ferro o di legno, ad esempio. Che cosa vedi? Vedi che una cosa molto pesante impiega, per raggiungere il suolo, meno tempo di una cosa molto leggera. Quindi, la velocità di caduta di una sfera di ferro è maggiore di quella di una sfera di legno. E comunque, in tutti i casi esaminati, vedi che le velocità di discesa - grandi o piccole che siano - sono costanti: non c'è accelerazione, se non un brusco mutamento iniziale di velocità, un inizio talmente rapido che sfugge a ogni valutazione precisa, e che di conseguenza puoi trascurare. Non solo. Lascia ora cadere, due volte di seguito, un oggetto pesante. La prima volta in aria, e la seconda in un fluido come l'olio di oliva. Che cosa percepisci? Percepisci con chiarezza che la velocità con cui quell'oggetto si muove nell'olio è inferiore a quella con cui si muove in aria. Più in generale: il vuoto, se esistesse, avrebbe ovviamente una resistenza nulla ad essere attraversato da una cosa in movimento, ma se le velocità sono inversamente proporzionali alla resistenza dei mezzi, allora la velocità nel vuoto è infinita. Quindi il vuoto non esiste perché non sono osservabili velocità infinite. Quindi il mondo non è formato da cose disposte nello spazio vuoto.

Rivisitando in chiave moderna le osservazioni aristoteliche, potremmo pertanto interpretarle come delle *velocità limite* di caduta in un mezzo resistente che (si veda anche la sezione 5 e l'equazione (9)) assumono la forma $v = \frac{mg}{k}$, con k costante che dipende dalla geometria (aerodinamica) del corpo e dalla resistenza (viscosità) del mezzo, ovvero della forma $k = A\eta$, prodotto di un coefficiente aerodinamico A e di un coefficiente di viscosità η . Si ottiene pertanto, a parità di geometria del grave, una diretta proporzionalità rispetto alla massa e una inversa proporzionalità rispetto alla resistenza del mezzo. Se si accetta una tale legge di inversa proporzionalità rispetto alla resistenza del mezzo, confortata dalle evidenze empiriche al tempo disponibili, come appunto sostenevano gli aristotelici, poiché *natura non facit saltus*, si dovrebbe concludere che la velocità di caduta raggiunge valori sempre più grandi man mano che il mezzo diventa più rarefatto, fino a diventare infinita in uno spazio vuoto. E se non possiamo accettare grandezze infinite, allora il vuoto stesso non può esistere. Proprio in questo consiste uno dei tradizionali argomenti aristotelici contro l'esistenza del vuoto: se esistesse il vuoto allora i gravi vi cadrebbero con velocità infinita.

Galileo d'altra parte risponderebbe con il suo celebre *esperimento mentale*:

Salv. Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità de i quali fussero ineguali, è manifesto che se noi congiungessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velocitato

dall'altro più veloce. Non concorrete voi meco in quest'opinione? Simp.: Parmi che così debba indubitabilmente seguire. Sal. Ma se questo è, ed è insieme vero che una pietra grande si muove, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque congiungendole ambedue insieme, il composto di loro si muoverà con velocità minore di otto gradi: ma le due pietre, congiunte insieme, fanno una pietra maggiore che quella prima, che si muoveva con otto gradi di velocità; adunque questa maggiore si muove meno velocemente che la minore; che è contro vostra supposizione” [Galilei, 2009, p. 26].

L'idea di fondo dell'argomento di Galileo sfrutta il fatto che, se è valido il principio aristotelico sulla caduta, allora per modificare la velocità di due gravi sarebbe sufficiente “congiungerli”. Galileo non precisa come i due gravi debbano o possano essere congiunti. Si può immaginare che ciò possa avvenire con un filo sottilissimo che abbia la sola funzione di connettere i due corpi in caduta, essendo per il resto del tutto *trascurabile*, oppure, con i mezzi moderni, tramite una goccia di super colla. Seguendo gli argomenti aristotelici, la congiunzione dei due gravi immaginata da Galileo provocherebbe da una parte un aumento della velocità, ma dall'altra, essendo il grave più leggero indietro nella caduta rispetto a quello più pesante, come un vagone rallenta la corsa della locomotiva, le due masse collegate dovrebbero anche rallentarsi attestandosi su una velocità addirittura inferiore a quella delle masse scollegate tra loro. Vale a dire che, collegando due masse $m < M$, la massa congiunta $m + M$ cadrebbe con una velocità inferiore a quella di M , cosa che contraddice la tesi aristotelica sulla velocità di caduta crescente rispetto alla massa dei gravi. Pertanto, sembra sostenere a questo punto Galileo, la velocità di caduta non può dipendere dalla massa. Per inciso, la velocità di caduta delle masse congiunte $m + M$ potrebbe anche essere intermedia rispetto a quella delle due masse scollegate, in quanto *una pietra grande si muove, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque congiungendole ambedue insieme, il composto di loro si muoverà con velocità minore di otto gradi* perché la maggiore è rallentata dalla minore, lasciando intendere che la velocità sarebbe anche maggiore di quattro gradi, essendo la minore trainata dalla maggiore. Comunque sia, perché, in un certo senso, spesso si accetta senza indugio l'argomento di Galileo contro Aristotele? Sul piano qualitativo il peso delle argomentazioni non appare troppo diverso. Ad un primo esame logico della situazione, il ragionamento tutto o niente di Galileo può risultare affrettato. Ammessa la contraddizione, questo non significa che l'intero edificio sia da demolire. Magari ad essere fallace è soltanto il comportamento di rallentamento locomotiva-vagone, oppure la descrizione dell'effetto di *congiungimento* delle due masse. Per una trattazione più circostanziata occorre approfondire le ipotesi e la matematica necessaria ad esaminare questi argomenti euristici.

4 Problemi di continuità

Tanto gli argomenti aristotelici quanto quelli galileiani richiamano, in ottica moderna, il ricorso implicito a qualche *funzione continua*. Infatti, ritenere che una qualche causa sia trascurabile rispetto a qualche effetto significa assumere che se una causa *cambia di poco*, allora anche i conseguenti effetti *cambiano di poco*. Una formulazione rigorosa della continuità coinvolge come è noto il formalismo *epsilon-delta* (per una introduzione geometrica della continuità si veda per esempio Granieri [2022]) per una funzione $f : X \rightarrow Y$ che risulta continua in $x_0 \in X$ se, indicando con $d(x_1, x_2)$ la distanza tra due punti,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \quad (1)$$

Pertanto, se una causa x è *sufficientemente vicina* a x_0 , allora il conseguente effetto $f(x)$ è *vicino quanto si vuole* a $f(x_0)$. In termini del concetto di *limite* dell'*Analisi Matematica*, in modo equivalente la relazione (1) si riscrive nella seguente forma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Galileo stesso, per esempio, ammetteva che i gravi più pesanti cadono più in fretta di quelli leggeri, attribuendo però questo effetto alla resistenza del mezzo. Rallentando il moto, piuttosto che in mezzi resistenti, attraverso pendoli e piani inclinati, egli si era convinto infatti di poter trascurare l'attrito dell'aria [Galilei, 2009, p. 28]:

Simp. Gran detto è questo, Sig. Salviati. Io non crederò mai che nell'istesso vacuo, se pur vi si desse il moto, un fiocco di lana si movesse così veloce come un pezzo di piombo. Salv. Pian piano, Sig. Simplicio: la vostra difficoltà non è tanto recondita, né io così inavveduto, che si debba credere che non mi sia sovvenuta, e che in conseguenza io non vi abbia trovato ripiego. Però, per mia dichiarazione e vostra intelligenza, sentite il mio discorso. Noi siamo su 'l volere investigare quello che accaderebbe a i mobili differentissimi di peso in un mezzo dove la resistenza sua fusse nulla, sì che tutta la differenza di velocità, che tra essi mobili si ritrovasse, referir si dovesse alla sola disuguaglianza di peso; e perché solo uno spazio del tutto voto d'aria e di ogni altro corpo, ancor che tenue e cedente, sarebbe atto a sensatamente mostrarci quello che ricerchiamo, già che manchiamo di cotale spazio, andremo osservando ciò che accaggia ne i mezzi più sottili e meno resistenti, in comparazione di quello che si vede accadere ne gli altri manco sottili e più resistenti: ché se noi troveremo, in fatto, i mobili differenti di gravità meno e meno differir di velocità secondo che in mezzi più e più cedenti si troveranno e che finalmente, ancor che estremamente diseguali di peso, nel mezzo più d'ogni altro tenue, se ben non voto, piccolissima si scorga e quasi inosservabile

la diversità della velocità, parmi che ben potremo con molto probabile congettura credere che nel vacuo sarebbero le velocità loro del tutto eguali.

Le parole di Salviati, alter ego dello stesso Galileo, mostrano come il vuoto sia inteso come una sorta di *caso limite*, ottenuto passando con *continuità* attraverso mezzi sempre più rarefatti, ovvero che il moto sia continuo rispetto all'effetto del mezzo resistente che diventa *asintoticamente* costante nel vuoto. In altre parole, per formalizzare quanto affermato da Galileo, occorrerebbe considerare la funzione $f(r, m)$ che alla resistenza r del mezzo sul corpo di massa m associa il conseguente effetto sulla velocità di caduta del corpo stesso, e assumere che f sia una funzione continua tale che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r, m) = f(0, m) = \text{costante}.$$

Mentre, in questo stesso contesto, per gli aristotelici si avrebbe

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r, m) = f(0, m) = +\infty.$$

Se dunque, sembra dirci Galileo proseguendo il suo argomento sui corpi *congiunti*, potessimo via via far sparire la presenza dell'aria, vedremmo via via le velocità di caduta dei corpi modificarsi (oggi diremmo con *continuità*) fino ad assumere il medesimo valore costante per entrambi. Questo tipo di ragionamento, al quale Galileo talvolta si riferiva con la necessità di *defalcare gli impedimenti*, costituiva una sorta di postulato universale sul comportamento della natura, secondo il celebre motto *natura non facit saltus*, in questa formulazione esplicita di matrice scolastica, nel seicento riproposto come principio universale con l'affermarsi della meccanica (dei continui) e del numero reale, nel solco tracciato già a partire da Euclide e dalla tradizione aristotelica stessa, in cui il *continuo* geometrico si contrappone al discreto aritmetico (e degli atomisti). In questo frangente, la differenza di approccio riguarda essenzialmente il fatto che nella concezione aristotelica il moto nel vuoto è escluso per principio, perché questo comporterebbe, sempre, con un *passaggio al limite* per continuità, la presenza di un *infinito attuale* (la velocità di caduta). Più precisamente, sempre reinterpretando in ottica moderna, il rifiuto aristotelico del vuoto che renderebbe *impossibile* il moto si potrebbe ricondurre al fatto che il grafico dell'iperbole equilatera di equazione $v = \frac{km}{r}$, che rappresenterebbe il grafico della velocità rispetto alla resistenza r del mezzo, non si può estendere con *continuità* assegnando un valore, finito o infinito che sia, alla velocità nello zero, ossia nel vuoto. Si tratta di due ragionevoli, sebbene diversi, utilizzi del principio di continuità nei fenomeni naturali.

Ma le cose sono ancora più intricate. Esaminiamo più da vicino l'argomento di Galileo. In effetti, sulla scia di queste problematiche di continuità, egli ci pare perplesso proprio sul fatto che basterebbe *congiungere* due gravi in caduta

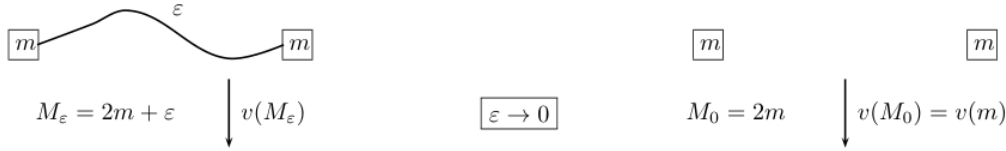


Figure 1: Congiungimento e passaggio al limite.

per modificare in maniera sensibile la velocità di caduta stessa, introducendo una strana *discontinuità*. In termini più formali, possiamo pensare a due gravi identici di massa m che cadono ugualmente (sia per Galileo che per Aristotele) uno accanto all'altro. In questo modo potremo dimenticarci dell'effetto locomotiva-vagone e concentrarci soltanto sulle conclusioni a cui questi diversi modelli di caduta possono portare. Il ruolo del filo sottilissimo (o della colla) è quello di connettere idealmente due masse m in modo che costituiscano un unico corpo. Nell'approccio galileiano appare implicita l'assunzione sul poter *trascurare* l'influenza del filo sottilissimo, ovvero che la sua massa, diciamo pari a ε , possa essere scelta sufficientemente piccola da rendere arbitrariamente piccola la conseguente variazione della velocità di caduta del corpo complessivo di massa $M_\varepsilon = 2m + \varepsilon$. Pertanto le due masse dovrebbero continuare a cadere in maniera praticamente indistinguibile da quanto facevano prima che fossero congiunte, come mostra il passaggio al limite, nell'ipotesi che la velocità di caduta v sia una funzione continua della velocità, mostrato in figura 1.

Un modo alternativo per esaminare l'argomento galileiano del *congiungimento* potrebbe consistere nell'immaginare che uno dei due gravi in caduta si muova anche nella direzione orizzontale verso l'altro, e toccatolo resti a questo agganciato, per esempio a causa di una goccia di super colla spalmata sulla superficie, producendo alla fine un *urto totalmente anelastico* come in figura 2. Ora, dopo l'urto si avrebbe un unico corpo di massa $2m$, e accogliere il modello aristotelico significherebbe accettare che improvvisamente, e in maniera del tutto discontinua, la velocità di caduta passi da un valore v al suo doppio $2v$ (figura 2).

Tuttavia, come Galileo aveva ben rilevato nella sua magistrale analisi del moto del proiettile, se i moti nelle due direzioni ortogonali sono indipendenti tra loro, nella direzione verticale di caduta non si trova giustificazione a questa improvvisa variazione di velocità. L'urto avviene infatti nella sola direzione orizzontale. Un effetto *grande* (l'aumento della velocità di caduta) avverrebbe senza una causa, contraddicendo il modello aristotelico stesso. Precisamente, si può rilevare una

Sulla gravità dei gravi: Galileo e Aristotele

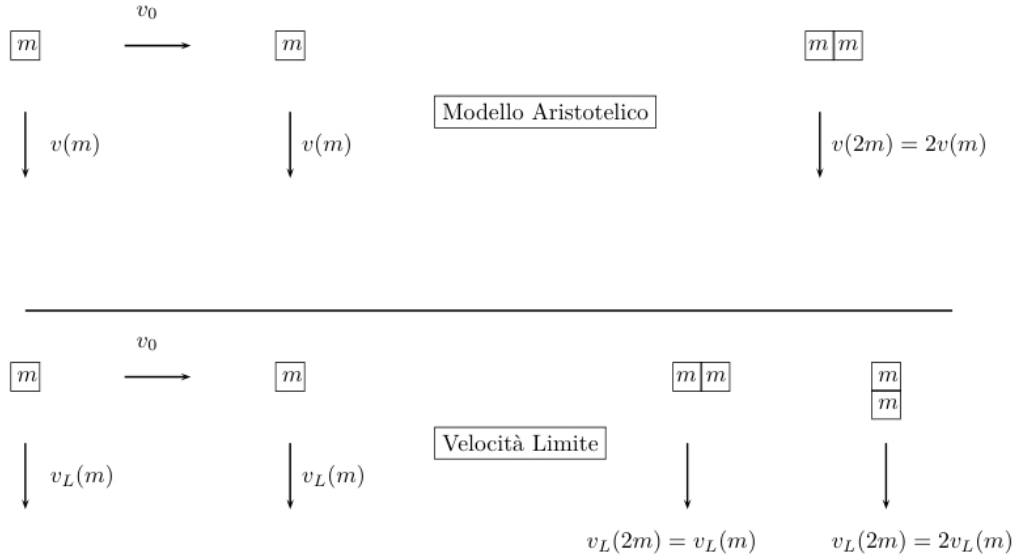


Figure 2: Congiungimento e velocità di caduta.

contraddizione con la conservazione della quantità di moto. Infatti, se $v = v(m)$ rappresenta la velocità di caduta del corpo di massa m , la quantità di moto prima dell'urto è $2mv(m)$. Dopo l'urto, dalla conservazione della quantità di moto nella direzione verticale si ottiene

$$2m v(m) = 2m v(2m) \Rightarrow v(2m) = v(m). \quad (2)$$

In accordo con l'assenza di cause nella direzione verticale, la velocità di caduta resta invariata, indipendentemente dal fatto che le masse siano congiunte o meno, contraddicendo la previsione aristotelica di una velocità finale di caduta $v(2m) = 2v(m)$.

Questa breve disamina mostra però un punto importante, non sempre debitamente sottolineato, in cui i due approcci alla caduta dei gravi sono in disaccordo: *la natura vettoriale del moto*. Questo aspetto, strettamente legato con il *riduzionismo*, oggi quasi scontato, emerge piuttosto lentamente per affermarsi nella nuova scienza seicentesca. Gli aristotelici guardavano alla natura in senso *globale, olistico*, come un tutt'uno non sempre scindibile in parti indipendenti. Basti pensare all'approccio di Tartaglia alla traiettoria del proiettile, contrapposta alla moderna costruzione, di matrice galileiana, del moto parabolico a partire da due moti rettilinei indipendenti (figura 3). Tra le altre cose, questo principio di composizione dei moti è indispensabile per collegare gli studi galileiani su pendoli e piani inclinati ai fenomeni di caduta libera.

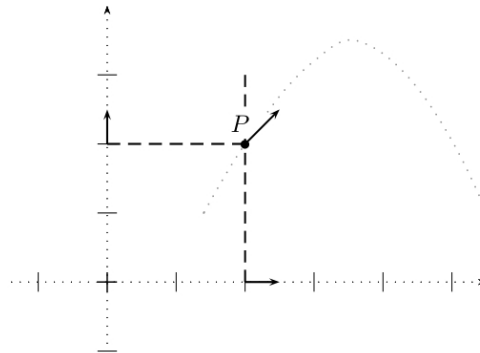


Figure 3: Moto del proiettile: traiettoria di Tartaglia (dal libro Nova Scientia, libro primo p. 12) e composizione vettoriale del moto.

Pertanto, se si accetta il carattere vettoriale del moto, la relazione (2) sconfesserebbe l'assunzione di una funzione crescente della velocità di caduta rispetto alla massa. Si potrebbe pensare che il problema sia riconducibile al carattere *discontinuo* dell'urto. Ma, per inciso, nella meccanica classica anche gli urti possono essere considerati un fenomeno "continuo". L'urto avviene in un certo intervallo di tempo nel quale tutte le grandezze possono variare con continuità per passare dalla velocità "prima" dell'urto a quella "dopo" l'urto. Il problema è che questa frase transitoria risulta perlopiù inaccessibile sia all'indagine teorica che sperimentale. Allora, in tutti i casi in cui questa fase non è importante, si suole identificare tale intervallo con un urto "istantaneo", conseguentemente descritto da funzioni discontinue. In tal caso la discontinuità costituisce una sorta di "approssimazione" della continuità.

Prescindendo da questa analisi a posteriori, riprendiamo la questione della continuità nel problema della caduta. Ricapitolando un attimo il discorso, Aristotele e Galileo sarebbero probabilmente in accordo nel sostenere che due corpi identici di massa m , a parità di mezzo resistente, cadano entrambi con una velocità $v = v(m)$ e che quest'ultima espressione corrisponda a quella che oggi diremmo essere una *funzione continua*. Naturalmente, nel fare ciò stiamo discutendo quello che potrebbe essere un modello matematico della teoria della caduta nell'approccio aristotelico o galileiano, e non ovviamente di tutta la filosofia aristotelica nella sua completezza o di tutti i fenomeni naturali connessi. Del resto, il ruolo di un modello matematico è proprio quello di circoscrivere pochi aspetti essenziali per poterli studiare in modo più preciso e quantitativo. Nella fattispecie ci stiamo focalizzando sulla funzione $v = v(m)$ che dovrebbe descrivere la velocità

di caduta, per ora in funzione della sola massa. In questo frangente, le divergenze di vedute riguardano allora le altre proprietà della funzione $v = v(m)$ che per Galileo sarebbe descritta da una funzione (asintoticamente) costante, piuttosto che da una retta di pendenza positiva come per gli aristotelici. Dunque, nel *modello aristotelico* la caduta è descritta da una retta obliqua mentre in quello galileiano si avrebbe una retta orizzontale. Su questa questione, riprendiamo l'esperimento mentale di Galileo formalizzandone gli aspetti matematici più rilevanti. Supponiamo che la velocità di caduta $v = v(m)$ sia una funzione strettamente crescente della massa. Se il filo, o piuttosto la goccia di colla, ha massa ε , allora connettendo le due masse si ottiene un corpo unico di massa totale $M_\varepsilon = 2m + \varepsilon$, identificando il caso $M_0 = 2m$ con quello delle due masse scollegate in assenza del filo, ovvero per $\varepsilon = 0$. Stiamo cioè immaginando due gravi separati come caso limite rispetto al filo congiungente che svanisce progressivamente con continuità come in figura 1. Ora, essendo $M_\varepsilon > 2m > m$ avremmo $v(M_\varepsilon) > v(2m) > v(m)$. Passando al limite, per le cosiddette proprietà di *permanenza del segno* (ovvero che nel passaggio al limite le disuguaglianze si conservano), si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v(M_\varepsilon) \geq v(2m) > v(m). \quad (3)$$

Ora, ipotizzando che il fenomeno sia continuo, ovvero che il filo/colla possa essere scelto in modo da perturbare impercettibilmente quanto si vuole la caduta, allora avremmo la contraddizione

$$v(m) = v(M_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v(M_\varepsilon) > v(m), \quad (4)$$

dove le uguaglianze per $\varepsilon = 0$ corrispondono da un lato al fatto che la velocità è una funzione continua, e dall'altro al fatto che per $\varepsilon = 0$ abbiamo due masse m separate che cadono con la stessa velocità $v(m)$. Pertanto, l'argomento aristotelico, indipendentemente dall'effetto *locomotiva-vagone*, è contraddetto proprio a causa della continuità della natura, oppure deve esserci qualche elemento del modello da riconsiderare, per esempio la possibilità che la velocità dipenda non soltanto dalla massa ma anche da altre variabili (come abbiamo già accennato, la geometria dei gravi svolge un ruolo importante).

Prima di discutere il tema nella sezione seguente, osserviamo che il principio di continuità costituisce, in modo esplicito o implicito che sia, un fondamentale elemento di riflessione e di ricerca, come nel problema della *stabilità di struttura* delle teorie fisiche e alla questione generale: *La soluzione esatta di un problema approssimato è un'approssimazione del problema esatto?* In molti casi è proprio così, come accade nello studio del pendolo *semplice*, nel quale l'approssimazione $\sin x \approx x$ consente di risolvere un problema lineare come approssimazione del problema non-lineare di partenza. Ma non è sempre così e non tutto è necessariamente continuo! Anche il *natura non facit saltus* si rivela meno universale e più

problematico di quanto si poteva ritenere. Si pensi al celebre “errore” di Poincaré sul problema dei tre corpi in cui anche un granello di polvere può essere determinante (si veda ad esempio [Stewart, 2018, cap. XII] e [Stewart, 2014, cap. VIII]). A questo proposito, la caduta dei gravi può essere un modo ragionevolmente semplice per approcciarsi a questioni come queste aprendo orizzonti più ampi.

5 Caduta e velocità limite

Esaminando la questione con occhi moderni, sin dagli insegnamenti scolastici si apprende che la caduta nel vuoto di una massa m da un'altezza h avviene con accelerazione costante, raggiungendo al suolo una velocità $v = \sqrt{2gh}$. Si tratta, come acutamente intuito da Galileo, di una velocità indipendente dalla massa del grave. Tuttavia, se il grave cade in un mezzo resistente le cose si complicano alquanto. Se indichiamo con η il coefficiente di *viscosità* del mezzo, in *regime laminare*, dopo una *breve* fase transitoria, esso si muove di moto rettilineo uniforme con una *velocità limite* $v_L = \frac{mg}{k}$, dove k è una costante che dipende dalla resistenza del mezzo (viscosità) e dalla geometria del corpo. Per una sfera di massa m e raggio r , la cosiddetta legge di Stokes fornisce uno dei risultati più conosciuti, ovvero una velocità di caduta $v_L = \frac{mg}{6\pi\eta r}$. Pertanto, nel caso di una sfera (in particolari condizioni di caduta in un mezzo fluido), il coefficiente geometrico di resistenza aerodinamica vale $6\pi r$. Più in generale, per corpi di forma qualsiasi e in condizioni generali risulta molto difficile determinare una formula esplicita per il coefficiente geometrico di resistenza aerodinamica, che però risulta, anche in *regime turbolento*, proporzionale alla sezione trasversale del corpo alla direzione del moto. Ad ogni modo, la velocità di caduta, se identificata con la velocità limite, come assumevano gli aristotelici, dipende effettivamente dalla massa e gli oggetti più pesanti cadono davvero più velocemente di quelli leggeri. Inoltre, nella meccanica dei continui, nulla vieta di immaginare mezzi omogenei che oppongano resistenza al moto decrescente e via via sempre più piccola. Se il vuoto rappresenta un tale mezzo con resistenza nulla al movimento, allora la velocità di caduta aumenterebbe senza limite, ovvero $\lim_{k \rightarrow 0^+} v_L = +\infty$. Di conseguenza, continuando a seguire le argomentazioni di stampo aristotelico, il vuoto non potrebbe esistere e, per inciso, nemmeno un *etere cosmico* che non opponga *nessuna* resistenza al moto. In particolare, la caduta newtoniana nel vuoto non si potrebbe in tal caso ottenere ragionando per continuità rispetto al mezzo, sebbene questi due modelli di caduta (nel vuoto o in un mezzo resistente) siano entrambi ottenuti dalle equazioni della meccanica newtoniana stessa. Evidentemente, ci dev'essere ancora qualche elemento rilevante o qualcosa di nascosto in queste modellizzazioni del moto di caduta che meritano un ulteriore approfondimento. A complicare la faccenda concorre il fatto che l'argomento di Galileo

del *congiungimento* può effettivamente non funzionare per la caduta in un mezzo resistente. In effetti, abbiamo appurato che è importante considerare il fatto che la costante k che compare nella velocità di caduta dipende dalla geometria del corpo, come detto essenzialmente dalla sezione trasversale alla direzione del moto di caduta. Consideriamo per esempio due cubetti identici di massa m che cadono uno a fianco dell'altro con una faccia parallela al suolo (figura 1 e figura 2). In tal caso possiamo assumere che sia $k = aL^2$, dove L rappresenta la lunghezza del lato del cubo. Congiungiamo quindi i due cubetti lungo due facce perpendicolari al suolo, assumendo che il filo (o colla) impiegato possa essere scelto talmente *piccolo* da contribuire con un effetto arbitrariamente piccolo sia sulla massa che sulla resistenza aerodinamica del corpo risultante. Per fissare le idee, si potrebbe pensare a un filo costituito da un cilindretto omogeneo di raggio ε , lunghezza l e densità d . Allora la massa del corpo complessivo formato dai due cubetti e dal cilindretto è pari a $2M + dl\pi\varepsilon^2$, mentre la resistenza aerodinamica diventa $K_\varepsilon = 2aL^2 + 2l\varepsilon$ (la sezione trasversale del cilindro è un rettangolo). Ad ogni modo, i dettagli tecnici su come sia effettivamente realizzato il collegamento tra i cubetti non è fondamentale. Ciò che conta è osservare che è possibile scegliere il collegamento in modo tale che un contributo infinitesimo ε alla massa corrisponda ad un contributo infinitesimo anche alla resistenza aerodinamica, ovvero a una funzione continua $h(\varepsilon)$ tale che $h(0) = 0$. Ribadiamo ancora una volta l'essenzialità di operare con una funzione $v_L = v_L(r, m)$ continua rispetto a entrambe le variabili (resistenza del mezzo e massa del grave). Dunque, congiungendo i due cubetti si otterrà un corpo risultante di massa $M_\varepsilon = 2m + \varepsilon$ e costante $k_\varepsilon = 2aL^2 + h(\varepsilon)$. Pertanto, omettendo per brevità la dipendenza dalla resistenza del mezzo, $v_L(M_\varepsilon) = \frac{M_\varepsilon g}{k_\varepsilon} = \frac{(2m+\varepsilon)g}{2aL^2+h(\varepsilon)}$ da cui

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v_L(M_\varepsilon) = \frac{mg}{aL^2} = v_L(m). \quad (5)$$

Questa uguaglianza mostra che, in un mezzo resistente, la velocità di caduta non è necessariamente strettamente crescente rispetto alla massa, rendendo il modello aristotelico più difficile da formulare, dovendo tener conto anche della geometria dei gravi in caduta. Il fenomeno rilevato nella relazione (5) dipende essenzialmente dal fatto che, congiungendo *orizzontalmente* i due cubetti di massa m , si raddoppia la massa ma allo stesso tempo anche la sezione trasversale, e i due effetti si compensano esattamente. Pertanto, cadendo uno accanto all'altro, la velocità di caduta rimane invariata nonostante il collegamento, cosa che simmetricamente rende anche il modello galileiano bisognoso di precisazioni ulteriori, giacché in questo contesto l'argomento del *collegamento* fallisce. Osserviamo inoltre che la relazione (5) non significa che la velocità di caduta sia indipendente dalla massa. Essa infatti può aumentare in configurazioni diverse da quella *orizzontale*, per esempio congiungendo i cubetti lungo facce parallele al suolo (figura

2). In tal caso i due effetti non si compensano più in quanto il coefficiente aerodinamico resta invariato ma la massa aumenta, producendo così una velocità di caduta maggiore, similmente a quanto può fare un paracadutista in discesa libera per rallentare o accelerare la sua discesa prima di aprire il paracadute.

La battaglia, per così dire, tra il modello di matrice aristotelica e galileiana su cosa accadrebbe nel vuoto resta ancora aperta, sebbene entrambi i contendenti abbiano conseguito dei punti a loro favore. Perché allora talvolta si sostiene che il modello aristotelico sia semplicemente sbagliato e quello galileiano corretto? Cosa c'è ancora che non va? E come ha fatto Galileo a intuire una caduta indipendente dalla massa quando le evidenze empiriche potevano essere contrarie o al più neutre al riguardo? In effetti, sono occhi matematici quelli che in fondo consentono di vedere ciò che non poteva (ancora) essere visto. Galileo infatti utilizzava pendoli e piani inclinati per *rallentare* la caduta, metodi che gli aristotelici potevano giudicare *violenti*, in opposizione ai moti *naturali* di caduta verticale in un mezzo resistente. Nella prospettiva galileiana, il ruolo della resistenza del mezzo è quello di smorzare le oscillazioni del pendolo. Nel vuoto Galileo poteva immaginare che il pendolo potesse continuare ad oscillare indefinitamente raggiungendo sempre la stessa altezza. Poiché il tempo di oscillazione (per *piccole* oscillazioni) non dipende dalla massa (anche questo un fatto più teorico che sperimentale a quei i tempi) allora, tenuto conto del carattere vettoriale del moto, lo stesso deve accadere per la caduta, quale componente verticale del moto oscillatorio. In termini moderni, se h corrisponde all'altezza di caduta del pendolo, nel punto più basso la conservazione dell'energia conduce a

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}, \quad (6)$$

nell'ipotesi in cui le masse (inerziali e gravitazionali) coincidano (come accade col *principio di equivalenza* nella teoria della relatività) permettendo di semplificare la massa m nella relazione (6). Un altro espediente per *rallentare* il moto utilizzato da Galileo è l'utilizzo di un piano inclinato di altezza h e inclinazione α . Trascurando gli attriti, lo spazio percorso lungo il piano segue la legge dei quadrati dei tempi (moto uniformemente accelerato) dimostrata da Galileo stesso. In termini moderni $s = \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2$. Essendo poi $v = g \sin(\alpha)t$ e $s \cdot \sin(\alpha) = h$, combinando le equazioni si ottiene

$$v = g \sin(\alpha) \sqrt{\frac{2s}{g \sin(\alpha)}} = \sqrt{2sg \sin(\alpha)} = \sqrt{2gh}. \quad (7)$$

Lo studio della caduta dei gravi sembra allora portare a conclusioni opposte tra loro: la velocità di caduta dipende o non dipende dalla massa? È possibile armonizzare in qualche modo le posizioni galileiane e aristoteliche sulla caduta dei

gravi che, pur partendo da concezioni comuni, appaiono in diversi punti così inconciliabili tra loro? Il punto nodale della questione riguarda a nostro avviso le ipotesi e le assunzioni, talvolta implicite, che ogni modello matematico porta con sé. Questo aspetto è cruciale in qualsiasi descrizione scientifica della natura. Discrepanze tra modelli e fatti empirici o teorici, oppure tra diversi modelli, costringono gli scienziati a un continuo affinamento della conoscenza scientifica, sia dal punto di vista sperimentale che da quello teorico. A tal proposito abbiamo già discusso del problema relativo alle assunzioni implicite nei modelli sulla *continuità*. Ma forse c'è ancora dell'altro a cui guardare con più attenzione. Riprendendo l'argomento aristotelico così come esposto da E. Bellone, troviamo che la velocità di caduta è considerata costante tranne che per una brusca fase iniziale, ritenuta transitoria e irrilevante, e che di conseguenza viene trascurata. Qui forse si annida ancora una questione che può essere rilevante: siamo davvero sicuri che la brusca fase iniziale di accelerazione possa essere trascurata? L'esistenza di questa fase transitoria poteva essere desunta direttamente dalle osservazioni, ma anche dai principi primi aristotelici. Immaginiamo un grave che, muovendosi per esempio dall'aria all'acqua, oppure appoggiato sul pelo dell'acqua e poi lasciato andare, passi da una velocità iniziale a quella finale di caduta nell'acqua. Tenuto conto del *natura non facit saltus*, questo passaggio non può avvenire in maniera improvvisa ma attraverso una fase transitoria in cui la velocità passa gradualmente da quella iniziale a quella finale. Il problema è allora il seguente: quanto può essere rilevante questa fase transitoria? In effetti, questo processo graduale del moto nel raggiungimento della velocità limite che fa da sfondo alle argomentazioni aristoteliche potrebbe anch'esso dipendere dal mezzo e magari, man mano che il mezzo diventa sempre più rarefatto, la velocità limite potrebbe essere raggiunta sempre più tardi, e infine divergere, al raggiungimento (asintotico) del vuoto, solo per un tempo infinito. In altre parole, la presunta velocità infinita di caduta nel vuoto potrebbe anche essere in realtà un infinito potenziale anziché attuale. Allora un esame più attento al modello matematico soggiacente è ciò che ci vuole, anche se richiede strumenti più sofisticati per essere discusso. Affidandoci alla potenza del calcolo differenziale, nel caso di una forza di attrito della forma $F = kv$, si può dimostrare che la soluzione dell'equazione differenziale del moto ha per soluzione

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0 \right) e^{-\frac{kt}{m}}. \quad (8)$$

La velocità dipende quindi dalla massa, ma in modo piuttosto più complicato rispetto a quanto gli aristotelici potessero immaginare. Inoltre, una velocità costante si realizza rigorosamente solo (asintoticamente) a lungo andare, ovvero

$$v_L = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k}. \quad (9)$$

A questo punto segue ancora che la velocità (limite) di caduta diverge rispetto al

mezzo che opponga resistenza al moto sempre più piccola. Ovvero

$$\lim_{k \rightarrow 0} v_L = \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = +\infty \quad (10)$$

La velocità di caduta pertanto diventa *infinita* in uno spazio vuoto solo asintoticamente. Si tratta quindi effettivamente di un *infinito potenziale*. In questo contesto, il modello di caduta aristotelico risulta compendiato dai passaggi al limite esplicitati nella relazione (10), considerando dapprima la velocità in un mezzo resistente e poi immaginando di considerare il vuoto come mezzo di resistenza che tende a zero. Il punto di vista implicito nella trattazione galileiana corrisponde invece a modificare l'ordine logico delle operazioni: prima considerando lo spazio vuoto e poi valutando la velocità in esso.

Precisamente, riarrangiando l'espressione della velocità di caduta nella relazione (8) si ottiene

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) + v_0 e^{-\frac{kt}{m}}. \quad (11)$$

Risolvere qualche limite notevole, per $k \rightarrow 0$ si ha

$$v(t) \approx \frac{mg}{k} \cdot \frac{kt}{m} + v_0 = v_0 + gt,$$

ottenendo una velocità (moto uniformemente accelerato) indipendente dalla massa. Pertanto, l'usuale legge di moto uniformemente accelerato nel vuoto, con conseguente velocità di caduta indipendente dalla massa, si può ottenere effettivamente per continuità rispetto al mezzo. Considerando l'ulteriore limite si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow 0} v(t) = +\infty. \quad (12)$$

Come accennato, il modello di caduta galileiano risulta invece compendiato dai passaggi al limite esplicitati nella relazione (12), considerando dapprima la velocità nel vuoto e poi la velocità limite asintotica. In particolare, in entrambi i casi, sia nel modello aristotelico che in quello galileiano, la velocità di caduta diverge nel *vuoto*, ma soltanto quando il tempo cresce *all'infinito*. Le *divergenze d'opinione* sono allora da rilevarsi nell'ordine in cui è utilizzata la continuità. Prima rispetto al tempo e poi rispetto al mezzo per l'approccio aristotelico, mentre in quello galileiano si procede prima rispetto al mezzo e poi rispetto al tempo. Tra le proprietà delle funzioni continue compare proprio quella che assicura che l'ordine di passaggio al limite non è rilevante, e quindi è possibile scambiare l'ordine dei due limiti senza alterare il risultato finale. In questo senso, a meno di incertezze e incongruenze nei dettagli tecnici intermedi necessari per una piena giustificazione, i due modelli convergono sullo stesso risultato proprio

a causa della continuità, consentendo, alla luce di analisi matematiche più avanzate, una seppur parziale armonizzazione tra queste due descrizioni contrapposte dello stesso fenomeno naturale. La ricomposizione delle previsioni di questi diversi modelli di caduta ci ha portato a riguardare con più attenzione cosa possa o non possa essere considerato *fisicamente trascurabile*, portando alla questione più profonda del ruolo giocato dalla matematica nella descrizione della realtà. L'interrelazione continua tra matematica-fisica-realtà ci ha portato ad apprezzare la profondità dell'indagine scientifica della natura anche per un fenomeno così abituale come quello della caduta di un grave.

References

- E. Bellone. *Galileo e l'abisso. Un racconto*. Codice Edizioni, 2009.
- G. Galilei. *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze*. 2009. URL <http://www.fmboschetto.it/didattica/DimostrazioniMatematiche.pdf>.
- L. Granieri. Mathematics is a science! *Science & Philosophy, Journal of Epistemology, Science and Philosophy*, 7(2):113–124, 2019. doi: <http://dx.doi.org/10.23756/sp.v7i2.488>.
- L. Granieri. Continua senza limiti. *Periodico di Matematiche, Mathesis*, 98(1-2): 45–62, 2022.
- T. Khun. *La Rivoluzione Copernicana*. Einaudi, 2000.
- I. Stewart. *I grandi problemi della matematica*. Einaudi, 2014.
- I. Stewart. *I numeri uno*. Einaudi, 2018.