

The scandal of incommensurability between *άλογος and άρρητος* (Lo scandalo dell'incommensurabilità tra *άλογος e άρρητος*)

Giovanna Della Vecchia*

Abstract

This paper seeks to reconstruct the historical-epistemological path that led, in antiquity, to the discovery of the existence of incommensurable quantities. It is not known exactly when and how this important discovery was made; however, there is no doubt that the discovery was made within the developments of Greek mathematics.

Keywords: Incommensurability, Greek mathematics.[†]

Sunto

Il presente lavoro intende ricostruire il percorso storico-epistemologico che ha condotto, nell'antichità, alla scoperta dell'esistenza delle grandezze incommensurabili.

Non si sa con esattezza quando e come sia stata fatta tale importante scoperta e anche tra i commentatori antichi la questione sembra che abbia dato origine a discussioni e congetture varie; ancora oggi si può affermare che nell'ambito della storia della matematica il dibattito sia ancora aperto. È comunque fuori di dubbio che la scoperta sia stata fatta in seno agli sviluppi della matematica greca.

Parole chiave: Incommensurabilità, matematica greca.

* Già docente di Matematica nella scuola secondaria di secondo grado; attualmente docente a contratto di Analisi matematica presso DIARC Università degli Studi di Napoli "Federico II"; giovanna.dellavecchia@gmail.com

[†] Received on May 16, 2024. Accepted on June 22, 2024. Published on June 30, 2024. DOI: 10.23756/sp.v10i1.1620. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765. ©Della Vecchia. This paper is published under the CC-BY licence agreement.

1. Introduzione

Il concetto di incommensurabilità tra grandezze ha origini molto remote e travagliate ma sicuramente la scoperta dell'esistenza di grandezze incommensurabili è avvenuta nell'ambito degli sviluppi della matematica del periodo greco classico.

Sembra che tale scoperta sia stata vissuta in maniera particolarmente traumatica dai pitagorici in quanto in grado di mettere seriamente in crisi la loro dottrina secondo cui tutta la realtà è riconducibile al numero (e per numero si fa riferimento al numero intero): è per questo che i pitagorici rimasero letteralmente sconvolti dal dover riconoscere l'esistenza di grandezze il cui rapporto non è esprimibile come rapporto di numeri interi.

Il punto cruciale della questione è dunque la definizione dell'idea di rapporto (*λογος*) che per la scuola pitagorica è il fondamento non solo delle conoscenze matematiche ma della comprensione del mondo.

Per i pitagorici i numeri sono concepiti come entità discrete e vengono rappresentati con dei sassolini, disposti a formare figure geometriche, dalle quali si possono ricavare semplici proprietà aritmetiche.

Per loro anche la geometria è basata sulla teoria dei numeri interi: le figure geometriche sono infatti concepite come formate da un insieme discreto di punti.

Per i pitagorici, dunque, aritmetica e geometria vengono a coincidere, tanto che, riferendosi a quel periodo storico, si parla solitamente di "aritmo-geometria". Lo studio dell'aritmetica o della geometria diventano la stessa cosa: dal numero di punti è possibile conoscere le principali caratteristiche delle figure e, viceversa, dalla forma delle figure è possibile ricavare le proprietà dei numeri.

Questo presupposto di considerare tutte le linee collezioni di punti-unità, portava alla conclusione che esse dovessero essere commensurabili tra loro.

I pitagorici erano dunque convinti che due segmenti fossero sempre commensurabili, cioè che esistesse sempre un loro sottomultiplo comune, un segmento capace di entrare un numero intero m di volte nel primo ed un numero intero n di volte nel secondo: m/n costituiva il *λογος* cioè, il rapporto tra i due segmenti.

È suggestiva la scelta del termine *λογος* per indicare il rapporto in senso matematico; *λογος* ha il significato anche di *pensiero*, *argomentazione razionale*, *discorso* e ciò aggiunge profondità e spessore al pensiero pitagorico:

“Il significato del termine, traducibile sia come rapporto che come ragione, toglie dunque al concetto il solo connotato numerico e gli conferisce la dignità di pensiero, di

Lo scandalo dell'incommensurabilità tra ἀλογος e ἀρρητος

un pensiero che si muove e porta a individuare forme, somiglianze, leggi, principi universali”.

[Catastini-Ghione: Immagini, analogie e sassolini nei Pitagorici, Punti Critici, 1999]

Ma quando i pitagorici si accorsero che alcuni rapporti non possono essere espressi da numeri interi, cioè che esistevano grandezze incommensurabili, ne furono letteralmente sconvolti.

E, per ironia della sorte, sembra che la scoperta si annidasse proprio nel simbolo scelto per la loro scuola, il pentagramma stellato, in cui il rapporto tra la diagonale e il lato non poteva essere espresso come frazione di interi.

Il rapporto tra grandezze incommensurabili diventava l'ἀλογος (non esprimibile, irrazionale); talvolta veniva usato anche il termine ἀρρητος (privo di rapporto, ineffabile), termini che fanno riferimento sia al significato tecnico che mistico-religioso della scoperta.

Non si sa con esattezza quando sia stata fatta l'importante scoperta e anche tra i commentatori antichi sembra che tale questione sia stata fonte di discussioni e congetture: ancora oggi si può affermare che essa costituisca un problema aperto nell'ambito della storia della matematica.

La tradizione attribuisce la scoperta a Ippaso da Metaponto della scuola pitagorica.

Si narra che Ippaso sia morto in mare come empio per aver provocato l'ira degli dèi: aveva scoperto e divulgato l'esistenza delle grandezze incommensurabili, scoperta da tenere il più possibile segreta in quanto avrebbe avuto effetti devastanti per la dottrina pitagorica.

Racconti e leggende a parte, è universalmente accettato che a scoprire l'esistenza dell'ἀλογον fossero i Greci che però non introdussero mai questo concetto tra i numeri: per loro irrazionalità significò incommensurabilità, cioè impossibilità di trovare un sottomultiplo comune a due grandezze. E mentre la geometria riusciva a cogliere gli aspetti di questa nuova realtà e quindi ad avere nuovi ed importanti sviluppi, l'aritmetica rimaneva comunque relegata ai numeri interi e razionali.

I Greci si limitavano ad accettare il fatto che i numeri interi e i loro rapporti non fossero sufficienti a descrivere la realtà matematica ed a cogliere appieno il continuo geometrico, dunque non in grado di racchiudere l'essenza stessa della realtà.

Tre sono gli autori che diversi secoli dopo la sua scoperta ci hanno fornito testimonianze scritte sull'origine della teoria dell'incommensurabilità: Pappo (290-350 d.C.ca), Proclo (412-485 d.C.ca), e Giamblico (245-325 d.C.ca), ma i loro testi risultano a tratti discordanti e non sempre attendibili.

Certamente le più antiche testimonianze scritte riguardo alla questione delle grandezze incommensurabili risalgono ai due grandi filosofi del IV secolo a.C., Platone e

Aristotele che però parlano di incommensurabilità riferendosi esclusivamente al lato e alla diagonale del quadrato.

Anche secondo i due filosofi tale scoperta aprì una grave crisi, proprio perché nasceva in relazione a semplici proprietà geometriche stabilite dagli stessi Pitagorici.

Dalla ricostruzione delle leggende e dei racconti tramandati e dallo studio delle testimonianze scritte pervenute, è possibile affermare che, nel periodo classico, la matematica ha avuto un ruolo fondamentale nell'attività culturale dei greci consentendo loro di fare enormi progressi rispetto ai predecessori. Tale importanza è sintetizzata nelle parole di Morris Kline:

Nella storia della civiltà i Greci occupano un posto preminente; nella storia della matematica sono l'evento supremo. Sebbene abbiano subito l'influenza delle civiltà che li circondavano, i Greci costruirono una civiltà e una cultura che sono le più stupefacenti fra tutte le civiltà, le più influenti sullo sviluppo della cultura occidentale moderna e quelle decisive per la fondazione della matematica quale noi la concepiamo oggi. Uno dei grandi problemi della storia delle civiltà è il dar conto della brillantezza e della creatività degli antichi Greci. [M. Kline: Storia del pensiero matematico, 1972.]

2. Il problema dell'incommensurabilità in Platone

Il problema che, storicamente, potrebbe aver condotto alla scoperta delle grandezze incommensurabili è quello della duplicazione del quadrato, consistente nel trovare il lato di un quadrato di area doppia rispetto a quella di uno dato.

E Platone, in un passo del dialogo *Il Menone*, tratta la questione in una maniera davvero brillante.

È un passo cruciale in cui il problema diventa un pretesto utilizzato per dimostrare l'esattezza della teoria dell'anamnesi attraverso l'esperimento maieutico fatto da Socrate.

Viene interrogato uno schiavo di Menone che, per sua stessa ammissione, ignora i fondamenti della geometria.

Socrate disegna sul terreno un quadrato avente il lato di 2 piedi e fa constatare al ragazzo che tale quadrato ha un'area di 4 piedi quadrati.

Chiede quindi allo schiavo di raddoppiare il quadrato stesso, cioè di costruire un secondo quadrato che abbia area doppia del primo, ossia area di 8 piedi quadrati.

Il ragazzo afferma istintivamente che il quadrato richiesto dovrà avere il lato di 4 piedi, ma Socrate gli fa osservare che tale quadrato avrebbe un'area di 16 piedi quadrati.

Allora lo schiavo, riconoscendo che 4 è troppo grande, propone di provare con un lato lungo 3 piedi, ma anche questa soluzione risulta sbagliata dando luogo ad un'area di 9 piedi quadrati e non 8.

A questo punto il ragazzo non sa più che dire, e confessa di non sapere. Anche questo è un risultato importante, in quanto per il maestro la sapienza ha inizio proprio dalla coscienza della propria ignoranza.

Lo scandalo dell'incommensurabilità tra ἀλογος e ἄρρητος

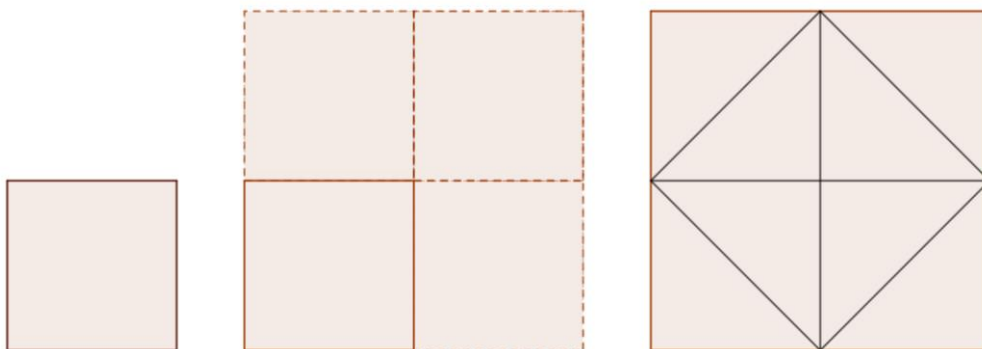
In realtà il ragazzo ha cercato una soluzione aritmetica al problema, ha provato a trovare un numero che, elevato al quadrato, desse il doppio del quadrato del numero dato (in questo caso il doppio di 4). Allora Socrate, cercando di guidare lo schiavo alla scoperta, gli consiglia di evitare calcoli numerici e di provare a risolvere il problema geometricamente, costruendo il lato del quadrato richiesto.

Egli disegna dapprima il quadrato quadruplo (cioè quello di lato doppio) mettendo quattro quadrati uguali al dato, uno accanto all'altro (come nella seguente figura).

Traccia poi una diagonale in ciascuno dei quattro quadrati, in modo che le quattro diagonali vengano a costituire anche esse un quadrato: si tratta di quello costruito sulla diagonale del quadrato dato.

Come si evince dalla figura, ciascuno dei 4 quadrati resta diviso dalla diagonale in due triangoli rettangoli isosceli uguali, e il nuovo quadrato costruito mediante le diagonali contiene quattro di tali triangoli: dunque esso ha area doppia rispetto al quadrato assegnato che ne contiene due.

Il problema è dunque risolto.



Qualche commentatore vede nel brano del Menone una sintesi della storia della prima scoperta dell'irrazionale.

Nella prima parte viene chiesto allo schiavo una soluzione aritmetica al problema della duplicazione del quadrato, cioè se sia possibile trovare un numero che elevato al

quadrato dia il doppio di un altro numero quadrato. Nel caso specifico si cerca un numero che moltiplicato per se stesso dia, se possibile, 8.

Provando prima col 4, poi col 3, la ricerca ha dato risultato negativo, lo schiavo, cioè, non è riuscito a risolvere il problema.

Restando nel campo dell'aritmetica, pur essendo espressa in numeri la lunghezza del lato del primo quadrato, non è stato possibile esprimere numericamente la lunghezza del lato del nuovo quadrato.

Quando invece entra in gioco la geometria, il problema viene risolto molto semplicemente davanti agli occhi stupiti del ragazzo.

Emerge subito il contrasto fondamentale tra aritmetica e geometria: coi numeri non si riesce a raddoppiare il quadrato, mentre con una semplicissima costruzione geometrica il problema viene risolto immediatamente.

Forse proprio tale contrasto potrebbe aver condotto alla scoperta dell'incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato.

In tutta l'esposizione del Menone sembra che non si sia andato oltre i mezzi di cui disponevano i pitagorici e che il problema della duplicazione del quadrato, abbia avuto origine da un problema ben più antico, quello della duplicazione del cubo (datato almeno da Ippocrate di Chio, 470 a.C. – 410 a.C.).

L'esperimento citato, pur finalizzato a dimostrare l'esattezza della teoria dell'anamnesi, costituisce forse l'occasione per illustrare, sottoforma davvero didatticamente brillante, un classico risultato matematico: in tal caso il brano citato assumerebbe anche un valore storico preciso.

D'altra parte, sembra che Il Menone sia il dialogo col quale abbia inizio un interesse particolare di Platone nei confronti della matematica: in esso per la prima volta il sommo filosofo entra in questioni tecniche precise, come il problema del raddoppiamento del quadrato.

Ciò farebbe pensare ad un Platone appena ritornato dal suo primo viaggio in Sicilia, nel corso del quale avrebbe imparato matematica da Archita a Taranto e da Teodoro a Cirene; un Platone che, sul punto di fondare l'Accademia, intendesse riservare alla matematica un posto importante nel programma generale della sua Scuola:

Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσὶτω

fu infatti il motto posto all'ingresso dell'Accademia platonica.

3. ... e in Aristotele

Aristotele, in modo più esplicito di come farà Euclide, dice che cosa è un rapporto: un rapporto è precisamente un'*antanairesis*:

“Sembrerebbe che anche nella matematica alcune proposizioni siano difficili da dimostrare, per la mancanza di una definizione, per esempio quella che afferma che la retta parallela al lato di un parallelogramma, che spezza in due la figura, divide in modo

Lo scandalo dell'incommensurabilità tra ἀλογος e ἄρρητος

simile la base e la superficie. Ma una volta enunciata la definizione, quanto detto diventa subito chiaro. Poiché le superfici e le basi hanno la stessa antanairesis; e questa è appunto la definizione di rapporto [logos]". (Topici, 158 b 29)

Per comprendere il significato del termine greco *ανταίρεσις* (che talvolta è considerato sinonimo di *ανθυφαιρεσις*, facendo riferimento alla scienza degli "antichi") basta soffermarsi sui termini *anti* e *ana*: il primo rimanda a un'idea di "antagonismo", inteso come "confronto reciproco" di due grandezze, e il secondo alla risoluzione di questo confronto attraverso un processo che comporta la ripetizione (*ana*) di una operazione elementare, la sottrazione, applicata a due grandezze e che conduce a una formula di ricorrenza. Si tratta di una procedura solitamente nota come "algoritmo euclideo" per il calcolo della massima misura comune di due grandezze omogenee commensurabili, o del massimo comun divisore tra due numeri interi.

Nel caso di due grandezze incommensurabili, invece, il processo *dell'antanairesis*, consente di calcolare delle approssimazioni numeriche del loro rapporto.

Tale procedura, che probabilmente era già alla base del concetto di rapporto prima di Euclide, viene indicato col nome di algoritmo euclideo, in quanto Euclide la utilizza negli Elementi per dimostrare l'incommensurabilità di due grandezze. Ma non la usa per definire un rapporto, come gli "antichi" avevano fatto, verosimilmente, prima di lui.

Se ad esempio a e b sono due segmenti di retta, il secondo più piccolo del primo, b può essere sottratto da a un numero n_0 di volte, lasciando un resto r_0 più piccolo di b :

$$a = n_0 b + r_0$$

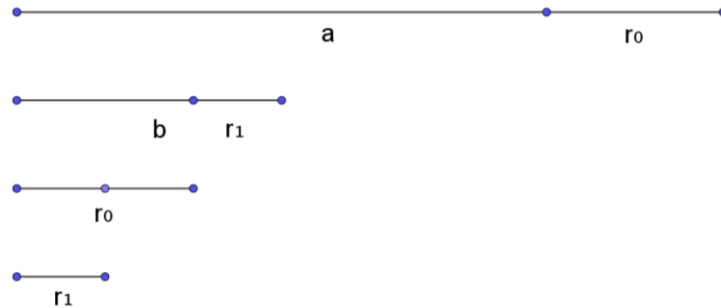
Se questo resto r_0 è nullo allora l'unità di misura comune ad a e b è semplicemente b .

Se invece r_0 non è nullo, si può procedere tra b e r_0 in modo analogo a come si è fatto con a e b :

r_0 può essere sottratto da b un numero n_1 di volte lasciando un resto r_1 più piccolo di r_0 , eventualmente nullo. Se il nuovo resto è nullo, allora r_0 è l'unità di misura comune cercata.

Se r_1 non è nullo il procedimento può quindi continuare con i segmenti r_0 e r_1 , ottenendo un nuovo resto r_2 più piccolo di r_1 (ed eventualmente nullo).

Se r_2 non è nullo il procedimento continua.



Si ottiene per i resti la formula di ricorrenza

$$r_{i-1} = n_{i+1} r_i + r_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

in cui i diversi quozienti n_i formano lo “spettro” del rapporto $\frac{a}{b}$.

L’incommensurabilità di a e b , cioè l’assenza di un’unità di misura comune, sarebbe allora la conseguenza di una dimostrazione che il procedimento può non avere termine, cioè che ogni resto r_i è diverso da zero e che lo spettro è composto da infiniti numeri interi.

In merito all’incommensurabilità, in particolare tra diagonale e lato del quadrato, Aristotele, negli *Analitici Primi*, con l’intento di illustrare un’applicazione del metodo di dimostrazione per assurdo (*reductio ad absurdum*) fa riferimento proprio a tale problema.

La dimostrazione consiste nel provare che, se diagonale e lato fossero commensurabili, allora uno stesso numero sarebbe contemporaneamente pari e dispari.

«[...] tutti coloro che ottengono una conclusione mediante l’impossibile, sillogizzano il falso, mentre la tesi iniziale la provano procedendo da un’ipotesi, quando cioè dalla posizione della contraddittoria della tesi conseguua qualcosa di impossibile, come nel caso in cui, ad esempio, si provi che la diagonale del quadrato è incommensurabile con

Lo scandalo dell'incommensurabilità tra $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ e $\acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau\omicron\varsigma$

il lato, perché, se viene posta commensurabile, i numeri dispari risultano uguali a quelli pari» (ARISTOT. An Pr. I 23, 41 a 23-27, trad. it. di M. Mignucci).

È possibile costruire agevolmente tale prova (Boyer,1990):

Sia il rapporto tra diagonale e lato di un quadrato esprimibile attraverso il rapporto

$$\frac{p}{q}, \text{ con } p \text{ e } q \text{ numeri interi}$$

e sia questo rapporto ridotto ai minimi termini.

Per il teorema di Pitagora, indicati con d la diagonale e con l il lato, risulta:

$$d^2 = 2l^2 \Rightarrow \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad (3.1)$$

p^2 è dunque un numero pari, da cui anche **p è pari** (se fosse dispari, il suo quadrato sarebbe dispari).

Dunque si può scrivere

$$p = 2m$$

Essendo il rapporto $\frac{p}{q}$ ridotto ai minimi termini ed essendo p pari, **q deve essere dispari** altrimenti p e q avrebbero il 2 come divisore comune.

Dunque dalla (3.1) è possibile scrivere:

$$4m^2 = 2q^2 \Rightarrow 2m^2 = q^2 \Rightarrow q^2 \text{ è pari} \Rightarrow \mathbf{q \text{ è pari.}}$$

Ma poiché **q è dispari**, l'ipotesi fatta porta a una contraddizione.

In uno scolio all'ultima proposizione del libro X degli Elementi di Euclide è sviluppata una dimostrazione coerente con il procedimento aristotelico; tuttavia, gli

editori moderni a partire dal 1829 l'hanno omessa dal testo euclideo non trovando alcun legame tra la dimostrazione e il resto del libro X.

Oggi nei testi di geometria si propone una dimostrazione basata sulla fattorizzazione unica dei numeri interi: la relazione

$$2m^2 = n^2$$

non può sussistere poiché nella fattorizzazione di n^2 il fattore 2 deve comparire un numero pari di volte (eventualmente zero volte), mentre nella fattorizzazione di $2m^2$ lo stesso fattore 2 appare un numero dispari di volte (sicuramente almeno una volta).

La maggior parte degli studiosi è concorde nel ritenere che il primo caso di incommensurabilità scoperto sia stato proprio quello tra lato e diagonale di un quadrato ma la questione rimane tuttora aperta e, anche in merito alle diverse dimostrazioni di incommensurabilità, si tratta in ogni caso solo di ricostruzioni più o meno plausibili.

4. Il rapporto tra grandezze in Euclide

Mentre negli ambienti pitagorici le grandezze venivano rappresentate con sassolini o calcoli, al tempo di Euclide si assiste ad un completo cambiamento del punto di vista: le grandezze non vengono più generalmente associate a numeri o sassolini, ma a segmenti.

Negli *Elementi* gli stessi numeri interi vengono rappresentati con segmenti.

Però i numeri continuano ad avere il carattere di discontinuità, a differenza delle grandezze continue (che già erano considerate tali in gran parte della matematica pre-ellenica e pitagorica): le grandezze costituiscono qualcosa di completamente separato dal numero e devono essere trattate col metodo geometrico.

È proprio il problema dell'incommensurabilità a determinare uno spostamento nell'orientamento della matematica verso la geometria. Con Euclide sembra che non sia più il numero a governare il mondo ma la geometria.

I rapporti tra grandezze incommensurabili non sono considerati dei numeri, e i numeri irrazionali riceveranno solo dopo diversi secoli e varie elaborazioni la qualifica di numeri, con pari dignità rispetto ai numeri razionali.

Con *Gli Elementi* di Euclide, opera composta intorno al 300 a. C., si assiste ad uno stadio più maturo del pensiero matematico greco, caratterizzato da un maggior rigore.

Mentre i popoli antichi si erano occupati della matematica solo per scopi pratici, per i greci del periodo classico la matematica diventava un importante strumento di

Lo scandalo dell'incommensurabilità tra $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ e $\acute{\alpha}\rho\eta\eta\tau\omicron\varsigma$

conoscenza, la “strada maestra” per comprendere la vera essenza della realtà indipendentemente dal problema dell'applicabilità.

A tal proposito un aneddoto racconta che Euclide, a un uomo che gli chiedeva a cosa serve la matematica, abbia risposto in questo modo rivolgendosi ad uno schiavo: «*Date a quest'uomo un paio di monete d'oro. Egli studia per trarne profitto*».

Nel lavoro di Euclide si può riscontrare una più precisa organizzazione dei concetti relativi al continuo geometrico; tali concetti rimarranno pressoché invariati per quasi duemila anni e da essi attingeranno Cantor e Dedekind, nel secolo XIX, per dare un assetto teorico definitivo all'insieme dei numeri reali.

In particolare, nei libri V e X de “*Gli Elementi*” si possono rintracciare le caratteristiche essenziali che costituiscono l'essenza della continuità della retta reale.

Nel libro V de *Gli Elementi* Euclide espone la teoria delle proporzioni tra grandezze, siano esse commensurabili o incommensurabili, teoria notoriamente attribuita al matematico ed astronomo Eudosso di Cnido (prima metà del IV secolo a. C), contemporaneo di Platone.

In tale libro la definizione di rapporto tra grandezze omogenee è data in termini intenzionalmente vaghi e ciò per superare il problema legato all'esistenza di grandezze incommensurabili, per le quali un rapporto non può esprimersi come rapporto tra due numeri interi:

L.V Def. III: rapporto (o ragione o, in greco, $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$) tra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità.

È evidente che in tale descrizione egli non pretende di definire il rapporto ma vuole enunciare una condizione, l'omogeneità, alla quale le grandezze devono soddisfare perché si possa parlare di rapporto tra loro. E l'omogeneità viene considerato un concetto primitivo.

La descrizione potrebbe essere la base di una ingegnosa teoria del continuo ripresa in termini molto simili da Richard Dedekind con il concetto di numero reale come “sezione” (1887).

Più precisamente, Euclide non dice *che cosa è un rapporto*, ma si limita a specificare le condizioni per cui due rapporti sono uguali.

La definizione poggia sul concetto di proporzione, e si riferisce sia al caso delle grandezze commensurabili che a quello delle grandezze incommensurabili.

L.V Def V:

Si dice che quattro grandezze a, b, c, d, sono nello stesso rapporto, una prima rispetto a una seconda e una terza rispetto a una quarta quando, comunque si prendono due equimultipli della prima e della terza grandezza ma ed mc e due equimultipli della seconda e della quarta nb ed nd, dall'essere

$$ma \geq nb \quad \text{si abbia, in corrispondenza} \quad mc \geq nd$$

Ovviamente la condizione relativa al segno di uguaglianza si riferisce al caso delle grandezze commensurabili; in tal caso la definizione è sovrabbondante: è sufficiente trovare un'unica coppia di valori m ed n per la quale si verifichi la concordanza con il segno di uguaglianza per poter concludere che i due rapporti sono uguali:

$$ma = nb \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \quad \text{e} \quad mc = nd \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{n}{m}$$

Nel caso di grandezze incommensurabili, invece, il segno di uguaglianza non potrà mai presentarsi, cioè la definizione si riduce alle concordanze dei segni

$$ma \geq nb \quad \text{e} \quad mc \geq nd \quad (4.1)$$

dove m ed n devono assumere tutti i possibili infiniti valori.

Ad esempio, in presenza del segno $>$ (maggiore) nella (4.1),

$$ma > nb \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{n}{m} \quad \text{e} \quad mc > nd \Rightarrow \frac{c}{d} > \frac{n}{m}$$

$\frac{n}{m}$ offre un valore approssimato per difetto tanto del primo rapporto che del secondo, cioè i due rapporti $a:b$ e $c:d$ hanno un valore razionale approssimato per difetto in comune.

Perché i due rapporti siano uguali, occorre che la totalità dei valori approssimati per difetto del primo coincida con la totalità dei valori approssimati per difetto del secondo.

Il rapporto fra due grandezze incommensurabili risulta dunque individuato dalla totalità infinita dei rapporti numerici che lo approssimano per difetto (o per eccesso): non potendo essere per definizione uguale a un rapporto fra numeri interi, rimane un'entità sospesa tra due successioni illimitate di rapporti numerici n/m .

Secondo la definizione è univocamente determinato ma non si dice che cosa esso sia effettivamente, né si dà una valutazione effettiva dei numeri n ed m

In realtà Euclide, pur non considerando i rapporti come numeri, dà per l'uguaglianza di rapporti una definizione analoga a quella che oggi si dà per i numeri reali: attualmente noi diciamo che, affinché due numeri reali siano uguali, occorre che essi determinino la stessa sezione nell'insieme dei numeri razionali

Concludendo, con i numeri, al rapporto tra grandezze incommensurabili ci si poteva solo "avvicinare", trovandone **approssimazioni** per eccesso o per difetto.

Dal punto di vista geometrico, poiché tutto ciò che è *esatto* è anche *geometrico*, i greci pensano bene di tramutare un rapporto tra segmenti incommensurabili in un

rapporto tra segmenti commensurabili passando ai quadrati o ai cubi (*commensurabilità in lunghezza e in potenza*).

5. L'incommensurabilità negli “Elementi” di Euclide

I concetti di commensurabilità e incommensurabilità tra grandezze vengono approfonditi e raffinati da Euclide nel libro X de *Gli Elementi*.

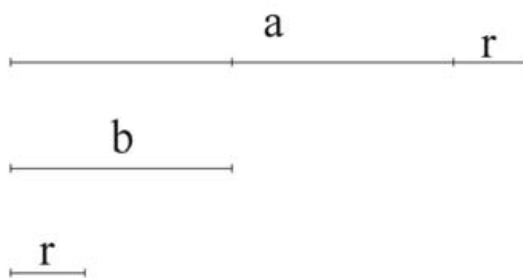
L.X Def I: *Si dicono grandezze commensurabili quelle che sono misurate da una stessa misura, ed incommensurabili quelle di cui non può esistere nessuna misura comune.*

Nello stesso libro Euclide enuncia la

Prop. X,2:

Se di due grandezze disuguali veniamo a sottrarre, sempre e vicendevolmente, la minore dalla maggiore [quante volte sia possibile], e quella [ogni volta] restante non misura mai la grandezza ad essa precedente, le grandezze saranno incommensurabili.

La proposizione offre dunque uno strumento per stabilire se due grandezze a e b sono incommensurabili



Si sottrae dalla grandezza maggiore a , tante volte quanto si può, la grandezza b ottenendo un resto r minore di b . A questo punto si sottrae quante volte è possibile r da b ottenendo un resto r_1 minore di r . Il nuovo resto r_1 si sottrae da r ottenendo il resto r_2 più piccolo di r_1 , e così via.

Si tratta ancora una volta della procedura dell'*antanairesis*, cioè dell'algoritmo euclideo per il calcolo del M.C.D. tra due numeri, applicato alle grandezze. Ma mentre

nel caso dei numeri, il procedimento ha sempre termine, ciò può non avvenire nel caso delle grandezze.

Nella successiva **Prop. X,3** Euclide dimostra che, se il procedimento ha termine, le grandezze sono commensurabili e l'ultimo resto (cioè, quello contenuto esattamente nel resto precedente) è la massima misura comune tra le due grandezze considerate.

Ma se il procedimento non ha termine, se cioè non accade mai che un resto sia contenuto esattamente nel resto precedente un numero intero di volte, allora le grandezze a e b sono incommensurabili tra loro.

Il fatto che il procedimento non abbia mai termine e che possa essere spinto avanti quanto si vuole, richiede che le grandezze siano inesauribili per sottrazione nel senso che vi sia sempre possibilità di sottrarre ancora.

Nel caso dei segmenti questa inesauribilità della sottrazione ci garantisce che tra due punti esiste sempre un punto intermedio, cioè un segmento di retta, per quanto piccolo, contiene infiniti punti.

6. Il rapporto tra grandezze incommensurabili come frazione continua

Il procedimento espresso nella **Prop. X,2**, se interpretato alla luce delle moderne notazioni, conduce direttamente alla nozione di *frazione continua illimitata*, individuando una successione di rapporti razionali che approssimano il rapporto tra le due grandezze, e si addensano sempre più a un valore *limite*.

Dette a e b due grandezze omogenee ed archimedee con $a > b$, se b misura a , cioè, è possibile sottrarre un numero finito di volte da a lasciando resto 0, allora il procedimento si arresta subito e b stesso è il sottomultiplo comune.

Se invece questo non accade, sottraendo b da a il massimo numero n_0 di volte possibili, si perviene ad un resto r_0 , e risulta:

$$a = n_0 b + r_0 \quad \text{con} \quad 0 < r_0 < b \quad 6.1$$

Ebbene n_0 rappresenta un'approssimazione per difetto del rapporto a/b .

Il passo successivo dell'*antifairesi* consiste nel sottrarre quante volte è possibile r_0 da b : se tale sottrazione dà per resto 0, cioè se r_0 è sottomultiplo di b , il procedimento si arresta ed r_0 è il sottomultiplo comune ad a e b .

Se invece dalla sottrazione si ottiene un nuovo resto r_1 , allora si scrive:

Lo scandalo dell'incommensurabilità tra $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ e $\acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau\omicron\varsigma$

$$b = n_1 r_0 + r_1 \quad \text{con } 0 < r_1 < r_0 \quad 6.2$$

Dalla 6.1, dividendo per b, si ha:

$$\frac{a}{b} = \frac{n_0 b + r_0}{b} = n_0 + \frac{r_0}{b} \quad 6.3$$

e, da 6.2, dividendo per r_0 si ha:

$$\frac{b}{r_0} = \frac{n_1 r_0 + r_1}{r_0} = n_1 + \frac{r_1}{r_0} \quad 6.4$$

Sostituendo nella 6.3, si ha:

$$\frac{a}{b} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{r_1}{r_0}} \quad 6.5$$

Se si ripete il procedimento con il resto $r_1 < r_0$ si ha:

$$\bullet \quad r_0 = n_2 r_1 + r_2$$

poi con $r_2 < r_1$, e così via, si ottiene:

$$\begin{aligned} \bullet \quad r_1 &= n_3 r_2 + r_3 \\ \bullet \quad r_2 &= n_4 r_3 + r_4 \\ \bullet \quad r_3 &= n_5 r_4 + r_5 \\ \bullet \quad r_4 &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Completando di volta in volta la 6.5, nel caso in cui le grandezze non siano commensurabili (**Prop.X,II**), si perviene alla frazione continua illimitata:

$$\frac{a}{b} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{r_1}{r_0}} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{r_3}{r_2}}}} = n_0 + \dots$$

I termini della successione:

$$s_0 = n_0$$

$$s_1 = n_0 + \frac{1}{n_1}$$

$$s_2 = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}}$$

$$s_3 = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3}}}$$

$$s_4 = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4}}}}$$

.....

cioè i convergenti della funzione continua, sono numeri razionali che si addensano sempre più intorno al valore a/b ; non essendo ancora disponibili gli strumenti dell'analisi, il rapporto tra a e b doveva restare un concetto postulato.

In realtà da ogni rapporto tra grandezze incommensurabili è possibile estrarre una successione di numeri razionali che si addensano gli uni sugli altri e approssimano in maniera sempre più precisa il rapporto a/b .

I termini di posto pari approssimano per difetto e i termini di posto dispari approssimano per eccesso il rapporto tra le grandezze incommensurabili, cioè:

$$s_{2k} < \frac{a}{b} < s_{2k+1}$$

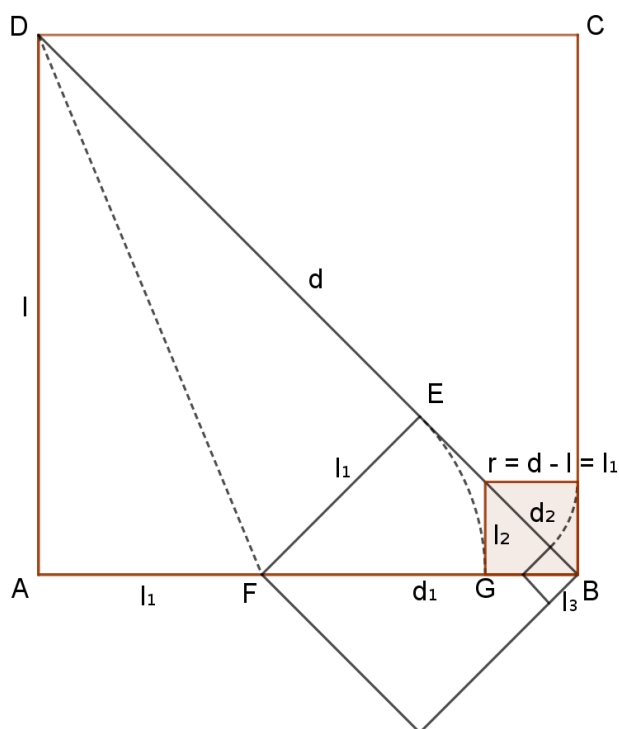
Le due sottosuccessioni, quella costituita da elementi di indice pari e quella costituita dagli elementi di indice dispari, individuano una famiglia di intervalli “inscatolati”, la cui ampiezza diventa sempre più piccola, che intrappolano il rapporto $\frac{a}{b}$.

7. Una dimostrazione dell'incommensurabilità mediante la Prop X.2

La **Prop X.2** consente di dimostrare, per via geometrica, l'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato

Dato il quadrato ABCD riportato nella figura seguente, portiamo il lato l sulla diagonale d ottenendo il segmento $DE = AD = l$.

*Lo scandalo dell'incommensurabilità tra **άλογος** e **άρρητος***



La perpendicolare a BD condotta per E incontra il lato AB nel punto F. Il triangolo BEF è rettangolo isoscele sulla base FB quindi si ha:

$$BE = EF = r$$

Dall'uguaglianza dei triangoli rettangoli DAF e DEF si ha che è anche

$$AF = r$$

Consideriamo ora il quadrato Q_1 di lato $BE = r (= l_1)$ e diagonale $FB = d_1$ e ripetiamo la procedura precedente:

portiamo l_1 sulla diagonale d_1 ottenendo il segmento $FG = l_1$ e dal punto G conduciamo la perpendicolare a d_1 ottenendo un nuovo quadrato più piccolo Q_2 di lato l_2 e diagonale d_2 .

Reiterando ancora si ottiene una successione infinita di quadrati con lati sempre più piccoli, ciascuno dei quali ha per lato la differenza tra diagonale e lato del quadrato precedente:

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, \dots$$

Il procedimento non ha mai fine e, poiché nella procedura seguita i lati di ciascun quadrato, come si evince facilmente dalla figura, corrispondono ai resti ottenuti dal

sottrarre nell'ordine (quante volte è possibile) il lato del quadrato assegnato dalla diagonale, il resto ottenuto dal lato, poi ancora l'ulteriore resto dal resto precedente e così via, in base alla **Prop.X,2** lato e diagonale sono incommensurabili.

8. Una dimostrazione alternativa

In relazione sempre alla figura del paragrafo precedente, supponiamo che l e d siano commensurabili: esisterebbe un sottomultiplo comune u che entra un numero intero m di volte in l ed un numero intero n di volte in d :

$$l = m \cdot u \qquad d = n \cdot u \qquad 8.1$$

Riportando il lato AD sulla diagonale BD e ripercorrendo la costruzione fatta nel paragrafo precedente, si consideri il quadrato Q_1 di lato l_1 e diagonale d_1 :

$$l_1 = d - l = n \cdot u - m \cdot u = (n - m) \cdot u = m_1 \cdot u$$

$$d_1 = l - l_1 = m \cdot u - (n - m) \cdot u = (2m - n) \cdot u = n_1 \cdot u$$

$$\text{con } m_1 < m \quad \text{ed} \quad n_1 < n \quad (\text{essendo } l_1 < l \text{ e } d_1 < d)$$

Anche il lato e la diagonale del quadrato più piccolo Q_1 hanno u come sottomultiplo comune.

Partendo ora dal quadrato Q_1 è possibile reiterare il procedimento riportando nuovamente il lato sulla diagonale e ottenendo un quadrato più piccolo. Reiterando ancora si ottiene la successione infinita di quadrati con lati sempre più piccoli:

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, \dots\dots\dots$$

Lato e diagonale di tutti questi quadrati sarebbero tutti multipli di u , ma i numeri che esprimono via via le misure rispetto a u di tali segmenti diventano sempre più piccoli nel passaggio da un quadrato a un altro: questo conduce ad un assurdo perché essendo tali numeri interi positivi, dopo un numero finito di passi si perverrebbe allo 0 come numero esprime la misura rispetto a u del lato, mentre il processo di formazione di quadrati sempre più piccoli può essere proseguito indefinitamente.

La contraddizione nasce proprio dall'avere ipotizzato la commensurabilità del lato e della diagonale del quadrato di partenza $ABCD$.

9. Un'ultima riflessione

Nella dimostrazione dell'incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato secondo la **Prop. X,2**, si presuppone che tutti quei quadrati che si costruiscono si possano andare rimpicciolendo sempre di più, senza mai arrivare ad un ultimo quadrato.

Si richiede cioè, implicitamente, che tra due punti di un segmento (come A e B) si possa inserire sempre un punto intermedio (come F), e questo implica che un segmento di retta, per quanto piccolo, contiene infiniti punti privi di dimensioni.

Quindi i punti, dovendo essere contenuti in numero infinito in un segmento finito, devono essere necessariamente privi di dimensioni, cioè *enti geometrici idealizzati*: ma se tale idea sembra essere scaturita proprio dalla scoperta dell'incommensurabilità tra diagonale e lato di un quadrato, la dimostrazione di tale incommensurabilità non poteva essere fatta secondo la **Prop. X,2** senza incorrere in una sorta di *petitio principii*. [cfr. A. Frajese-L. Maccioni: *Gli elementi di Euclide*]

Forse è per questo motivo che, né presso Euclide, né presso altri matematici greci si trova la dimostrazione dell'incommensurabilità di lato e diagonale di un quadrato secondo tale metodo dell'algoritmo euclideo che, a parte una sua applicazione indiretta nella **Prop. X,3**, non viene mai più usato negli *Elementi*.

Bibliografia

- [1] Boyer C. (1990). *Storia della matematica*, Milano: Oscar Mondadori.
- [2] Bergamini M., Barozzi G. (2019). *Corso di matematica*, Bologna: Zanichelli.
- [3] Carella R. (2017). I numeri reali: dalle grandezze incommensurabili all'aritmetizzazione dell'Analisi.
<https://amslaurea.unibo.it/13515/1/i%20numeri%20reali%20dalle%20grandezze%20incommensurabili%20all'aritmetizzazione%20dell'analisi.pdf>
- [4] Casolaro F., Della Vecchia G. "Mathematics in Greek Civilization: Significant Current Moments", *Science & Philosophy*" Volume 5, Number 2, 2017, pp 95-104.
- [5] Catastini L. Il rapporto, il continuo, il discreto:
<https://www.mat.uniroma2.it/LMM/BCD/SSIS/Neurosc/Rapporto/Rapporto.htm>.
- [6] Euclide "*GLI ELEMENTI*" a cura di Frajese A. e Maccioni L. (1977). Torino: UTET.
- [7] Frajese A. (1954). La scoperta dell'incommensurabile nel dialogo "Menone".
Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9, n.1, pp. 74–80.
- [8] Manara C.F. (1991). Il problema del continuo geometrico. *Appunti della conferenza del 21/02/1991*
<https://www.carlofelicianmanara.it/public/file/File/Biografia/1Il%20problema%20del%20continuo%20nella%20geometria%20classica.pdf>

- [9] Morris K. (1972). *Storia del pensiero matematico*, v I., Torino: Einaudi.
- [10] Meschkowski H. (1973). *Mutamenti nel Pensiero Matematico*, Torino: Boringhieri
- [11] Nicotra L. (2003). Le grandezze incommensurabili e la crisi della monade pitagorica:
<https://www.controluce.it/notizie-old-html/giornali/a12n08/22-23-scienza-Leipotesinoneuclidee.htm>
- [12] Vincenzi G. (2021). Alcune esperienze laboratoriali sulla incommensurabilità, *Atti del Congresso FIM: Matematica 2021. Nuove proposte didattiche*.
- [13] Zellini P. (1996). La costruzione del numero:
<https://www.galileonet.it/la-costruzione-del-numero/>