

Il Concetto di Numero nei Libri di Testo del Regno d'Italia: Indagini su un Particolare “Numero Complesso”

(The Concept of Number in the Textbooks of the Kingdom of Italy: Investigations into a Particular “Complex Number”)

Silvia Cerasaro¹

Abstract

From the arithmetic books of the schools of the Italian peninsula we can see complex numbers, different from imaginary ones. A complex number is a number accompanied by a unit of measurement, with submultiples not in decimal relation. After the introduction of the new system of weights and measures, the teaching of these numbers remains to help in the conversion. The procedures described by mathematicians who deal with complex numbers find their origin in a fraction described by Fibonacci in *Liber Abbaci*. It conveys a dynamic meaning of fraction on the number line, which has gradually fallen into disuse. This fraction, unlike complex numbers, was simple to interpret thanks to its symbolic formalism, which disappeared after the invention of printing, but was described in words in the books of subsequent centuries. Complex numbers were taught and learned in Italian schools until the ministerial programs of the 1923 Reform remained in force. Attention will be given to the historical context of the didactic uses of mathematical concepts, with the aim of arousing the epistemological reflections that usually derive from the use of history in mathematics education.

Keywords: complex number, graduated multiple fraction²

¹ Università Tor Vergata di Roma, Italia; cerasaro@axp.mat.uniroma2.it.

² Received on April 9, 2025. Accepted on June 1, 2025. Published on June 30, 2025.

DOI: 10.23756/sp.v13i1.1681. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765. ©Cerasaro.

This paper is published under the CC-BY licence agreement.

Sunto

Dai libri di aritmetica delle scuole della penisola italiana prima dell'Unità possiamo osservare i numeri complessi, diversi da quelli immaginari. Un numero complesso è un numero accompagnato da un'unità di misura, con sottomultipli non in rapporto decimale. Dopo l'introduzione del nuovo sistema di pesi e misure, l'insegnamento di questi numeri rimane per facilitare la conversione. Le procedure descritte dai matematici che si occupano di numeri complessi trovano la loro origine in una frazione descritta da Fibonacci nel Liber Abbaci. Essa trasmette un significato dinamico di frazione sulla retta numerica, che è gradualmente caduto in disuso. Questa frazione, a differenza dei numeri complessi, era semplice da interpretare grazie al suo formalismo simbolico, scomparso dopo l'invenzione della stampa, ma fu descritta a parole nei libri dei secoli successivi. Dopo l'Unità d'Italia, i numeri complessi furono insegnati e appresi nelle scuole italiane fino a quando i programmi ministeriali della Riforma del 1923 rimasero in vigore. Si darà attenzione al contesto storico degli usi didattici dei concetti matematici, con l'obiettivo di suscitare le riflessioni epistemologiche che solitamente derivano dall'uso della storia nella didattica della matematica.

Parole chiave: numero complesso, frazione multipla graduata.

1. Introduzione

Nelle definizioni 1 e 2 del settimo libro degli Elementi di Euclide, sono date le definizioni di unità e di numero: «*L' unità è ciò in virtù del quale ciascuna delle cose esistenti è detta uno*» e «*Un numero è una molteplicità composta di unità* » [Acerbi, 2007]. Sfogliando i testi didattici di matematica in uso nella penisola italiana nel diciottesimo e diciannovesimo secolo, si nota la definizione di un'altra tipologia di numero seguita dalla trattazione delle relative operazioni aritmetiche: questi numeri sono denotati come “numeri complessi”, che non corrispondono a quelli che oggi definiamo in tal modo. Nel dizionario a cura di Pagliani e Boccardo [1883] si definisce numero complesso *quello che è composto di interi e frazioni*. Inoltre si legge che «*Le quantità che soglionsi più comunemente rappresentare con numeri complessi sono le monete, le distanze, le superficie, i volumi, le lunghezze circolari, il tempo. Ad esempio, 20 lire, 2 soldi e 3 denari(...) Per eseguire le quattro operazioni dell'aritmetica su questa specie di numeri si richiedono regole particolari e differenti da quelle relative ai numeri astratti e ai numeri complessi decimali. È però facile ridurre ogni numero complesso in un numero decimale equivalente*» [Pagliano & Boccardo, 1883, pp.727-728]. Si deduce che il numero complesso a cui si fa riferimento è descritto come un numero legato ad una specifica unità di misura, con

Il concetto di numero nei libri di testo del Regno d'Italia: indagini su un particolare "numero complesso"

cui poter fare tutte le operazioni, come si evince anche dai numerosi esempi e definizioni riportate nel testo considerato.

Negli stessi testi didattici, un numero è classificato come "astratto", corrispondente al numero "puro", o "concreto" se accompagnato da una unità di misura. Tale distinzione era presente già dai testi del 1500 ispirati ai trattati d'abaco, di cui si parlerà in seguito.

Un numero complesso è un particolare numero concreto, composto da sub unità non necessariamente in relazione decimale.

La "nuova" definizione di numero complesso, quella che conosciamo oggi, è stata descritta da Burali-Forti [Burali-Forti, 1917], della scuola di Peano in un apposito articolo: un numero complesso è un numero scritto nella forma $a+bi$, dove a e b sono numeri reali, e i è l'unità immaginaria che soddisfa la condizione $i^2 = -1$.

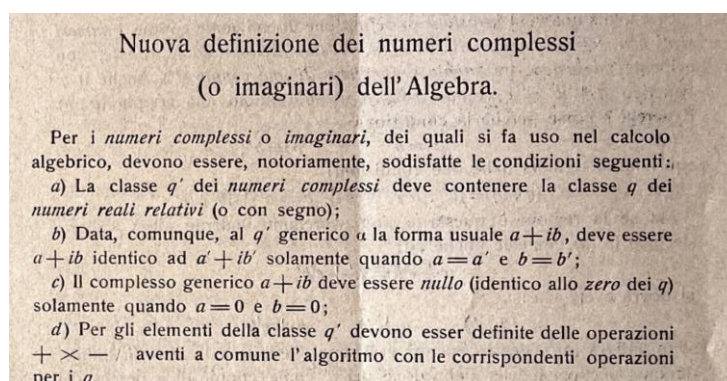


Figura 1: Dall'articolo di Burali-Forti, 1917, p.1.

2. I numeri complessi e le unità di misura.

Ferreira e Schubring [2022] hanno condotto delle ricerche sul numero complesso, come descritto in precedenza: essi affermano che tale numero comparve per la prima volta in Francia nel diciottesimo secolo, ed in altri testi in Portogallo, Brasile, Italia e Spagna, ma non in Germania. I due studiosi analizzano, in particolare, la moltiplicazione tra due numeri complessi, in contrasto con quella euclidea: quest'ultima si presenta come una somma ripetuta³ di grandezze omogenee e identiche mentre la definizione di

³ Il prodotto tra due numeri è presente nella Definizione VII.15 degli Elementi di Euclide: *Si dice prodotto di un primo numero per un secondo numero, il numero che si ottiene sommando il secondo tante volte con sé stesso quante sono le unità di cui è composto il primo.* Quindi, il prodotto n per a è $a+a+...+a$ (n volte) dove l'ordine dei fattori è essenziale. La proprietà commutativa del prodotto non è implicita ma si dimostra nella proposizione VII.16 sfruttando altre proposizioni. Questo fa intendere che il concetto di numero in Euclide non è del tutto distinto dal concetto di grandezza, tanto che nei diagrammi presenti nell'opera è segnato come se fosse un segmento. Quindi moltiplicare n per a vuole dire "disegnare" n volte un segmento a , che non vuole dire moltiplicare a per n , in quanto quest'ultimo indica a volte un segmento n . Accade, però, e infatti lo dimostra, che i segmenti risultati da questi prodotti siano uguali.

moltiplicazione data da Cartesio aggira l'ostacolo della omogeneità tra grandezze sfruttando la similitudine e la proprietà fondamentale delle proporzioni [Ferreira & Schubring, 2022]. Cartesio moltiplica le grandezze⁴, contrariamente a quanto accade negli *Elementi* di Euclide, sfruttando una proporzione con il primo proporzionale uguale all'unità, idea sostenuta da Salimbeni⁵ secondo il quale la definizione di moltiplicazione di Euclide è solo per i numeri. In base a tale definizione, Salimbeni affermò che la moltiplicazione di due quantità risulta in un prodotto omogeneo con il moltiplicando: poiché per questa considerazione la dimensione del prodotto cambia al variare dell'ordine di moltiplicazione dei due fattori, egli rivendicò esplicitamente e con orgoglio la non commutatività della moltiplicazione delle quantità [Ferreira & Schubring, 2022].

Dopo l'introduzione del nuovo sistema dei pesi e delle misure avviata dall'Académie des Sciences di Parigi, la relazione tra i vari multipli e sottomultipli delle unità di misura principali seguirono le potenze di 10. Nella penisola italiana convivevano una moltitudine di unità di misura non decimali, che gradualmente, e con alcune difficoltà, vennero sostituite. Divenne fondamentale alfabetizzare la popolazione in merito, a partire dalla scuola elementare, che doveva prevedere l'insegnamento del calcolo decimale e introdurre il nuovo sistema. A tale scopo, vennero modificati i libri di testo, dando le regole delle principali operazioni aritmetiche sulle frazioni decimali e fornendo le istruzioni per il passaggio dalle vecchie alle nuove misure e viceversa [Borgato, 2006].

Molte delle considerazioni sulla presenza dei numeri complessi nei libri di testo e nella didattica saranno prese in esame in questa discussione in quanto riportate nei libri di cui si parlerà.

3. Testimonianze sulla presenza dei numeri complessi nei testi della penisola italiana.

Come affermato da Pepe [2006], l'Unità d'Italia ha segnato un momento di discontinuità sia sul piano dell'ordinamento scolastico, sia su quello dei programmi, in particolare per la matematica: si riscontrò originalità, nonostante l'influenza del modello francese.

La Penisola italiana era politicamente divisa in tre territori: Impero Francese, autonomo dal punto di vista dell'istruzione, con testi tradotti dalle opere dei propri studiosi; Regno d'Italia, con una struttura propria per l'istruzione (ginnasi, Licei ed Università), in cui furono attivi e innovatori Betti, Brioschi e Cremona; Regno di Napoli, nel quale si diffusero gradualmente i licei, come nel Regno d'Italia, e dove vennero

⁴ Euclide non moltiplica mai una grandezza per un'altra, azione sostenuta, invece, dalle interpretazioni "algebriche" degli *Elementi* di Euclide, definite "anacronistiche" o addirittura errate da Grattan-Guinness (1996), pp. 355-375

⁵ Leonardo Salimbeni (Spalato, 1752 – Verona, 1823) è stato un ingegnere e matematico italiano. Fu uno degli studiosi di scienza delle costruzioni e di ingegneria militare, in qualità di direttore della scuola di ingegneria militare di Verona. Ha studiato anche argomenti di geometria, meccanica e dinamica.

*Il concetto di numero nei libri di testo del Regno d'Italia: indagini su un particolare
“numero complesso”*

reintrodotti gli *Elementi* di Euclide per lo studio della geometria prima della riforma di Betti e Brioschi [Pepe, in Giacardi, 2006].

La rivoluzione francese aveva portato grandi novità in campo scolastico e culturale: l'Académie des Sciences di Parigi, sostenuta dall'Assemblea Nazionale Francese, voleva stabilire una unità naturale delle misure e dei pesi. Nella penisola italiana la Repubblica Cisalpina fu coinvolta nella diffusione del nuovo sistema [Borgato, 2006]: divenne fondamentale insegnare già dalle scuole elementari il calcolo decimale e vennero redatti nuovi testi per far conoscere il nuovo sistema, diffonderlo e permettere il passaggio dal vecchio al nuovo e viceversa. Anche nel resto della penisola italiana si diffusero saggi con lo stesso obiettivo: nel Regno di Napoli, ad esempio, era adottato il *Saggio di un corso di matematica per uso della reale Scuola Politecnica Militare* del 1815: il primo tomo riguardava l'aritmetica ed era redatto da Giovanni Rodrigues che prese in considerazione i numeri interi, le frazioni, le frazioni decimali ed i numeri complessi o grandezze non decimali, come gradi, misure del tempo, monetazione non decimale, oltre ai sistemi di misura e alla regola del tre [Pepe, in Giacardi, 2006]. Un altro dei testi che divulgò il nuovo sistema dei pesi e delle misure e accompagnò il graduale passaggio fu *Elements di Arithmétiques* di Bourdon del 1836, nel quale, in un capitolo dedicato, compare la seguente definizione di numero complesso: «*on appelle nombre complexe tout nombre concret qui est décomposé en plusieurs parties rapportées respectivement à des unités différentes*» [Bourdon, 1836, p. 93]. Uno dei traduttori dell'opera fu Francesco Villa del 1856 e venne adottata presso l'Università di Pavia. È interessante ciò che si può leggere in merito alla motivazione della trattazione dei numeri complessi; Bourdon riportò le motivazioni didattiche della sua scelta. «*La teoria dei numeri complessi, che forma l'oggetto di questo capitolo, ha perduto, bisogna confessarlo, un poco della sua importanza, dopo l'introduzione del sistema decimale dei pesi e delle misure. Ciò nonostante, abbiamo creduto di esporla con uno sviluppo pari a quello che gli si dava nelle opere antiche, perché la riputiamo molto adattata a famigliarizzare i giovani colla considerazione delle frazioni, ed a dar loro quell'abitudine di conteggio, che non si potrebbe raccomandare loro abbastanza di procurarsi. D'altronde, la complicazione dei conteggi che questa teoria porta con sé, farà sempre più risaltare il vantaggio del nuovo sistema dei pesi e delle misure sull'antico*» [Villa, 1856, p. 69].

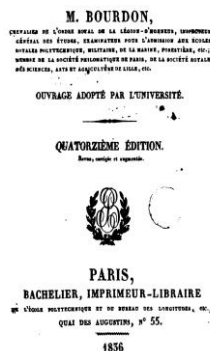


Figura 2: Copertina dell'opera di Bourdon

La motivazione pedagogica data dagli studiosi dell'epoca sarà maggiormente compresa quando si parlerà delle radici storiche del numero complesso. Continuando a leggere, vengono descritti altri tipi di numeri a cui si è fatto riferimento sino ad ora, cioè i numeri concreti ed i numeri astratti [Villa, 1856].

«Quando nell'enunciare un numero, si aggiunge all'enunciato il nome che indica la specie di grandezza della quale si tratta, questo numero si chiama concreto. Così, cinque metri, quindici ore, sei leghe, sono numeri concreti. La prima volta che si pronuncia un numero, non si può attaccarvi un'idea, senza rappresentarsi alla mente un'unità di una certa specie, alla quale si paragona un'altra grandezza della medesima specie. Ma a poco a poco lo spirito, che si avvezza alle astrazioni, arriva a rappresentarsi una collezione di più oggetti simili, ma senza specializzarne la natura, e dei quali ciascuno è una unità. In tal caso la collezione chiamasi numero astratto, perché enunciandola si fa astrazione dalla specie di unità dalla quale si riporta» [Villa, 1856, p. 2]. Queste definizioni, formulate in maniera simile, erano presenti anche in altri testi, come ad esempio *Elementi di Aritmetica* di Fedele Amante [Amante, 1852]. In particolare, nel testo di Rocco, nel terzo capitolo del quinto libro, si distingue tra numero complesso ed incompleto: oltre a descrivere come passare da un numero complesso ad una frazione principale, sono riportate le operazioni, da svolgere sia dopo aver trasformato il complesso in frazione principale, sia “senza usare i denominatori”, cioè lasciando i numeri scritti in forma complessa [Rocco, 1849]. L'autore sottolinea, nella definizione 497, le difficoltà che possono riscontrarsi nello svolgere la moltiplicazione e divisione di numeri complessi: si paragona la moltiplicazione a quella geometrica, dove il prodotto non è una grandezza necessariamente omogenea ad entrambi i fattori⁶. Dunque, diventa interessante vedere come è dimostrata la non commutatività della moltiplicazione tra numeri concreti, in particolare tra complessi, facendo riferimento alla traduzione di Villa [1856], ispirata a quella del testo di Bourdon [1836]: si procede mostrando degli esempi numerici che permettono di comprendere l'attribuzione dell'aggettivo complesso a tale tipo di numero. Sono considerate le unità di misura delle monete (1 lira, formata da 20 soldi, 1 soldo formato da 12 denari) e della lunghezza (1 braccio, formato da 12 once, ed un'oncia formata da 12 piedi). Il prodotto di 27 lire 15 soldi 6 denari per 31 braccia 10 once 6 piedi fa 885 lire 6 soldi $6\frac{6}{8}$ denari.

Cambiando l'ordine dei fattori, si ottiene un altro risultato: infatti 31 braccia 10 once 6 piedi per 27 lire 15 soldi 6 denari fa 885 braccia 3 once $11\frac{1}{4}$ piedi.

Il risultato ottenuto fa concludere che non vale la proprietà commutativa della moltiplicazione tra i numeri concreti complessi, anche se dal punto di vista numerico il risultato è lo stesso. Infatti $27\frac{31}{40}$ lire per $31\frac{7}{8}$ braccia dà come risultato $885\frac{21}{64}$ lire, mentre $31\frac{7}{8}$ braccia per $27\frac{31}{40}$ lire dà come risultato $885\frac{21}{64}$ braccia.

In merito, Villa scrive:

⁶ in continuità con le affermazioni di Salimbeni riportate nell'articolo di Ferreira, 2022, p. 125

*Il concetto di numero nei libri di testo del Regno d'Italia: indagini su un particolare
"numero complesso"*

«...i due fattori della moltiplicazione sono gli stessi (...) e ciò nonostante si sono ottenuti due risultati i quali differiscono l'uno dall'altro, se non per l'intero che vi entra, almeno per la natura dell'unità principale, e per le suddivisioni di questa unità. Per il principio (...) "si può invertire l'ordine dei fattori di un prodotto, senza alterare il prodotto", non sembra vero che pei numeri astratti. Per vedere che questo principio è applicabile al caso di due numeri complessi, bisogna immaginare che ciascuno di questi numeri venga ridotto in un solo numero frazionario dell'unità principale che gli corrisponde; allora i due numeri che si otterrebbero invertendo l'ordine dei fattori, sarebbero uguali (...) Risulta (...) che, ogni qual volta si considerano dei numeri concreti, il «prodotto ed il moltiplicando devono essere della medesima natura»; mentre il moltiplicatore (...) deve essere considerato come un numero astratto che indica quante volte si deve ripetere il moltiplicando» [Villa, 1856, p. 86].

Continuando la nostra discussione sui testi che permisero la diffusione del nuovo sistema di pesi e delle misure a Milano ricordiamo gli *Elementi d'Algebra e Geometria* di Brunacci: la prima parte tratta di Elementi di Aritmetica e nel secondo capitolo si parla dei numeri rotti, ovvero delle frazioni, e a pagina 43 di *altri rotti* non utilizzando, però, la definizione di numero complesso, parlando nella definizione 72 di operazioni "con specie non decimali" [Brunacci, 1853, p. 45].

Bertrand scrisse il suo *Trattato di Aritmetica* nel 1856, che venne tradotto da Giovanni Novi: nell'"Avvertimento del Traduttore" Novi scrive: «Nel Capitolo delle Misure abbiamo esposto il calcolo dei numeri così detti complessi, che non formava parte del testo francese...Questi mutamenti ci sono stati consigliati dalle non lievi differenze che sono fra l'istruzione pubblica in Francia e presso di noi...⁷E debito di giustizia l'avvertire che abbiamo tratto profitto dai Trattati di Aritmetica di Serret e di Amante» [Novi, 1852]. Nella trattazione di tali numeri, Novi non li denomina mai complessi, ma li chiama, internamente alle differenti spiegazioni, "numeri proposti".

Dopo l'unificazione dei territori italiani, l'organizzazione dell'istruzione nella penisola italiana seguì quanto era già in vigore nel Regno d'Italia. In particolare, dopo diverse collaborazioni fruttuose di Brioschi, Casorati e Betti con alcuni matematici europei, vennero rinnovati i manuali scolastici [Tazzioli, 2011]. Nel 1867, Cremona ideò il Decreto Coppino e formulò i nuovi programmi, ripristinando lo studio della geometria euclidea nel ginnasio e nei Licei: furono Betti e Brioschi a curare gli *Elementi* di Euclide per i Licei, editi da Le Monnier di Firenze [Pepe, in Giacardi, 2006]. Inizialmente, ci fu una polemica internazionale sull'utilizzo di tale testo a scuola, seguita invece dalla traduzione dei testi italiani all'estero. Agli inizi del Novecento cominciò ad emergere anche l'idea di laboratorio di matematica, in particolare nel 1908 a Roma si tenne il Quarto Congresso Internazionale dei Matematici, nacque l'ICMI, la Commissione Internazionale per l'Insegnamento secondario, presieduta da Klein: la sezione didattica era molto ricca, organizzata da Vailati, allievo di Peano, che ideò una riforma scolastica nella quale era coinvolto l'uso del laboratorio, sostenuta anche da Guido Castelnuovo,

⁷ La penisola italiana, appena unificata, aveva esigenza di uniformare i differenti sistemi di misure presenti nel Regno.

che però non venne varata [Giacardi, 2011]. Sui libri scolastici erano ancora presenti i numeri complessi perché previsti dai Programmi d’Insegnamento, o, comunque, se non erano espressamente nominati, si alludeva alla stessa classificazione dei numeri che veniva descritta nei testi precedenti l’Unità d’Italia. Ad esempio, nel *Compendio di aritmetica per le scuole elementari* di Pagnini, relativamente alla classe quarta della scuola primaria, alla domanda “Quante specie di numeri esistono?” corrisponde, tra le varie risposte, “Numero frazionario o misto dicesi quello che contiene una o più unità o diverse parti dell’unità”, seguita da una domanda sulle definizioni di numeri concreti, astratti, omogenei ed eterogenei. Compare anche la domanda “Che cos’è l’Aritmetica?”, la cui risposta è “la scienza dei numeri” [Pagnini, 1875, p. 4], diversamente da quanto riteneva Lagrange in passato, secondo il quale l’aritmetica era “la scienza del calcolo” [Wang, 2022, p. 148]. I riformatori per l’insegnamento della matematica auspicavano una metodologia deduttiva e dimostrativa, soprattutto per l’aritmetica mentre l’algebra veniva considerata una sorta di aritmetica universale, ispirata ai testi di Bertrand, ancora in uso in Italia.

Nei programmi previsti dalla Riforma Gentile del 1923 era presente ancora il concetto di numero complesso: nell’art.1 dell’allegato B il programma d’esame di Licenza della Scuola Complementare per la prova orale di Aritmetica richiedeva la conoscenza dei numeri complessi, come anche per l’esame d’ammissione alla classe IV del Ginnasio, specificando di considerare solamente le misure degli angoli, degli archi e del tempo⁸. Le nuove idee di rinnovamento non sempre corrispondevano con quanto riportato nei testi scolastici, i quali necessitavano di essere rivisti. In questa atmosfera emerse la figura di Giuseppe Peano, che mostrò un profondo interesse nei confronti della didattica e della storia delle matematiche, invitando gli insegnanti a far riflettere gli studenti sui contenuti matematici proponendo la lettura della fonte diretta, in particolare di Euclide, Apollonio ed Archimede [Luciano, 2006]. Peano scrisse il trattato *Aritmetica generale e algebra elementare* nel 1902 nel quale, utilizzando molti simboli, discute l’aritmetica e la riordina: in particolare, nel capitolo “Applicazioni” nelle note che commentano la scrittura in simboli, parlando delle grandezze omogenee scrive: «Il rapporto di due grandezze omogenee è un numero reale e positivo o un «numero astratto». Così si indicano qualche volta i Q , in opposizione a “grandezza”, che dicesi anche “numero concreto”». [Peano, 1923]. Oltre a questa nota in cui si dà un altro nome al numero puro e che allude alla misura di una grandezza con la relativa unità, nel testo di Peano non è più presente l’aritmetica dei numeri complessi, come accade anche nelle altre sue opere. Le opinioni di Peano su come deve essere un buon manuale di aritmetica sono riportate nell’articolo *Sui libri di testo di Aritmetica nelle scuole elementari* [Peano, 1924], scritto a ridosso della relazione di L. Lombardo Radice e M. Cipolla. Peano incita l’uso dei simboli sin dalla scuola elementare, parlando di un’aritmetica redatta del Prof. Gerbaldi, pubblicata nel comune di Roma nel 1888 adottata con successo. In particolare, egli puntualizzò che i calcoli si fanno con i numeri e non con le grandezze e trovò una soluzione alla polemica che ne era nata facendo ritorno agli *Elementi* di Euclide, per

⁸ Gazzetta Ufficiale, 1923, n.267

Il concetto di numero nei libri di testo del Regno d'Italia: indagini su un particolare “numero complesso”

giustificare le operazioni di somma di lunghezze e di prodotto [Peano, 1924]. Se si analizza il libro *Psicoaritmetica* di Maria Montessori [Montessori, 1934], nel capitolo X relativo al sistema metrico decimale, è presente il paragrafo *Sistemi di misure non decimali*: non sono affatto riportati i numeri complessi ma nelle note a piè pagina, inserite per spiegare la relazione tra le monete in uso nel Regno Unito fino al 1971, che non seguivano il sistema decimale, è riportato: «è, questo, un esempio di misure “pluribasiche”, dette «complesse». I sottomultipli di tali misure di valore hanno base diversa (da quella decimale) e variabile» [Montessori, 1934, p. 429, nota 48]. Le note a tale testo sono state apportate nel 1971 da Camillo Grazzini, la cui formazione risaliva al periodo in cui i numeri complessi erano ancora presenti nei programmi ministeriali.

Con la riforma Bottai per la scuola media del 1940 i numeri complessi, di cui è stato discusso in questo articolo, non sono stati più citati nei documenti ministeriali, anche perché, come abbiamo già accennato, l'aggettivo “complesso” ormai era riferito ai numeri immaginari, ma è presente la trattazione delle “misure non decimali” senza specificare algoritmi specifici per questa tipologia di numeri.

4. L'origine dei numeri complessi

Avendo argomentato in merito alla presenza dei numeri complessi in molti libri scolastici adottati nella penisola italiana a partire dal Diciottesimo secolo, ci si chiede quale sia stata l'origine di questi numeri.

Abbiamo constatato che il numero complesso è un qualsiasi numero scomposto in più parti rispettivamente relative a diverse unità. I concetti di numero come parte o parti di un altro numero erano stati discussi negli *Elementi* di Euclide a partire dalle definizioni 3 e 4 del settimo libro⁹, che permettono di descrivere, nella definizione 20, il concetto di proporzione: «quattro numeri sono in proporzione se il primo è lo stesso multiplo o la stessa parte o le stesse parti del secondo che il terzo lo è del quarto» [Acerbi, 2007]. La teoria dei rapporti e delle proporzioni nel corso dei secoli sono state “adattate” al concetto di numero razionale. A tale fondata teoria si ispirò Leonardo Pisano Fibonacci nel suo *Liber Abbaci* [Boncompagni, 1857], utilizzando la stessa terminologia euclidea. Il seguente passo è tratto dal paragrafo V.3.

«Ancora se sotto una stessa linea siano stati posti più numeri, e sopra ciascuno di quegli stessi si scriveranno altri numeri, il numero che sia stato posto sopra il numero all'inizio della parte destra della linea, indicherà la parte o le parti del numero stesso posto sotto, come abbiamo già detto¹⁰. Quello dunque sopra il secondo esprime le parti dello stesso secondo delle parti del primo numero posto sotto. Quello poi sopra il terzo indica le parti di questo terzo delle parti del secondo delle parti del primo, e così sempre quelli che seguiranno sopra la linea denotano le parti di tutte le parti precedenti sotto la

⁹ VII.3 “Un numero è una parte di un numero, il minore del maggiore, quando misura il maggiore.” VII.4 “Ma parti quando non lo misura”.

¹⁰ Leonardo allude alla descrizione del numero rotto, cioè della frazione, presente nel paragrafo V.2.

linea, così, se sotto una qualche linea ci sono 2 e 7 e sopra il 2 ci sia 1 e sopra il 7 ci sia 4 come qui si vede $\frac{1}{2} \frac{4}{7}$, si denotano quattro settimi e la metà di un settimo. Se però sopra il 7 ci fosse zero, così : $\frac{1}{2} \frac{0}{7}$, si indicherebbe solo la metà di un settimo». [Traduzione di Boncompagni, 1857, p. 24, presente sul sito di Progetto Fibonacci¹¹].

Questa citazione rappresenta la descrizione di quelle che Leonardo Pisano denota con i termini *fractiones... in gradibus*, cioè frazioni “che sono in posizione”, nel paragrafo V.4 e che gli studiosi di Progetto Fibonacci hanno denominato “frazioni multiple graduate” e mi riferirò a questo concetto usando tale denominazione¹². Questa tipologia di frazione è usata molto spesso nel *Liber Abbaci*, sia nella parte dedicata alla trattazione dei concetti matematici, sia in quella in cui Leonardo tratta le problematiche relative alle questioni commerciali del suo periodo.

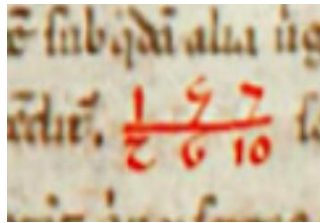


Figura 3: La frazione multipla graduata nel codice del Liber Abbaci conservato presso la Biblioteca Nazionale di Firenze, Conv. Soppr. C.1. 2616, ff. 1r-214r.

Una frazione multipla graduata di grado (o posizione) n indica una somma di n frazioni, definita come segue:

$$\frac{a_n}{b_n} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \dots \frac{a_2}{b_2} \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} b_n}, \text{ con } a_i \leq b_i, \text{ per ogni } i, \text{ e con } b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Dunque, una frazione multipla graduata è una somma progressiva di frazioni sempre più piccole nella quale ogni frazione successiva rappresenta un ulteriore frazionamento della precedente, suggerendo l'idea di una frazione in movimento sulla retta dei numeri. Il formalismo simbolico utilizzato da Fibonacci racchiude al suo interno un concetto matematico elevato ed elegante, che, però, non è descritto in dettaglio dal punto di vista tecnico, facendo intuire tante proprietà ed usi solo dai molti esempi riportati nel *Liber Abbaci*. Le frazioni multiple compaiono come soluzioni ai problemi risolubili con le proporzioni con un termine incognito (regola del tre, che presuppone l'esistenza del quarto proportionale) perché esprimono con esattezza matematica il concetto di rapporto. In particolare, permettono di scrivere con semplicità i rapporti tra unità di misura diverse, considerando le relazioni non decimali tra i vari sottomultipli delle unità di misura considerate. Nel seguente problema [Boncompagni, 1857, p. 103] si mostra un esempio d'uso della frazione multipla.

¹¹ www.progettofibonacci.it

¹² Ghione, in www.progettofibonacci.it

*Il concetto di numero nei libri di testo del Regno d'Italia: indagini su un particolare
"numero complesso"*

VIII.2.3

De eodem.

Rvrsus si eadem ratione quereres, quantum ualeant libre 11 imperialium, erit tunc talis questio. Quod libre 12 imperialium ualent libras 31 pisaninas: quare scribenda est questio ut supra, et multiplicanda 11 per 31, et diuidenda est summa per 12, ut prediximus; et habebis libras $\frac{5}{12}$ 28, ut in hac alia descriptione ostenditur. Nam si de $\frac{5}{12}$ unius libre soldos facere uolueris, multiplica 5, que sunt super 12, per 20, erunt soldi 100; que diuide per 12, que sunt sub uirgula, exhibunt soldi 8, et denarii 4: ergo libre 11 imperialium ualent libras 28, et soldos 8, et denarios 4: uel per 5, multiplica 341, que summa multiplicationis de 31 in 11; et diuides postea per 5, et per 12, hoc est per $\frac{1}{2}$ de 20, et habebis soldos, et denarios in prima diuisione. Quia que super 20 ceciderint, erunt soldi; et que uenient super 3, erunt tertie soldi; et tertia soldi est denarii 4.

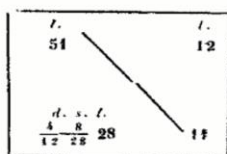


Figura 4: Fibonacci, in Boncompagni, par. VIII.2.3 del *Liber Abbaci*, p. 103

Per determinare il quarto proporzionale si utilizza la proposizione VII.19¹³ degli Elementi di Euclide, per cui la quantità in lire da trovare è data da $\frac{31 \cdot 11}{12} = \frac{5}{12} 28$ lire. Tenendo in considerazione che 1 lira sono 20 soldi ed 1 soldo sono 12 denari, si calcolano i $\frac{5}{12}$ di 20 soldi, cioè 8 denari ed i suoi $\frac{4}{12}$, quindi la quantità richiesta è esattamente $\frac{4}{12} \frac{8}{20} 28$. È importante sottolineare che Fibonacci nel *Liber Abbaci* quando parla delle frazioni multiple descrive la *regola* dei numeri mostrando che esistono diverse fattorizzazioni relative ad uno stesso numero perché non scompone un numero in fattori primi: questo comporta che la scrittura di una stessa frazione propria si possa esprimere con differenti frazioni multiple, ma sono tutte equivalenti. Il matematico non si preoccupa di verificare la proprietà commutativa del prodotto perché Euclide l'ha già dimostrata nella proposizione VII.16 degli *Elementi* e dà per scontato che valga anche per i numeri razionali che lui utilizza nella sua aritmetica.

Nel considerare i problemi delle merci e dei cambi di monete, come nel precedente, occorre tenere conto delle seguenti relazioni tra grandezze, utilizzate nel Mediterraneo nel tredicesimo secolo, in cui il passaggio da una unità al suo sottomultiplo non avveniva con il sistema decimale, di vita molto più recente.

¹³ Se quattro numeri sono proporzionali, allora il numero prodotto dal primo e dal quarto è uguale al numero prodotto dal secondo e dal terzo; e, se il numero prodotto dal primo e dal quarto è uguale a quello prodotto dal secondo e dal terzo, allora i quattro numeri sono proporzionali.



Figura 5: Unità di misura del 1200, da www.progettofibonacci.it: da sinistra, le unità di peso, monetarie e di lunghezza.

Høyrup riporta quanto sostiene Vogel¹⁴, ovvero che Fibonacci portò in Italia le frazioni continue ascendenti, perché tali possono essere considerate le *fractiones... in gradibus*, e che egli sia stato il primo a scrivere una teoria astratta su tale argomento. Fuori dall'Italia, solo Giordano Nemorario ha cercato di naturalizzare la frazione multipla come parte della matematica teorica, non utilizzando, però, alcun formalismo simbolico e collegando tale concetto a sistemi di subunità metrologiche [Høyrup, 2019]. Inoltre intorno al XVI secolo in un libro di Martin Wenceslaus datato 1599 e quello di J.M. Kegel del 1696, il metodo di disgregazione utilizzato da Fibonacci viene descritto come un metodo utilizzato fuori dall'Italia con il nome di *Practica Italiana* [Brezinski, 1980, p. 57]. Nel trattato d'abaco scritto in lingua volgare più antico, del 1290, *Lo Livero de l'Abbecho* del Maestro Umbro [1290] compare la frazione multipla graduata, come usata da Leonardo Pisano ma non si può escludere che l'autore abbia avuto anche altre fonti da cui attingere tale scrittura.

I calcoli con le frazioni multiple si trovano nelle opere dei successori di Fibonacci scritte in forma distesa senza usare la sua notazione, come nel *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* [Pacioli, 1523]. Ciò che sparì è la sua notazione, con il suo comprensibile formalismo, un'anticipazione del simbolismo algebrico che facilita enormemente i calcoli con le diverse unità di misura. Nel *General trattato de' numeri et misure* [Tartaglia, 1556] non compare la frazione multipla graduata per indicare le differenti unità di misura, ma vengono utilizzati dei simboli per riconoscerle, elencati prima della trattazione di quelli che il matematico chiama “numeri denominati delle monete, pesi e misure”; Tartaglia tiene a precisare che contare i pesi e le misure è la stessa

¹⁴ Vogel in *Zur Geschichte der Stammbrüche und der aufsteigenden Kettenbrüche* (1982), ritiene che nel resto d'Europa queste frazioni non siano mai state utilizzate, sia con il loro schema che senza.

*Il concetto di numero nei libri di testo del Regno d'Italia: indagini su un particolare
“numero complesso”*

cosa che contare con il numero “puro”, “eccetto che vi si aggiunge il nome di quelle tal monete...”

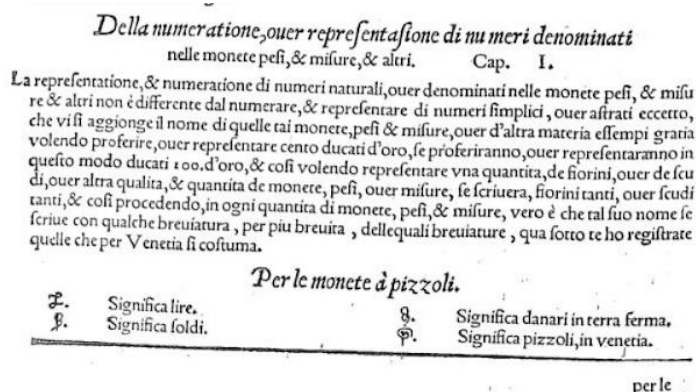


Figura 6: Dal *General trattato de' numeri et misure* di Niccolò Tartaglia del 1556: nella parte inferiore sono presenti alcuni simboli delle unità di misura usate (“lire”, “soldi”, “danari” e “pizzoli”).

Ad esempio, egli moltiplica 9 lire + 17 soldi + 10 piccioli per 3: nella narrazione in linguaggio naturale e scritta in lingua volgare italiana, descrive due modalità. La prima, che chiama *via tediosa e longa*, trasforma tutte le unità presenti in quella più piccola (i *piccioli*), moltiplicandoli per 3 e effettuando, quindi, delle divisioni successive, con opportuno resto, da ricondurre ai multipli iniziali (Tabella 1).

1 lira = 20 soldi	1 soldo = 12 piccioli	piccioli
9	17	10
9 per 20	197 (180 e 17)	
	197 per 12	2374 per 3 (2364 e 10)
		7122
	593 (7122 è 12 per 593 a cui si aggiunge 6)	6
29 (593 è 20 per 29 a cui si aggiunge 13)	13	6

Tabella 1: Moltiplicazione descritta da Tartaglia come *via tediosa e longa*.

Con il secondo metodo, invece, Tartaglia moltiplica ciascuna sub unità per 3, partendo dalla più piccola, operando ogni volta il cambio alla sub unità successiva (Tabella 2).

Operazione	1 lira = 20 soldi	1 soldo = 12 piccioli	Piccioli
per 3	9	17	10
	29	13 e riporto di 2	6 e riporto di 2

Tabella 2: Moltiplicazione descritta da Tartaglia a partire dalla più piccola unità di misura.

Si comincia, quindi, a denotare il numero complesso di cui è già stata data una definizione, e anche Tartaglia nella sua descrizione mostra la difficoltà che si può avere, ad esempio, nel fare la moltiplicazione con i numeri “denominati”.

Nell’ opera del 1585 *Epitome Arithmeticae pratica* di Cristoforo Clavio, tradotta in italiano da Lorenzo Castellano nel 1686 [Castellano, 1856], *Aritmatica Pratica*, compare l’operazione a “*dell’ inestare i rotti*”. In questa operazione Clavio descrisse come arrivare all’unità di misura più piccola data una quantità descritta con i diversi sottomultipli di una specifica unità di misura. L’algoritmo riportato è il procedimento utilizzato nella scrittura nella frazione multipla di Fibonacci ma non è presente la simbologia del *Liber Abbaci* e dei testi arabi a cui Leonardo si era ispirato¹⁵. Anche in altri testi accade lo stesso.¹⁶

4 Conclusioni

In questo articolo ho ipotizzato che i numeri complessi che apparivano nei testi di alcuni Paesi d’Europa e in Brasile abbiano avuto origine dalle frazioni multiple graduate presenti nel *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano Fibonacci, testo destinato all’istruzione dei futuri commercianti. Questo tipo di frazione permetteva di scrivere con un semplice formalismo simbolico la relazione tra unità di misura non decimali tipiche del periodo medievale e rinascimentale ed utilizzate fino all’introduzione del nuovo sistema di pesi e misure. Il formalismo delle frazioni multiple compariva su altri testi fino a quando, dopo l’invenzione della stampa, non fu più presente se non descritto con linguaggio naturale. Comparvero però i simboli che indicavano i vari sottomultipli delle unità di misura e si definivano le operazioni aritmetiche con tali grandezze, come ad esempio nel *General Trattato* di Nicolò Tartaglia. Poiché l’apprendimento delle unità di misura era fondamentale per la formazione di chi frequentava le scuole, nei libri di testo erano presenti capitoli appositi su tale argomento. I testi didattici che trattavano i numeri

¹⁵ Si fa riferimento ai testi dei matematici attivi nel Maghreb (Høyrup 2019, p. 34)

¹⁶ Si veda ad esempio anche le pagine 37 e 38 del Trattato di Aritmetica di Giuseppe Maria Figatelli, del 1664, ed. del 1737. L’autore, nello spiegare l’operazione del *traslare i rotti* mostra come scrivere una frazione multipla una frazione propria al cui denominatore è presente un numero primo.

*Il concetto di numero nei libri di testo del Regno d'Italia: indagini su un particolare
“numero complesso”*

complessi erano molto diffusi in Europa, come quello di Bourdon, in Italia circolavano delle traduzioni o dei testi ispirati ad esse. Nei programmi ministeriali del Regno d'Italia era previsto l'insegnamento del numero complesso; nella riforma Gentile del 1923 era uno degli argomenti richiesti per il superamento degli esami, fin quando non fu più presente a partire della riforma Bottai del 1940. La graduale sparizione di tale numero era essenzialmente dovuta dalla diffusione del nuovo sistema dei pesi e misure, più pratico da usare, ma una motivazione che, a mio avviso, ebbe un ruolo cruciale fu l'esigenza da parte dei matematici del tempo di tornare all'«origine delle cose», come diceva Maria Montessori, con l'introduzione del laboratorio nell'istruzione, con l'invito all'uso diretto delle fonti storiche, tra le quali gli *Elementi* di Euclide [Scoppola, 2011]. Proprio da questo testo, che influenzò la matematica anche in molti altri periodi storici, arrivava un suggerimento fondato, ovvero di riflettere sul concetto di grandezza, che era la natura dei numeri complessi, utilizzati nelle operazioni nei diversi libri scolastici. Peano si fece portavoce di tale pensiero e in base a queste convinzioni promuoveva una riforma dei testi scolastici, che non erano più idonei al nuovo pensiero matematico. Egli voleva ispirarsi ad un'opera di aritmetica molto rigorosa diffusa a Roma, dove si usavano simboli anche nelle scuole elementari e nei quali non era più presente l'aritmetica dei numeri complessi in quanto riteneva che i conti si facessero con i numeri e non con le grandezze. Avvenne dunque che l'aggettivo “complesso” fu attribuito ad altri numeri con cui fare le operazioni aritmetiche in un modo differente, ovvero i numeri immaginari. Avendo analizzato in dettaglio le frazioni multiple graduate e le proprietà matematiche usate, ma non descritte, da Leonardo Pisano, sembrerebbe che esse abbiano portato alla nascita dei numeri complessi. Non ho trovato nessuna informazione esplicita che si riferisce alle *fractiones... in gradibus*, il cui uso era molto frequente nel mondo islamico, in particolare nel Maghreb, terra frequentata dai maestri che vennero a contatto con Fibonacci durante il suo soggiorno a Bugia. L'algoritmo che permetteva di passare da una frazione propria alla frazione multipla graduata associata, alla base della matematica che spiega le operazioni con i numeri complessi, è utilizzato ancora oggi nello sviluppo di un numero razionale come frazione continua ascendente, che ha posto diversi secoli fa le basi per la scrittura in frazione continua discendente di un qualunque numero reale.

Bibliografia

- [1] Acerbi, F. (2007). Euclide, Tutte le opere
- [2] Amante, F. (1852). Elementi di Aritmetica, Della Reale tipografia militare, Napoli
- [3] Boncompagni, B. (Ed.). (1857). Liber abbaci (Vol. 1). Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche.
- [4] Brezinski, C. (1980). History of Continued Fractions and Padé Approximants, Springer-Verlang

- [5] Brunacci V., (1853), Elementi d'Algebra e Geometria del Cav. Brunacci adottati per testo in parecchi Licei d'Italia con note e giunte, per Borroni e Scotti, Milano.
- [6] Borgato, M. T. (2006). The first applications of the metric system in Italy. The history of science and the cultural integration of Europe. Proceedings of the 2nd ICESHS, Cracow, Poland.
- [7] Bourdon, L. P. M. (1836). Elemens d'Arithmetique, Bachelier , Imprimeur- libraire, Paris
- [8] Burali-Forti, C. (1917). Nuova definizione dei numeri complessi (o imaginari) dell'algebra, Libreria Scientifica D. Capozzi.
- [9] Castellano, L. (1686). Aritmatica Pratica, Roma
- [10] Cerasaro, S. (2023). Le fractiones in gradibus in classe nel terzo millennio: le frazioni dinamiche delle scuole d'abaco del XIII secolo, Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario, Anno XXXVIII- Serie IV_ volume V(3), supplemento settembre 2023, atti del III Convegno “Matematica Natura e Scienze dell'Alta Costiera Amalfitana”, Parte Prima.
- [11] Ferreira, D., Schubring, G. (2022). “Complex numbers” and the problem of multiplication between quantities, Historia Mathematica, Volume 59, pp. 119-145.
- [12] Fibonacci, L. (2020). Liber abbaci, Enrico Giusti, Paolo D'Alessandro, Olschki
- [13] Figatelli, G. (1737). Trattato di Aritmetica, Per il longhi, Bologna
- [14] Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, n. 267 del 14 novembre 1923
- [15] Ghione, F. Frazioni multiple graduate e divisioni tra interi, scheda didattica di matematica presente sul sito www.progettofibonacci.it
- [16] Giacardi, L. M. (2006). Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia, Lumières Internationales, pp. 1-416.
- [17] Giacardi, L. (2011). L'emergere dell'idea di laboratorio di matematica agli inizi del Novecento. Atti del Convegno Di. Fi. Ma, pp. 55-66.
- [18] Høyrup, J. (2019), On Parts of Parts and Ascending Continued Fractions: an investigation of the Origins and Spread of a Peculiar System, Selected Essays on Pre- and Early Modern Mathematical Practice, Springer, pp. 31-57
- [19] Maestro Umbro, (1290). Lo Livero de l'Abbecho, a cura di Andrea Bocchi, (2017), vol.1, Edizioni ETS, Pisa
- [20] Montessori, M. (1934). Psicoaritmetica, Copia anastatica, (2013), Edizioni Opera Nazionale Montessori, Roma.
- [21] Novi, G. (1862). Trattato d'Aritmetica di Giuseppe Bertrand, Felice Le Monnier, Firenze.

*Il concetto di numero nei libri di testo del Regno d'Italia: indagini su un particolare
"numero complesso"*

- [22] Ordinamenti e programmi della Scuola Media, Legge n. 899 del 1 Luglio 1940.
- [23] Pacioli, L. (1523). Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, Paganino de Paganini.
- [24] Pagliani, S. & Boccardo, G. (1883). Nuova enciclopedia italiana: ovvero, Dizionario generale de scienze, lettere, industrie, ecc, v. 15, Unione tipografico-editrice torinese.
- [25] Pagnini, C. (1875). Compendio di aritmetica per le scuole elementari contenente le prime nozioni di geometria e il sistema metrico-decimale compilato a forma dei programmi governativi da Cesare Pagnini corredato di molti esercizi di calcolo e di 260 problemi colla rispettiva risposta. Rossetti, Pistoia.
- [26] Peano, G. (1902). Aritmetica Generale E Algebra Elementare, Ditta G. B. Paravia &C., Torino.
- [27] Peano, G. (1924). Sui libri di testo per l'aritmetica nelle scuole elementari, Zanichelli, Bologna, Estr. da: Periodico di matematiche, s. 4., vol. 4., n. 3 , mag. 1924.
- [28] Rocco, C. (1849). Catechismo di matematiche pure ad uso degli studi generali: Aritmetica, stab. del Guttemberg, Napoli.
- [29] Scoppola, B. (2011). Lezioni di Maria Montessori, in Annali di storia dell'educazione, vol.18, pp. 413-434
- [30] Tartaglia, N. (1556). General trattato de' numeri et misure, Curtio Trojano de i Navo
- [31] Tazzioli, R. (2011). La matematica nella storia dell'Unità d'Italia, intervento per Centro PRISTEM – Università "Bocconi" in collaborazione con l'Università di Urbino, Urbino 8-9-10 APRILE 2011.
- [32] Villa, F. (1856). Elementi d'aritmetica Bourdon, opera adottata dall'Università di Parigi, quinta edizione italiana, Pavia, eredi Bizzoni tipografi librai.
- [33] Vogel, K. (1982). Zur Geschichte der Stammbrüche und der aufsteigenden Kettenbrüche. Sudhoffs Archiv, pp. 1-19.
- [34] Wang, X. (2022). How Jean-Baptiste Delambre read ancient Greek arithmetic on the basis of the arithmetic of "complex numbers" at the turn of the 19th century, Historia Mathematica, Volume 59, pp. 146-163.