

Toth and trans-euclidean thought in Aristotle

(Toth e il pensiero trans-euclideo in Aristotele)

Nicola Umberto Animobono*

*and only I see you
perfection in transparency*
(A.Carulli - *Trame Universali*)

Abstract

For about 2000 years the *postulate of parallels*, enunciated by *Euclid*, was a source of doubts (*postulate or theorem?*) clarified with the birth of *non-Euclidean geometry*.

In the light of this new knowledge of geometry, *Toth*, a Greek scholar and historian of mathematics, glimpses typical properties of geometry today defined as non-Euclidean in some writings of *Aristotle*. To clearly highlight *free will*, the Stagirite uses geometric examples partly taken from the geometry known at the time, partly uses its *negation*, that is, he shows, *involuntarily*, the presuppositions of the *geometry* that we know today as *non-Euclidean*, without delving into the possible logical coexistence of antithetical statements.

This short note is an invitation to read Aristotle in a re-interpretative way.

Keywords: Toth, Aristotle, free will, non-euclidean geometry.

Sunto

Per circa 2000 anni il *postulato delle parallele*, enunciato da *Euclide*, è stato fucina di dubbi (*postulato o teorema?*) chiariti con la nascita della *Geometria Non-Euclidea*.

Alla luce di queste nuove conoscenze di geometria, *Toth*, grecista e storico della matematica, in alcuni scritti di *Aristotele* intravede proprietà tipiche di *geometria non euclidea*. Lo Stagirita, per descrivere con rigore il *libero arbitrio*, usa esempi geometrici, in parte prelevati dalla geometria all'epoca nota, in parte ponendo la sua *negazione*, ovvero mostra, *involontariamente*, i presupposti della *geometria*, oggi definita *non euclidea*, senza approfondire la possibile coesistenza logica di affermazioni antitetiche.

Questa breve nota è un invito alla lettura di *Aristotele* in chiave re-interpretativa.

Parole chiave: Toth, Aristotele, libero arbitrio, geometria non-euclidea.[†]

* Retired, independent scholar, Fabriano, Italy; anima.nuda1944@gmail.com.

[†] Received on February 26, 2025. Accepted on June 1, 2025. Published on June 30, 2025. DOI: 10.23756/sp.v13i1.1673. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765. ©Animobono. This paper is published under the CC-BY licence agreement.

1. Introduzione

Il mondo greco antico è stato fucina di arti, spesso sovrapposte. La filosofia e la matematica sono stati argomenti comuni per i loro cultori. Pitagora propose l'*uno* come principio creativo da cui si sviluppa la molteplicità, l'*archè* che governa il mondo. È un susseguirsi di pensatori enciclopedici che favoriscono osmosi tra discipline in divenire dai confini labili, e non meraviglia incontrare reciproco scambio tra codeste.

Leggere quei testi *con gli occhi di oggi* talvolta può fornire sorprese interpretative. Semplici esempi geometrici a chiosa di affermazioni filosofiche, dopo secoli acquisiscono una valenza assente alla loro nascita. È il caso prospettato da Toth nel proiettare Aristotele nel mondo geometrico non-euclideo.

In questa breve nota accenniamo a siffatta lettura, proponendo un coinvolgimento scolastico (liceale e accademico) multidisciplinare.

2. Rette parallele

Euclide.

Euclide (365-300 a.ev) nei suoi *Elementi di Geometria*, adotta una impostazione di taglio attuale, usando una metodica assiomatica (ipotetico deduttiva). Alcuni assiomi hanno l'immediatezza percepita dall'intuizione. Il 5° della lista, invece, difettandone, ha il sapore del teorema: "*qualora una retta incidente su due rette formi gli angoli interni dalla stessa parte minori di due angoli retti, le due rette prolungate all'infinito si incontrano dalla parte in cui ci sono gli angoli minori di due retti*" [1].

Sinonimi.

Nel tempo questo postulato è stato riscritto in *forme equivalenti*. L'enunciato prevalente, detto *assioma di Playfair* o *postulato delle parallele*, asserisce "*data una qualsiasi retta e un punto non appartenente ad essa, è possibile tracciare una e una sola retta parallela alla retta data*". La sua *negazione* ($\neq 1$) modifica il finale in "*nessuna parallela*" (geom. ellittica o sferica) o "*più parallele*" (geom. iperbolica).

Altre formulazioni equivalenti sono "*la somma degli angoli interni d'un triangolo [risp. quadrangolo] è pari a 2 [risp. 4] angoli retti*". Le loro *negazioni* " $\neq \pi$ □ [risp. " $\neq 2\pi$ "] generano le alternative " $< \pi$ " (ipotesi *angolo acuto*) e " $> \pi$ □ (ipotesi *angolo ottuso*) [risp. " $< 2\pi$ " e " $> 2\pi$ "].

Sviluppatori.

Per secoli molti matematici si sono cimentati a dedurlo, talvolta illusi di esserci riusciti, ingannati da premesse improprie equivalenti alla tesi.

Nel xviii secolo, l'abate Girolamo *Saccheri* (1667-1733) [2] tenta la via della dimostrazione per assurdo sulla quale affronta il percorso oggi detto non-euclideo (¹).

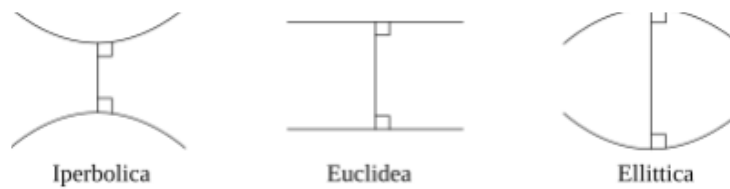
Solo nell'ultimo quarto di millennio *Gauss* (²) *Bolyai Lobachevsky* sviluppano questa nuova impostazione geometrica, constatando la sua natura d'assioma, attraverso la nascita di geometrie coerenti con la sua negazione, da allora definite *non-euclidee*.

Questo risultato di geometrie, apparentemente contraddittorie, mina la stessa *ovvietà dell'ovvio*.

Nelle figure sottostanti, le evenienze geometriche sono mostrate sinotticamente. Nella *fig.1* si nota il comportamento di 2 rette aventi una *perpendicolare in comune* nelle 3 geometrie; nella *fig.2* un quadrilatero isoscele con angoli retti alla base e *ottusi* e *acuti* adiacenti al lato opposto.

Per una interpretazione visiva immediata (caso ellittico) per *spazio* geometrico si assuma una *sfera* e per *retta* un qualunque *cerchio massimo*: ogni coppia di cerchi massimi (rette ellittiche) si interseca, dando luogo ad assenza di rette parallele.

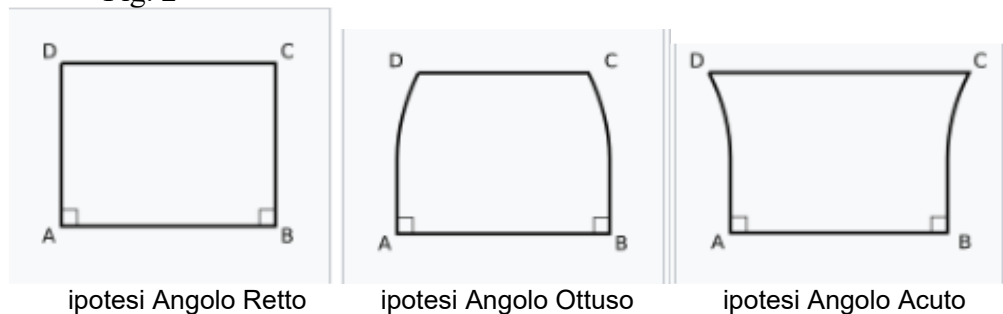
Fig.1



Modello “non-euclideo”

Nella *iperbolica* le rette possono divergere, ed è quindi possibile trovare *molte* rette *parallele* (cioè che non si intersecano); nella *ellittica* le rette convergono sempre e quindi *non esistono* rette *parallele* [immagine da Wikipedia voce: *Geometria non euclidea*].

Fig. 2



Modello “quadrilatero di Saccheri”

Un quadrilatero con 2 lati perpendicolari ad un terzo nelle ipotesi degli angoli adiacenti al quarto siano *ottusi* (geom. *ellittica*) oppure *acuti* (geom. *iperbolica*) [immagine da Wikipedia voce: *G.G.Saccheri*].

3. Toth

Imre Toth.

Imre Toth (1921-2010) (*Roth* all'anagrafe) nasce in Transilvania, terra di confine e di conquista tra Ungheria e Romania (all'epoca rumena), da famiglia ebrea (da cui la modifica del cognome per sfuggire alle retate antisemite). Quando il padre, ufficiale

asburgico d'artiglieria a cavallo, dovette abbandonare l'appartamento rinunciando a tutto, lasciò questo biglietto ritrovato dal figlio [3] sui propri libri: *“La prego, io sono vecchio, ho 56 anni ... ciò che ho messo insieme nella mia vita, questi libri, appartengono a mio figlio. Prego di non toccarli. Quando i Romani hanno occupato Siracusa hanno trovato il vecchio Archimede che disegnava cerchi sulla sabbia. E questi ha detto al soldato che stava per ucciderlo di non toccare i suoi cerchi.”*

Matematica scandalosa.

Ebreo e matematico sono le sue cifre ben saldate tra loro. Con la stessa tenacia coniuga la sua *avversione* al nazismo con l'*amore* alla matematica. Da un lato non essere considerati un *“sottoinsieme della popolazione tedesca”* ⁽³⁾ e dall'altra negare una ragion d'essere a entità come i numeri *irrazionali* e quelli *immaginari* ⁽⁴⁾. L'altro scandalo, e come tale generatore di discriminazione, è costituito dalle *geometrie non euclidee*.

Matematica e Politica.

Per Toth superare lo scandalo di due assiomi in contraddizione, ma entrambi veri, è possibile accettando, da un punto ontico, l'esistenza di universi (matematici) distinti ed opposti, ove ognuno contiene la totalità degli oggetti geometrici esistenti, ovvero accettare, da un punto metafisico, la pluralità di mondi, simultaneamente ricchi di verità opposte: *la coesistenza degli opposti*. Al di fuori della geometria, questa constatazione *disattiva* il *“principio di non contraddizione”*. Ci penserà Łukasiewicz [5], giunto alla formulazione della logica polivalente, ad affermare la sostanziale indimostrabilità (cioè non necessità) logica di una legge all'apparenza inconfutabile: *“vero”* e *“falso”* non sono più le uniche due alternative possibili per il pensiero.

Questa affermazione, apparentemente innocua per la sua natura metafisica, per Toth va oltre la matematica, si estende alla politica e alla religione: ammettere l'esistenza di *più* verità, tutte valide; la verità non è unica, non c'è più *mon-archè*, ci sono più verità, tutte con pari dignità di cittadinanza. In una Europa in cui l'omicidio del diverso era legittimo, questa sua impostazione lo colloca contro ogni totalitarismo: la *negazione*, ovvero la diversità, è *necessaria*.

Matematica greca.

Nell'antichità egiziana e greca per *Geometria* (misurazione dei terreni) si intendeva la cosiddetta euclidea. Ciò non ostante questa versione della geometria non fu la sola ad essere scandagliata. Negli approfondimenti dialettici apparvero osservazioni, oggi inquadrabili nella *non-euclidea*. A fare capolino affermazioni sugli angoli di triangoli e quadrangoli diversi da quelli euclidei. Per Platone (428/427 - 348/347 a.ev), nel *Cratilo*, il fondamento della matematica scaturisce dalla immanenza e coerenza del linguaggio, nonché dall'accoppiata speculare proposizione/oggetto (dovuta alla sua visione della matematica che va oltre il cosmo: il noto *mondo delle idee*, *iperuranio*), e l'ipotesi non-euclidea è considerata *“male”* in quanto opera di un demiurgo malefico che vorrebbe sviare le anime dall'unica affidabile geometria [6].

4. Aristotele

Aristotele.

Aristotele (384-322 a.ev) E' luogo comune, tra gli storici della filosofia, che Platone sapesse di Matematica ed Aristotele affatto, anzi che fosse addirittura di ostacolo allo sviluppo della scienza con strumenti matematici. Falso, obietta Ugaglia [7]: per comprendere la sua filosofia serve la matematica e per capire la sua matematica necessita conoscere la filosofia.

Leggendo Toth, i cui interessi culturali oscillano dalla Matematica alla Filosofia con grande attenzione alle lingue classiche, osserviamo che siffatto eclettismo l'ha condotto a notare in Aristotele una visione (interpretazione) che va oltre la geometria di Euclide. La novità di Aristotele, per Toth, si rintraccia nella *Ethica* (*Eudemia*, *Nichomachea* e *Grande*) e negli *Analitici* (*primi* e *secondi*) e non nella *Logica*.

L'*archè* della geometria, ovvero il principio di ogni azione geometrica, consiste in una *coppia di asserti* fra loro *opposti*: "*la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due retti oppure no*", la cui scelta è *arbitraria, etica* (non, come per Platone, per *implicita e a-prioristica* motivazione). Questa anomala impostazione non nasce da nessuna costrizione o necessità, ma da una *decisione libera* del soggetto. La *negazione*, apparentemente *distruttiva*, si rivela *creativa*: ovvero la verità non è un limite alla libertà, ma la libertà è foriera di verità.

Con l'emergere delle geometrie non euclidee le matematiche hanno preso coscienza della loro immanente libertà, di assegnare la verità a proposizioni assiomatiche contraddittorie: accettare la pluralità di verità costituisce una necessità. Questo esempio è collocato nell'*Etica Eudemia* per illustrare il bene e il male; allo scopo non propone come dicotomia "guerra e pace", "pagare e non pagare", "promettere e non mantenere" ecc. ma usa esempi presi dalla geometria.

Fonti.

La lista completa, in greco antico, delle fonti aristoteliche è presente in appendice a [8] (pag. 395-420) (accompagnata dalla traduzione sia in latino che in tedesco), nonché (con ampio commento in italiano) in [9].

5. Conclusioni

Criticità.

La lettura di Aristotele, proposta da Toth, non trova uniformità di consensi. Nell'antica Grecia, la Geometria, esposta da Euclide [1], era ritenuta unica e palese, incontrovertibile, per cui Aristotele non intende affatto sviluppare una geometria non euclidea (come farà Saccheri [2]) ma propone la *negazione della geometria euclidea come stratagemma dialettico paradossale per affermare il libero arbitrio*. A sua insaputa getta le basi della geometria non euclidea, che non trovano in quel tempo nessun sviluppatore (⁵).

Queste affermazioni Toth le considera *tipiche* della *geometria*, oggi definita, *non-euclidea* e le dà perciò un valore aggiunto rifiutato da altri storico-matematici. Una

esagerata stroncatura arriva da Unguru [10], docente di Filosofia della Scienza a Tel-Aviv, che accusa Toth di traduzione infedele e addomesticata pro domo sua, che invece tradisce un protagonismo denigratorio forse per il blando e irrituale semitismo di Toth. Comunque, l'eminente storico Hösle [11] elenca dettagliatamente gli svarioni e sproloqui di Unguru, restituendo a Toth la sua giusta collocazione.

Prospettive.

Le conoscenze del passato, perdute nel tempo (per usura dei documenti o per impeto antagonista) o in parte conservate in traduzioni o citazioni o di incerta paternità, non ci forniscono un quadro esaustivo di quel momento e in attesa di nuovo materiale una rilettura può aiutare a dissipare dubbi.

“*Geometria non geometrica*” fu l’ossimoro usato da Aristotele per catturare quel mondo in nuce, sfiorato negando proprietà geometriche consolidate nei secoli, e del quale intravede realtà ontiche distinte e autonome da collocare a fianco della Geometria (euclidea).

Precursore inconsapevole.

In conclusione, con una metafora, Aristotele involontariamente sbarcò, senza avvedersene, su altri lidi, anticipando Colombo, che, navigando verso le Indie, si ritrovò altrove.

6. Spontaneità

Dichiaro assenza di conflitti d’interesse e di finanziamento alcuno.

7. Ringraziamenti

Editore e Revisori.

Ringrazio l’editore e gli anonimi revisori per i suggerimenti migliorativi forniti.

8. Note

(¹) o la tonaca, o la paura dell’Inquisizione, lo portano a rifiutare i suoi corretti risultati non dandoli alle stampe: è aneddótico il suo rassegnato “*il buon dio non lo può permettere*”.

(²) in precedenza Gauss, che aveva affrontato l’argomento, confessa, in una lettera del 27 genn. 1829 a Bessel, di non pubblicarne i risultati per timore delle “*strida dei beoti*” (alludendo ai seguaci di Kant).

(³) e, indirettamente, insofferente all’accettazione millenaria delle vessazioni antisemite subite – si vedano i Diari di Etty Hillesum [4] – *consuetudine persa e superata dalle nuove generazioni israelite, figlie degli scampati allo sterminio, dai cui autori hanno mutuato i comportamenti*.

(⁴) già Gauss, contro Carnot, protestò per l’uso dei termini *immaginario*, *fittizio*, *impossibile*, *sofistico* ecc. in quanto attribuiva ai numeri, oggi detti *complessi*, lo stesso

valore ontico dei numeri reali, cioè *pari diritto di cittadinanza* nell'universo della matematica.

(⁵) una fattispecie ante-litteram di Galois che stabilisce la teoria dei gruppi in uno scritto scoperto decenni dopo.

Bibliografia

[1] Russo, L., Pirro, G., Salciccia, E. - *Euclide: il I libro degli Elementi Una nuova lettura*, (testo greco a fronte) Carocci Bari, 2017..

[2] Saccheri, G. – *Euclides ab omni aevo vindicatus*, Mediolani MDCCXXXIII / ediz. italiana: *Euclide liberato da ogni macchia*, (testo latino a fronte) a cura di P.Frigerio, introduzione I.Toth e E.Cattanei, Bompiani Milano, 2001.

[3] Toth, I. - *Az életben van, amit az ember nem tesz. Es tesz... Beszélgetések Toth Imrével*, Pont, Budapest 2004 / edizione italiana: a cura e con un saggio di Giancarlo Gaeta - *Il lungo cammino da me a me - Interviste e prefazione di Péter Vardy*, Quodlibet Macerata, 2016.

[4] Hillesum, E. – *De nagelaten geschriften van Etty Hillesum, 1941-1943* (integral edition by KAD Smelik, text by G.Lodders e R.Tempelaars, Amsterdam Balans 1986, 6.a ed. 1986 / edizione italiana: *Diario 1941-1943*, - Ediz.integrale, trad. C.Passanti e T.Montone, Adelphi Milano, 2012.

[5] Łukasiewicz, J. – *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa* (1910- PWN 1987) / ediz. italiana: *Del principio di contraddizione in Aristotele* – a cura di G.Franci e C.A.Testi, presentazione M.Matteuzzi, trad. G.Maszkowska, Quodlibet Macerata, 2003.

[6] Contiliano, A. - Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria, *Poetry Ware Recensioni*, Roma, 16.01.2005. <http://www.vicoacitillo.it/recen/archivio/80.pdf>

[7] Ugaglia, M.- La Matematica Immanente (e finita) di Aristotele, in “L Grecchi, (a cura di) *Immanenza e trascendenza in Aristotele*, Petite Plaisance Pistoia, 2017”: 163-188.

[8] Toth, I. - *Fragmente und Spuren Nichteuklidischer Geometrie bei Aristoteles*, De Gruyter Berlin, 2010.

[9] Toth, I.. – *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria* Prolegomeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel «Corpus Aristotelicum» Introduzione Giovanni Reale, Vita e Pensiero Milano, 1997.

[10] Unguru, S. - Greek Geometry and Its Discontents: The failed Search for Non-euclidean Geometries in the Greek Philosophical and Mathematical Corpus, *NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften Technik und Medizin* 21 Springer, Basel AG, 2013: 299-311; DOI 10.1007/s00048-013-0096-y .

[11] Hösle, V. - Antieuclideo o Non-euclideo? Tertium ,datur: in "Crapanzano, F. e Gembillo, F. (a cura di) – *Imre Toth e la filosofia della matematica*, A.Siciliano Messina, 2023": 178- 218.