

RATIO

mathematica

Journal of Foundations and Applications of Mathematics / Rivista di Fondamenti e Applicazioni della Matematica

CHIEF EDITOR

Franco EUGENI

Department of Communication Science/ University of Teramo /Italy/

ADVISORY EDITORS

Luciano D'AMICO/ Department of Communication / Science University of Teramo/ Italy

Antonio MATURO/ Department of Social Science / University of Pescara/ Italy

Ioan TOFAN/ Department of Mathematics/ University of Iasi / Romania

EDITORIAL BOARD

Albrecht Beutelspacher/Department of Mathematics/University of Gießen/Germany

Piergiulio Corsini/Department of Mathematics/ University of Udine /Italy

Ball Khishan Dass/Department of Mathematics/University of Delhi/India

Mario Gionfriddo/Department of Mathematics/University of Catania/Italy

Fabio Mercanti/Department B.E.S.T./ "Politecnico" of Milano/Italy

Renato Migliorato/Department of Mathematics/University of Messina/Italy

Consolato Pellegrino/Department of Mathematics/University of Modena e Reggio/Italy

Aniello Russo Spena/Department of Hydraulics/University of L'Aquila/Italy

Maria Scafati Tallini/Department of Mathematics/University of Roma /La Sapienza Italy

Luca Tallini/Department of Communication Science/University of Teramo /Italy

Horia Nicolai Teodorescu/Dept. of Applied Electronics and Intelligent Systems/Iasi/Romania/

Thomas Vouglouklis/Department of Mathematics/University of Alexandroupolis/Greece

18/08

ISSN: 1592-7415

Existence and Policy Effectiveness in Feedback Nash LQ-Games^{*}

Nicola Acocella

University of Rome *La Sapienza*

and

Giovanni Di Bartolomeo

University of Teramo

September 2007

Abstract. This paper illustrates how the classical theory of economic policy can profitably be used to verify some properties of the Linear Nash Feedback Equilibrium in difference LQ-games. In particular, we find that both a necessary condition for the equilibrium existence and a sufficient condition for policy ineffectiveness can be defined in the terms of the simple Tinbergen counting rule.

JEL Classification: C72, E52, E61.

Keywords: LQ-policy games, policy ineffectiveness, controllability, Linear Feedback Nash Equilibrium existence.

1. Introduction

One fundamental question of many economic debates is that of effectiveness of public or private agents' action. The most prominent examples are the long debates on the neutrality of monetary and fiscal policy. However, the issue is not exclusive of economic policy; on the contrary, ineffectiveness has to be interpreted in a broader sense. For instance, debates on the effectiveness of advertising strategies in marketing or firm's price policies are related to a similar general problem.

^{*} We are grateful to J. Capaldo, J. Engwerda, A. Hughes Hallett, R. Neck for their comments. Nicola Acocella acknowledges the financial support of the University of Rome La Sapienza. Giovanni Di Bartolomeo acknowledges the financial support of the European Union (Marie Curie Programme). This research project has been supported by a Marie Curie Transfer of Knowledge Fellowship of the European Community's Sixth Framework Programme under contract number MTKD-CT-014288.

In so far as the decision-maker's action does not take account of the reactions of other agents (parametric approach), the debate is a purely empiric issue. However, especially after Lucas' (1976) criticism, a parametric approach can hardly be justified and a strategic one seems to be more coherent in almost all economic applications. In that case, the need for describing the mechanisms leading to ineffectiveness in general terms becomes a crucial theoretical modeling issue.

Some recent studies in that direction provide some general conditions for policy ineffectiveness and equilibrium existence in static LQ-games (see Acocella and Di Bartolomeo, 2004, 2006). This new approach shows how the classical theory of economic policy can profitably be used to define some general properties of policy games. This paper is one of the first attempts to extend this approach to a context of dynamic games.¹ More specifically, we consider feedback equilibrium in LQ-difference games and illustrate how a necessary condition for the equilibrium existence and a sufficient condition for policy ineffectiveness can be defined in terms of a simple counting rule of targets and instruments.

In a companion paper, Acocella *et al.* (2007) have investigated the same problem in the case of sparse-matrix dynamic systems, when, written in its structural form, a large dynamic system governing the economy relates each endogenous variable to just a few other endogenous variables and a small number of lagged endogenous variables, control variables, or predetermined variables. In such a context, Acocella *et al.* (2007) provide an example to illustrate the usefulness of this line of research by considering a model incorporating a Taylor rule, a description of expectations formation and a relation that can be interpreted as either a dynamic open-economy Phillips curve or a New-Keynesian IS curve with dynamics. Small variations in the model specification can bring, or take away, policy effectiveness – allowing the policy makers the possibility to disagree on none, one or several of the target values in their (common) targets – and possibly make institutional and policy independence counterproductive.

This paper focuses on a case opposite to that of a sparse matrix system, i.e. a case of full rank matrices, where all the economic variables are highly interdependent.

¹ Difference and differential games are extensively studied and used in many economic applications. For applications to macroeconomic theory, see among others Levine and Brociner (1994), Neck and Dockner (1995), Aarle *et al.* (1997), Başar *et al.* (1988), Levine and Smith (2000), Engwerda *et al.* (2002), Pappa (2004), Di Bartolomeo *et al.* (2006), Plasmans *et al.* (2005). For a more complete overview considering also different areas, see Dockner *et al.* (2000). See Başar and Olsder (1995), Dockner *et al.* (2000), Engwerda (2000a, 2000b) for some methodological aspects.

The outline of the paper is as follows. Section 2 defines basic concepts and introduces a formal framework to describe LQ-difference games. Section 3 derives two theorems, stating a sufficient condition for policy ineffectiveness and a necessary condition for the equilibrium existence in the traditional Tinbergen's terms. The paper ends with some concluding remarks.

2. Controllability and LQ-Policy Games

2.1 Some Preliminary Definitions

In order to apply the traditional theory of economic policy to study the properties of Nash feedback equilibrium, we first recall the traditional Tinbergen's *golden rule*.

Definition (Golden Rule): *A policymaker satisfies the golden rule of economic policy if the number of its independent instruments equals the number of its independent targets.*

Second, we need to redefine policy ineffectiveness, since its classical definition² cannot be maintained in the realm of policy games as policy instruments are endogenous variables, whose values really depend on the preferences of the decision-makers. The following definition of ineffectiveness can be accepted instead.³

Definition (ineffectiveness): *A policy is ineffective if the equilibrium values of the targets are never affected by changes in the parameters of its criterion.*

We are now ready to introduce our policy game.

2.2 A formal framework

We consider the problem where n players try each to minimize their respective quadratic performance criterion. The game is played for T periods, where T may be arbitrarily large.

Each player controls a different set of inputs to a single system, which is described by the following difference equation:

$$(1) \quad x(t+1) = Ax(t) + \sum_{i \in N} B_i u_i(t)$$

² The classical definition of policy ineffectiveness implies that autonomous changes in policymaker's instruments have no influence on the targets

³ See Gylfason and Lindbeck (1994).

where N is the set of the players; $x \in \mathbb{R}^M$ is the vector of the states of the system; $u_i \in \mathbb{R}^{m(i)}$ is the (control) variable vector that player i can manipulate; $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$ and $B_i \in \mathbb{R}^{M \times m(i)}$ are full rank matrices describing the constant system parameters.

The performance criterion player $i \in N$ aims to minimize is

$$(2) \quad J_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{t=0}^T (x(t) - \bar{x}_i)' Q_i (x(t) - \bar{x}_i)$$

where $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^M$ is a vector of given target values and Q is an appropriate constant symmetric positive definite matrix of weights. We assume that $x_i \neq x_j$ for all $i \in N \neq j \in N$. For reasons that we shall clarify we keep targets and instruments formally separate. However, in order to take account of the costs or limits in the use of some instruments, we could simply introduce an additional loss into equation (2) due to deviations of the instruments from the vector of their target values or equality (static) constraints concerning the instruments into equation (1).

3. Controllability, Ineffectiveness and Equilibrium Existence

Controllability, in the terms of the *Golden Rule* of economic policy, ineffectiveness and Linear Feedback Nash equilibrium existence are related together by the following two theorems.

Theorem 1 (ineffectiveness): *If one (and only one) player satisfies the golden rule, all the other players' policies are ineffective.*

Theorem 2 (non-existence): *No Linear Feedback Nash Equilibrium⁴ of the policy game described exists if at least two players satisfy the Golden Rule (unless they share the same target values).*

The proofs of the theorems are simple and can be combined into a single one.

Proof. We start by *guessing* that the policymakers' value functions are quadratic,⁵

$V_i(x) = (x(t) - \bar{x}_i)' P_i (x(t) - \bar{x}_i)$, where P_i are positive definite symmetric matrices (for the

⁴ We restrict ourselves to the case of the Feedback Nash equilibrium based on a linear rule as defined in Engwerda (2006). In principle our results can be extended to the case of non-linear feedback rules by assuming an affine function as value function. However, the task is not without computational costs because the difficulties of computing non linear rules, which usually are infinite (see Tsutsui and Mino, 1990). See also Dockner *et al.* (2000) and Fujiwara and Matsueda (2007), who also show how to derive the Markov Feedback Nash equilibrium from a linear rule. In addition notice that the linear rule result to be optimal for the case of a finite period LQ games (see Başar *et al.*, 1988; or Başar and Olsder, 1995, chapter 6).

sake of simplicity, time indexes will be omitted). By using the transition law to eliminate the next period state, the n Bellman equations become:

$$(3) \quad (x - \bar{x}_i)' P_i (x - \bar{x}_i) = \min_{u_i} \left\{ (x - \bar{x}_i)' Q_i (x - \bar{x}_i) + \left(Ax + \sum_{i \in N} B_i u_i - \bar{x}_i \right)' P_i \left(Ax + \sum_{i \in N} B_i u_i - \bar{x}_i \right) \right\}$$

A Linear Feedback Nash Equilibrium must satisfy the first-order conditions:

$$(4) \quad B_i' P_i B_i u_i = -B_i' P_i (Ax - \bar{x}_i) - B_i' P_i \sum_{j \in N/i} B_j u_j$$

to which the following policy rule corresponds:

$$(5) \quad u_i = -(B_i' P_i B_i)^{-1} B_i' P_i (Ax - \bar{x}_i) - (B_i' P_i B_i)^{-1} B_i' P_i \sum_{j \in N/i} B_j u_j$$

Now, to demonstrate Theorem 1, we focus on player 1 without loss of generality. If player 1 satisfies the *Golden Rule*, then $m(1) = M$ and $B_1 \in \mathbb{R}^{M \times M}$ is a square matrix. Equation (5) becomes:

$$(6) \quad u_1 = -B_1^{-1} (Ax - \bar{x}_1) - B_1^{-1} \sum_{j=2}^n B_j u_j$$

which implies:

$$(7) \quad x(t+1) = \bar{x}_1 \text{ for } t \in [0, +\infty]$$

Thus, if a Linear Feedback Nash Equilibrium exists, the value of the target variables only depends on the preferences of player 1, since, in this case, condition (6) must be verified for all $t \in [0, +\infty]$. This completes the proof of Theorem 1. As to Theorem 2, we only need to show that, if also another player (e.g. player 2) satisfies its Golden Rule, the equilibrium does not exist.

As above, if also player 2 satisfies its Golden Rule, the following reaction function must hold in equilibrium:

$$(8) \quad u_2 = -B_2^{-1} (Ax - \bar{x}_2) - B_2^{-1} B_1 u_1 - B_2^{-1} \sum_{j=3}^n B_j u_j$$

By plugging equation (8) into equation (6), it is clear that they cannot be mutually satisfied unless:

$$(9) \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0$$

⁵ Recall that we are looking for the Linear Feedback Nash equilibrium. See Engwerda (2006: Section 4) for more technical details. See also Sargent (1987: 42-48) or Ljungqvist and Sargent (2004: Chapter 5) for the single policymaker case.

which is not true in general, since $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$. ■

Theorem 1 gives a sufficient condition for policy ineffectiveness, but this does not assure the equilibrium existence, which may fail to occur. By contrast, Theorem 2 gives a necessary condition for the equilibrium existence since it states a sufficient condition for non-existence. However, it may be not sufficient.⁶ Note that if Theorem 1 is satisfied, Theorem 2 is not. This directly derives from the sentence in bracket in Theorem 1.

3. The instrument cost issue

It is useful to compare our results to a well-known theorem of existence of Nash equilibrium, Dasgupta and Maskin's (1986), which relates existence to the costs of the instruments since, in a similar manner, we have expressed the necessary condition for existence in terms of an instruments/targets counting rule.

Dasgupta and Maskin (1986) shows that a sufficient condition for the Nash equilibrium existence is that the space of strategies of each player is convex and compact. If the players' controls are unbounded, the Nash equilibrium may not exist. In static linear quadratic games, the introduction of quadratic instrument costs would make them bounded, thus assuring equilibrium existence.

In our terms, the introduction of quadratic instrument costs would imply that the dimensions of matrices Q_i become $M + m(i)$. Thus, the number of instruments would always be less than that of targets, the system would be not controllable by any player and equilibrium would exist. It is worth noticing, however that Theorem 2 is more general than the mentioned theorem of existence, since that of instrument costs is a particular case.

4. Concluding Remarks

This paper represents a first attempt to generalize some recent results developed in static policy games to a dynamic context. In the fashion of the classical theory of economic policy, we have shown that if one player satisfies the well-known simple Tinbergen's counting rule

⁶ Existence is a rather complex matter in this context. Moreover, being in a dynamic system also stability is required. See Engwerda (2000a, 2000b).

(Golden Rule), either all the other players' policies are ineffective or no Linear Nash Feedback Equilibrium exists, without exact agreement on all the (dynamic) target values, (i.e., unless all the players satisfying the Golden Rule have equal targets values). In doing that, since difference games imply many technical complications, we have introduced a number of simplifications. Some of them are not crucial. Others cannot be easily relaxed. For instance, discounting, a finite time, and additive uncertainty can be easily introduced. Of course, in the case of stochastic games we should discuss our results in terms of expected values. We have also assumed that all the policy-makers share all the targets. However, our theorems are probably weak, in the sense that they are limit cases based on the strong concept of static controllability. It is well known, in fact, that in general fewer instruments than targets are needed to control a dynamic system. Once the theorems are reformulated in terms of dynamic controllability, by following Preston (1974) and Aoki (1975), it may be possible to define more general and less stringent conditions. This seems to be a promising line for future research.

References

- Aarle, B. van, A.L. Bovenberg, and M.G. Raith (1997), "Is There a Tragedy for a Common Central Bank? A Dynamic Analysis," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21: 417-447.
- Acocella, N. and G. Di Bartolomeo (2004), "Non-Neutrality of Monetary Policy in Policy Games," *European Journal of Political Economy*, 20: 695-707.
- Acocella, N. and G. Di Bartolomeo (2006), "Tinbergen and Theil Meet Nash: Controllability in Policy Games," *Economics Letters*, 90: 213-18.
- Acocella, N., G. Di Bartolomeo, and A. Hughes Hallett (2007), "Dynamic Controllability with Overlapping Targets: Or Why Target Independence May Not Be Good for You," *Macroeconomic Dynamics*, 11, 202-213.
- Aoki, M. (1975), "On a Generalization of Tinbergen's Condition in the Theory of Policy to Dynamic Models," *Review of Economic Studies*, 42: 293-296.
- Başar, T. and G.J. Olsder (1995), *Dynamic Noncooperative Game Theory*, second edition, Academic Press Limited, London.
- Başar, T., V. D'Orey, and S.J. Turnovsky (1988), "Dynamic Strategic Monetary Policies and Coordination in Interdependent Economies," *American Economic Review*, 78: 341-61.
- Dasgupta, P. and E. Maskin, (1986), "The Existence of the Equilibrium in Discontinuous Economic Games. I: Theory," *Review of Economic Studies*, 53: 1-26.

- Di Bartolomeo, G., J.C. Engwerda, J. Plasmans, B. van Aarle, and T. Michalak (2006), "Macroeconomic Stabilization Policies in the EMU: Spillovers Asymmetries and Institutions," *Scottish Journal of Political Economy*, 53: 461-483.
- Dockner, E., S. Jorgensen, N. Van Long, and G. Sorger (2000), *Differential Games in Economics and Management Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Engwerda, J.C. (2000a), "Feedback Nash Equilibria in the Scalar Infinite Horizon LQ-game," *Automatica*, 36: 135-139.
- Engwerda, J.C. (2000b), "The Solution Set of the N-Player Scalar Feedback Nash Algebraic Riccati Equations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45: 2363-2369.
- Engwerda, J.C. (2006), "Linear Quadratic Differential Games: An Overview," University of Tilburg, CentER Discussion Paper No. 110.
- Engwerda, J.C., B. van Aarle, and J. Plasmans (2002), "Cooperative and Non-Cooperative Fiscal Stabilisation Policies in the EMU," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26: 451-481.
- Fujiwara K. and N. Matsueda (2007), "On a Nonlinear Feedback Strategy Equilibrium of a Dynamic Game," *Economics Bulletin*, 3, No. 8.
- Gylfason, T. and A. Lindbeck (1994), "The Interaction of Monetary Policy and Wages," *Public Choice*, 79: 33-46.
- Ljungqvist L. and T. Sargent (2004), *Recursive Macroeconomic Theory*, second edition, The MIT Press, Cambridge.
- Levine, P. and A. Brociner (1994), "Fiscal Policy Coordination and EMU," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18: 699-729.
- Levine, P. and R. Smith (2000), "The Arms Trade Game: from Laissez Faire to a Common Defence Policy," *Oxford Economic Papers*, 52: 357-380.
- Lucas, R.E. (1976), "Econometric Policy Evaluation. A Critique," *Journal of Monetary Economics*, Supplement, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 1: 19-46.
- Neck, R. and E.J. Dockner (1995), "Commitment and Coordination in a Dynamic Game Model of International Economic Policy-Making," *Open Economies Review*, 6: 5-28.
- Pappa, E. (2004), "Do the ECB and the Fed Really Need to Cooperate? Optimal Monetary Policy in a Two-Country World," *Journal of Monetary Economics*, 51: 753-779.
- Plasmans, J., J.C. Engwerda, B. van Aarle, G. Di Bartolomeo, and T. Michalak (2005), *Dynamic Modeling of Monetary and Fiscal Cooperation Among Nations*, Springer, Berlin.
- Preston, A.J. (1974), "A Dynamic Generalization of Tinbergen's Theory of Policy," *Review of Economic Studies*, 41: 65-74.
- Sargent, T.J. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, Cambridge.
- Tsutsui, S. and K. Mino (1990), "Nonlinear Strategies in Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices," *Journal of Economic Theory*, 52: 136-161.

MONDI VIRTUALI: SECOND LIFE E LA SUA ECONOMIA

Franco Eugeni, Valentina Giunco e Laura Manuppella

Introduzione

Nell'arco di alcuni decenni le comunicazioni umane hanno subito rilevanti cambiamenti. Ci si chiede dove siano finiti carta e penna, se qualcuno li usa ancora per potersi scambiare messaggi a distanza. La vera distanza in realtà, è quella che l'uomo, complice delle sempre più sofisticate tecnologie, è riuscito ad abbattere con l'invenzione e l'utilizzo, oramai immancabile, delle tecnologie telematiche. Il canadese Marshall McLuhan, studioso di letteratura e teorico dei mezzi di comunicazione, descrisse nei primi anni Sessanta nel suo libro più noto, *Understanding Media* (il titolo in italiano è *Gli strumenti del comunicare*), la condizione dell'uomo moderno come quella dell'abitante di un "villaggio globale" intendendo che, grazie ai mezzi di comunicazione moderni, che consentono di congiungere tra loro "in tempo reale" i punti più lontani del pianeta, il mondo si è rimpicciolito, al punto da poter essere paragonato ad un villaggio. In realtà McLuhan dava alla sua metafora un significato più profondo: il villaggio globale e l'evoluzione degli strumenti di comunicazione sono il frutto di un processo rivoluzionario all'interno della società stessa, che ha portato all'evoluzione dei mezzi di comunicazione elettrici e all'evoluzione dell'uomo attraverso lo sviluppo di nuovi modi di comunicare.

Il virtuale e le comunità virtuali

Quando si parla di Realtà Virtuale il primo pensiero che si ha, è rivolto ad un computer. Ma riflettendo bene la Realtà Virtuale la viviamo ogni giorno nei sogni. Quando sogniamo, infatti, noi viviamo una specie di Realtà Virtuale poiché ci troviamo in un mondo nel quale siamo completamente immersi: possiamo muoverci, parlare, guardare, a volte addirittura volare. Ed è proprio attraverso il sogno che possiamo esprimere al meglio le nostre pulsioni più profonde perché non abbiamo vincoli e possiamo fare idealmente qualunque cosa e vivere qualunque esperienza, anche al di fuori delle regole fisiche che governano la realtà. Vivendo un'esperienza virtuale di questo tipo si sperimenta un mondo che non esiste nella realtà, ma che esiste nella nostra mente e nel quale ci si può muovere con assoluta libertà.

Partendo dal significato delle due parole, possiamo notare che, unite, formano un ossimoro, ovvero un termine composto da due vocaboli che sono uno l'esatto opposto dell'altro: la parola *virtuale* è l'opposto di *reale*. Associano i due termini, che fra loro si annullano, nasce l'idea di costruire idealmente dei mondi che, in realtà, non esistono. Inoltre, poiché non è in nessun modo possibile rendere materialmente reale un mondo inventato, la Realtà Virtuale ha il compito di rendere ogni mondo fittizio il più possibile coerente con le situazioni reali, tanto da poter far credere a chi vive un'esperienza virtuale di far parte veramente di quel mondo, esattamente come se lo stesse vivendo in quel momento, con le stesse emozioni, le stesse sensazioni, gli stessi stimoli: come se stesse vivendo un sogno in piena coscienza.

Esistono tre modi fondamentali per definire quella che è l'esperienza di vivere in un mondo fittizio: Realtà Virtuale, Realtà Artificiale, Cyberspazio. Le differenze che distinguono questi termini sono sottili, ma fondamentalmente tutti e tre hanno in sé il concetto di Realtà Virtuale. Secondo la maggior parte degli esperti in questo campo, per Realtà Virtuale s'intende la possibilità di entrare in un mondo verosimile, e quindi esistente, almeno per il fatto di rispondere esattamente a tutte le leggi della fisica. Così in un mondo di Realtà Virtuale dobbiamo stare attenti per esempio a non sporgerci troppo da un balcone, perché potremmo cadere, come dobbiamo prestare attenzione ai muri perché ci sbatteremmo contro. In definitiva, grazie alla Realtà Virtuale, possiamo esplorare sì il nostro mondo fantastico, ma ancora una volta saremo soggetti a tutte quelle leggi della fisica alle quali siamo abituati da sempre e con le quali conviviamo quotidianamente.

La Realtà Artificiale, invece, non solo permette di vivere in mondo che non esiste, ma permette anche di viverci infrangendo le leggi della fisica, permette cioè di esprimersi in assoluta libertà, senza condizioni, senza vincoli, senza limiti. Ed è per questo che gli studiosi hanno esaltato il mondo di Realtà Artificiale, a vera e propria espressione artistica, poiché è proprio nel poter spaziare senza alcun limite in quelli che sono i percorsi della mente e dell'anima, che si può accedere ad un mondo completamente nuovo. L'ultima denominazione è quella di Cyberspazio, ideata nel 1984 da William Gibson nel suo romanzo *Neuromancer*. Il Cyberspazio prevede una sorta di Realtà Virtuale che può essere sperimentata simultaneamente da più persone in tutto il mondo.

Questo tipo di definizione, apparentemente fine a se stessa, nasconde invece una realtà molto interessante che, forse, è lo scopo ultimo della Realtà Virtuale stessa: quello di far coesistere, con una sorta di unione tecnologico-culturale, mondi completamente diversi e lontani. L'obiettivo del cyberspazio è quindi quello di creare una realtà sostitutiva, parallela a quella reale, in grado di far comunicare allo stesso modo e su piani identici, tutti i popoli del mondo.

Uno dei problemi che ci si può porre di fronte al concetto di realtà virtuale è quello che riguarda la conoscenza o, per dirla con un termine filosofico, il suo aspetto gnoseologico. Infatti, se è vero che attraverso i sistemi virtuali è possibile essere coinvolti sensorialmente e vivere esperienze diverse da quelle quotidiane, appartenenti magari a mondi fantastici o comunque distanti dai nostri, è anche vero che grazie a questo tipo di realtà veniamo a conoscenza di nuove classi di realtà.

Molti filosofi e studiosi considerano la realtà virtuale un mezzo capace di far conoscere nuove realtà, anche se forse, ciò che cambia è il *come* si conosce. In effetti esistono due grandi categorie di apprendimento: quella che ha un rapporto prevalentemente legato al pensiero e quindi alla logica, e quella che ha un rapporto basato prevalentemente sul pensiero figurativo e quindi legato alla percezione delle immagini. Possiamo affermare che la realtà virtuale appartiene alla seconda categoria del *come* si apprende e che ci si trova davanti ad una forma della conoscenza umana che ci riporta alle origini: l'uomo, infatti, fin dalle sue origini, prima di esprimersi attraverso il linguaggio, lo ha fatto attraverso l'immagine, attraverso un linguaggio che si esprimeva per mezzo dell'uso di simboli.

La realtà virtuale è l'evolversi di quello che una volta era rappresentato dal graffito, un evolversi che rappresenta la possibilità di vedere il mondo in modo più ampio. Infatti, se attraverso l'evoluzione del linguaggio è possibile dire sempre di più e in modo più preciso, è anche vero che un linguaggio più evoluto, come quello che la realtà virtuale mette a disposizione, allarga molto le zone del dicibile e quindi garantisce una visione nettamente più ampia e completa del mondo e, di conseguenza, della conoscenza.

Attraverso i servizi blogging, messaging e le tecnologie come il VoIP ² (voice over IP), milioni di persone comunicano con amici e utenti in tutto il mondo, spesso senza averli mai incontrati di persona.

Il punto cardine del social network ³ è proprio quello di favorire la nascita di comunità virtuali che si sviluppano intorno a grandi centri di interazione digitali come ad esempio i blog ⁴ o programmi di messaggistica istantanea. Tutto ciò nasce dalla necessità dei navigatori del Web ⁵ di inserire le proprie idee e/o i propri commenti all'interno di uno spazio virtuale come il blog, un sito proprio che costituisca, nella navigazione, un punto di riferimento fisso, un'identità digitale in cui

¹ VoIP (Voice over Internet Protocol): è una tecnologia che rende possibile effettuare una conversazione telefonica sfruttando una connessione Internet o un'altra rete dedicata che utilizza il protocollo IP, anziché passare attraverso la linea telefonica tradizionale (PSTN). Ciò consente di eliminare le relative centrali di commutazione e di economizzare sulla larghezza di banda occupata. Vengono instradati sulla rete pacchetti di dati contenenti le informazioni vocali, codificati in forma digitale, e ciò solo nel momento in cui è necessario, cioè quando uno degli utenti collegati sta parlando.

³ I *Social Network* sono comunità virtuali che favoriscono la comunicazione e l'incontro fra utenti legati da interessi comuni.

⁴ Il *blog* è un diario pubblico in Internet, tenuto da uno o più persone dette *blogger*. E' uno spazio sul Web dove poter raccontare storie, esperienze e pensieri, da condividere con gli altri. Non vi sono delle tematiche prefissate e ognuno è libero di scrivere su qualsiasi argomento. Esistono blog d'informazione giornalistica, di pettegolezzi o semplicemente di racconti quotidiani circa le proprie esperienze di viaggi, sport poesia, musica, letture, ecc.

⁵ Il termine *navigare* viene utilizzato in riferimento al contatto tra tanti porti e punti diversi costituiti dai numerosi siti Web

ritrovarsi. In ambito italiano, questo scenario è dominato da uno dei servizi blogging usato più frequentemente dai navigatori: Windows Live Space. Oltre ad essere tra i più frequentati, è anche il “luogo” dove gli utenti amano intrattenersi più a lungo.

Nonostante il limite fisico del veicolo comunicativo e della ristretta larghezza di banda, gli utenti tendono a soddisfare i propri bisogni di riduzione dell’incertezza e di affinità nei confronti dell’altro adattando le proprie strategie comunicative alle possibilità offerte dal mezzo e facendo in modo di esprimere anche le emozioni. . Ciò è possibile grazie all’accurato utilizzo della punteggiatura, delle maiuscole e di simpatici segni ideografici come le *emoticon* ⁶. Oggi invece, le innovazioni della tecnologia informatica, hanno risolto anche ciò che poteva sembrare un ostacolo alla comunicazione. Come comprendersi e destreggiarsi tra le diverse lingue del globo.

Dialogare con un giapponese, con un tedesco o con chiunque altro non parli la nostra lingua, o non essere “skillato” ⁷ in inglese, non è più un problema. Sono state varcate anche queste barriere: la pratica si chiama *Conlang* (Constructed Languages), è molto

⁶ Le *emoticon* (o *smilies*, in italiano *faccine*) sono riproduzioni stilizzate di quelle principali espressioni facciali umane che si manifestano in presenza di un’emozione (sorriso, broncio, ghigno, ecc). Vengono utilizzate prevalentemente su Internet e negli SMS (acronimo dell’inglese Short Message Service) per sopperire alla mancanza del linguaggio non verbale nella comunicazione scritta.

Alcuni esempi di principali emoticon sono:

- :-) Sta per sorriso o tono scherzoso, amichevole
- :-(Broncio o tristezza
- :-D Riso
- :-p Linguaccia o ‘oops’
- :-O Stupore (‘a bocca aperta’)

Ve ne sono tanti altri e frequentemente i software on-line (forum, chat, ecc) o i software per telefoni cellulare sostituiscono automaticamente i segni d’interpunzione con immagini.

⁷ Il termine ‘*skillato*’ deriva dall’inglese *skill* che significa ‘abilità’, ossia la capacità di svolgere mansioni complesse in modo ben finalizzato, organizzato, razionale ed usando l’esperienza per adattarsi a circostanze specifiche. E’ divenuto uso comune utilizzare il termine inglese *skill* per indicare il medesimo concetto, in particolare nel campo dell’informatica, per indicare il livello di preparazione tecnica di cui gode un individuo, o nei videogiochi.

diffusa in rete, e si riferisce a qualsiasi nuovo idioma. Il primo Conlang fu il Toki Pona, nato nel 2001 per mano di una linguista canadese: Sonja Elen ⁸.

Il mondo di Second Life

Uno degli universi paralleli più frequentati al giorno d'oggi nel Web è *SECOND LIFE*: un mondo virtuale tridimensionale multi-utente on-line. Questo sistema è stato creato nel 2003 dalla società californiana Linden Lab con l'obiettivo di creare un modo innovativo di condividere esperienze. Tale progetto si è concretizzato in Second Life che è in grado di fornire ai suoi utenti (definiti "residenti") gli strumenti per raggiungere e creare in questo luogo virtuale nuovi contenuti grafici: oggetti, fondali, fisionomie dei personaggi, contenuti audiovisivi, ecc..

Tecnicamente è un gioco di ruolo di massa, in realtà si è trasformato in un fenomeno sociale a livello planetario che oggi conta circa otto milioni di residenti ⁹. Infatti, in SL si combinano assieme sia gli elementi di una chat (che rappresenta la modalità di comunicazione base con la quale si interagisce), sia gli elementi di un gioco di ruolo, ossia la capacità di muoversi in questo determinato cyberspazio tramite un personaggio che ci rappresenta e che in questo mondo ha una vita lavorativa e sociale. In questo modo ognuno può far entrare in gioco la propria immaginazione e costruire il proprio business, la propria abitazione e la propria immagine ed entrare in

⁸ La traduzione offerta dal sito ufficiale www.tokipona.org viene fatta dal Toki Pona all'inglese o dal Toki Pona all'esperanto. La traduzione in italiano invece è stata effettuata attraverso un sistema di traduzione offerto dal sito www.google.it che permette di ottenere, in questo caso, la traduzione di tutte le categorie di parole, in cui è suddiviso l'insieme di sostantivi, aggettivi e verbi del vocabolario del Toki Pona.

⁹ Il numero degli utenti iscritti varia da fonte a fonte. Otto milioni è il numero approssimativo degli iscritti, circa due milioni, invece, sono coloro che "giocano" regolarmente.

relazione con gli altri avatar secondo gli schemi di socializzazione tipici del mondo reale.

Tutto in SL ¹⁰ è costruito da chi entra a far parte di questa realtà virtuale ed è un infinito e bellissimo esercizio di creatività. L'opportunità alternativa concessa da questo nuovo strumento capace di fare evadere dalla realtà, parte dall'idea di dare all'individuo la possibilità di potersi creare il proprio aspetto esteriore, quello che può essere più adatto alla propria seconda vita. Gli utenti, infatti, possono decidere come apparirà il loro Io digitale (*avatar* ¹¹). Con i capelli biondi o scuri, con le fattezze di donna o sotto le sembianze di un uomo, o addirittura farlo apparire come un super eroe, magari con i capelli fucsia, e così via. Il sistema, infatti, mette a disposizione dell'utente un'ampia gamma di caratteristiche somatiche e di abiti. L'identità reale è celata dietro un *Nickname* ¹², che può essere fantasioso oppure essere attinto da una lista fornita dai programmatori, prima di effettuare il primo accesso in SL.

La modalità di spostamento utilizzata in questo mondo alternativo, non è esattamente identica alla dinamica con la quale ci muoviamo nel mondo reale. Gli avatar, infatti, gesticolano e si muovono come umani, ma in più hanno la possibilità di realizzare uno dei sogni che accompagna da sempre gli uomini: volare per spostarsi da un ambiente ad un altro.

L'immersione in questo mondo comporta quindi l'assunzione di un'identità diversa e quindi anche il comportarsi di conseguenza. Significa lasciarsi alle spalle la propria

¹⁰ Second Life

¹¹ L'*Avatar* è un alter ego virtuale, il cui nome deriva, secondo la definizione dello Zingarelli, dal bramanesimo e dall'induismo dove rappresentava ciascuna delle dieci incarnazioni del dio Visnù.

¹² Il *Nickname*, o semplicemente *Nick*, nella cultura di Internet è uno pseudonimo utilizzati dagli utenti della Rete telematica per identificarsi in un determinato contesto o in un determinata comunità virtuale. Il *Nickname* può essere un soprannome, una sigla o semplicemente un insieme di lettere e numeri.

immagine, appartenente alla vita reale, per diventare *chi* si desidera essere, o *chi* si detesta o per essere semplicemente se stessi.

L'avatar, in questo universo di pixel, non deve dipendere dagli stimoli della fame o della sete, dal freddo, né tantomeno deve temere le malattie o la morte. L'unica condizione necessaria per una sopravvivenza decorosa, è quella di costruirsi una casa, per non ritrovarsi a vagabondare per le vie delle diverse isole. Nel momento in cui l'utente/avatar non è in grado di costruirsi da solo un'abitazione, magari perché ha poca dimestichezza con i vari programmi 3D, può sempre rivolgersi ad apposite agenzie immobiliari dalle quali comprare, seppur a prezzi piuttosto elevati, ad esempio, delle bellissime villette a schiera, anche in zone residenziali e con vista mare.

Ma ciò che distingue Second Life dai comuni giochi 3D sta nel fatto che questo mondo virtuale, non solo è popolato, ma è anche costruito dagli utenti stessi che lo costruiscono secondo le loro preferenze, progettando case o addirittura, interi quartieri. I programmatori mettono a disposizione la tecnologia di base, ma poi sono gli utenti che aggiungono di volta in volta nuovi contenuti al sito. La sua peculiarità è quella di lasciare agli utenti la libertà di usufruire dei diritti d'autore sugli oggetti che essi creano, che possono essere venduti e scambiati tra i residenti utilizzando una moneta solo apparentemente virtuale: il *Linden Dollar*, che può essere convertito in veri dollari americani.

Secondo il creatore di Second Life, Philip Rosedale: “è l'economia del gioco la rivoluzione che sta attirando numerose aziende”. Questo trentottenne, uomo d'affari

americano, ha cominciato la sua attività vendendo sistemi di database a 17 piccole imprese, ha ottenuto un diploma di laurea in Scienze della Fisica presso l'Università della California, a San Diego, e nel 1996 è entrato a far parte della RealNetworks in qualità di vice presidente. Nel 1999 ha lasciato la RealNetworks per fondare la Linden Lab, una piccola azienda con circa trenta dipendenti che progetta ambienti virtuali in 3D. Successivamente ha riunito attorno a sé un gruppo di sviluppatori informatici con i quali si è messo all'opera per creare sistemi in grado di comprimere le immagini virtuali al punto da creare un mondo del tutto simile a quello reale. Il risultato finale è stato proprio Second Life, un metamondo in grado di contenere e veicolare strategie di marketing per le imprese.

L'obiettivo di Rosedale era quello di dimostrare l'esistenza di un modello per un'economia virtuale o una società virtuale. Il suo intento, nella creazione di questo mondo virtuale, era quello di far condividere l'esperienza dei singoli individui e di mettere a disposizione di questi ultimi, i mezzi per poter esprimere ciascuno le proprie possibilità in piena libertà invece di creare antagonismo tra i partecipanti e di sviluppare quel continuo clima di sfida che caratterizza tutti i videogiochi..

Investendo nel mondo virtuale, infatti, si possono guadagnare soldi reali: lo hanno capito, oltre a quelli della Linden Lab, anche gli utenti del gioco. Questi spesso, nella prima vita, sono designer, artisti, creativi, programmatori di giochi e altro ancora e utilizzano SL come enorme vetrina e mezzo per tradurre i Linden Dollar in dollari americani, ad esempio vendendo l'idea proposta.

SL è comunemente utilizzato dai suoi utenti per proporre agli altri partecipanti conferenze, file musicali e video, opere d'arte, messaggi politici ecc; si è inoltre assistito alla creazione di numerose sottoculture all'interno dell'universo SL, che è stato studiato in numerose università come modello virtuale di un'interazione umana, falsa, ma in cui si proietta ciò che si vorrebbe essere. Di queste sottoculture fanno parte, però, anche politici, che hanno visto in questo mondo, la possibilità di aprire spazi al fine di propagandare le proprie idee politiche: oggi il più tecnologico dei politici italiani, ad esempio, è Antonio Di Pietro, il primo segretario di partito ad aprire un blog, ad inviare video da visualizzare su *Youtube*¹³ e, addirittura, ad organizzare proprio su SL una conferenza stampa. Un'altra categoria che ha compreso a pieno le potenzialità di questo mondo virtuale è quella dei cantanti: gli U2 ad esempio, hanno tenuto dei concerti direttamente nel virtuale, mentre la cantante Irene Grandi, ha ambientato, proprio su SL, una delle sue più recenti canzoni.

Per poter entrare a far parte di questa “seconda vita” il requisito fondamentale è quello di essere maggiorenni. Il primo passo per entrare nel vivo di questo spazio virtuale è quello di iscriversi (e ci sono due alternative: *free*, cioè gratuita e *premium* che permette con dieci dollari al mese di avere soldi da spendere in Second Life) e di costruirsi un avatar. Il secondo, per quanto riguarda l'ambito italiano, è frequentare i forum di Second Life Italia (www.secondlifeitalia.com), un sito ad hoc per gli abitanti del Bel Paese dove interagire e chiedere informazioni sul gioco, una

¹³*Youtube* è un sito nel quale è possibile condividere la visione di qualsiasi tipo di video, anche amatoriale, che viene inserito direttamente dagli utenti, sul sito stesso.

community fondata da Riccardo Ranieri e Luca Lodini. In questo spazio interamente dedicato al popolo *made in Italy*, lo scopo è principalmente quello di mettere a proprio agio tutti gli italiani che, appena entrati nel gioco, si sentono un po' spaesati, e di ricreare loro ambienti quanto più simili ai panorami delle più famose città italiane.

4. Immagini in second life

Queste, ad esempio, sono alcune immagini che ci mostrano il quartiere dei Parioli su SL¹⁴:



¹⁴ E' possibile visionare le foto direttamente su <http://web20.exite.it>



Un'altra riproduzione virtuale di ciò che caratterizza lo spaccato popolare italiano nel reale, è stata l'elezione di *Miss Itland 2007*, eletta dal club Itland, che ha proclamato reginetta dell'Italia di SL Giuly Lowey. La manifestazione virtuale si è svolta come un comune concorso di bellezza che si rispetti, con sfilate e cambi d'abito. Di seguito, alcune immagini a testimonianza dell'evento, e la più bella dell'Itland:





5. L'economia e gli investimenti virtuali di Second Life

Per rendere più semplice e chiaro l'ingresso in SL a chi si addentra per la prima volta in questo mondo virtuale, la Maggioli Editore ha edito un mensile on-line di alcune decine di pagine, che si propone di trattare alcuni temi principali che riguardano questa nuova realtà alternativa. Nel numero 1 di ottobre 2007 di *SECOND LIFE MAGAZINE*, ad esempio, vengono toccate tematiche riguardanti l'economia che regola SL, le controversie legali che si possono creare e risolvere on-line, gli sport che dal reale sono approdati direttamente nel virtuale, e molti altri argomenti.

Come una normale (pseudo)realtà che si rispetta, anche Second Life è organizzata sulla base di un modello economico ed è in grado di provvedere al suo mantenimento e persino alla ricchezza dei singoli individui che la caratterizzano. Questo modello economico è stato pensato, dai creatori del gioco, in modo tale da lasciar spazio a coloro che con un po' di coraggio e con un minimo d'investimento aspirano ad ottenere buoni profitti.

Il solo pensiero di fare soldi dentro e attraverso un computer potrebbe sembrare un concetto un po' azzardato, eppure è proprio ciò che accade nel cyberspazio di SL. Su Second Life, infatti, chiunque può mettersi in affari, aprendo ad esempio un negozio o trovandosi un lavoro stipendiato. L'avatar stesso può diventare un affare: il proprio taglio di capelli, la propria casa, gli oggetti che si posseggono possono essere ritenuti interessanti e la popolarità permette di entrare a far parte dei personaggi più

importanti di SL, che il sistema stesso provvederà a ripagare aumentando il loro budget mensile. Infatti, progettare oggetti o svolgere attività (lo stilista, il parrucchiere, ecc..) consente principalmente di disporre di un capitale iniziale (la cosiddetta *proprietà intellettuale*) che può essere scambiata in maniera illimitata, visto che un oggetto è riproducibile all'infinito, al fine di soddisfare i bisogni degli utenti che aspirano, in questo ambiente, a massimizzare il proprio status.

Le modalità d'interazione sono diverse in Second Life, infatti solo ad un livello più evoluto è possibile acquistare case, automobili, vestiti, che danno agli avatar la possibilità di interagire in modo più completo fra di loro. Ciò è possibile acquistando, con dollari veri, i Linden dollar che saranno utilizzati nel virtuale e che, alla fine del mese, saranno poi convertiti, al netto di una commissione, attraverso carta di credito, in dollari americani.

Quello che potrebbe sembrare un semplice ambiente virtuale ispirato ai videogiochi di tipo immersivo, sta diventando un vero e proprio universo parallelo nel quale gli abitanti replicano fedelmente tutto quello che avviene nella loro Real Life, la vita normale, economia compresa. Il fattore vincente di SL è proprio l'immersività. Il programma, che funge da finestra aperta visivamente su questo mondo virtuale, disseminato di isole sulle quali è possibile costruire case, strade e altri ambienti popolati da oggetti, consente di vivere ed esplorare questi ambienti in modo realistico, anche grazie ad una grafica ben curata.

Per alcuni SL è diventato realmente un vero e proprio lavoro, a volte molto più remunerativo di quello reale. Secondo un'inchiesta di Business Week, si sono

quadruplicati i residenti che, grazie all'inventiva e ad un irrilevante investimento economico iniziale, sono arrivati a guadagnare più di 5,000 dollari americani al mese, lasciando, nella maggior parte dei casi, il lavoro reale.

Per quanto riguarda le diverse tipologie di occupazioni c'è da dire che all'inizio, trovare un lavoro effettivamente remunerativo in SL, può sembrare un'operazione piuttosto complessa. Quando si comincia, i pochi soldi si guadagnano solamente scommettendo nei casinò, oppure ballando nei locali, o addirittura stando semplicemente stesi a prendere il sole, anche se non è strettamente necessario lavorare in SL, in quanto vi sono oggetti gratis per tutti, servizi liberi e luoghi da esplorare e nei quali risiedere che sono completamente gratuiti. Poi però, nel momento in cui si cerca qualcosa di redditizio, con le giuste conoscenze, ci si può imbattere in lavori più remunerativi come ad esempio hostess, commessi, organizzatori di eventi o baristi per circa dieci dollari l'ora. Per sfondare però, c'è bisogno di qualcosa di più: la maggior parte dei "paperoni" di SL infatti, è costituita da persone che hanno creato un'attività in proprio come stilisti e creatori di vestiti, costruttori di oggetti, consulenti, venditori di appezzamenti di terra, ecc. Ma la cerchia di attività non è limitata a questi settori. C'è perfino chi, come Reuben Steiger, nome in codice Reuben Millionsofus, ha addirittura lanciato la propria azienda virtuale, la MillionsOfUs. Il suo lavoro è quello di consulente di marketing per grossi clienti. Ogni giorno qualche importante azienda o politico, apre un proprio quartier generale in SL, per farsi pubblicità. Ebbene, aiutare le aziende ad interfacciarsi con questo nuovo mondo, sembra in assoluto, il lavoro più

remunerativo. La sede è nel mondo virtuale, ma i contatti di consulenza marketing sono reali e coinvolgono soggetti come Microsoft, Toyota, Coca-Cola e Warner Bros. Un'altra rinomata azienda che ha visto in questo mondo parallelo un'ulteriore possibilità di guadagno è stata la Gabetti. Non possono essere venduti prodotti veri, ma si ha, in ogni caso, la possibilità di inserire un collegamento al loro negozio sul Web. Da questi collegamenti sta nascendo uno scambio fiorente. Proprio nel marzo scorso la Gabetti ha acquistato un'isola di Second Life. Un'isola equivale a 65 metri quadri ed ha un costo di 1,300 Euro una tantum, più 250 Euro al mese di manutenzione; una tale spesa è richiesta in quanto per costruire un edificio col software, un programmatore può arrivare a chiedere fino a 15mila euro. La compravendita e l'acquisto di case hanno fruttato alla Gabetti circa 2,3 milioni di Linden dollar, che equivalgono a circa 6mila euro.

Numerose sono le aziende ed i personaggi famosi che hanno scelto Second Life come vetrina per il mondo: nelle sedi virtuali infatti c'è la possibilità di essere visti a livello internazionale, essere conosciuti quindi da diversi milioni di abitanti e di stabilire con essi interazioni utili ai propri interessi commerciali. Uno dei metodi più usati per far conoscere il *brand* (la marca) della propria azienda in SL è l'architettura degli edifici e delle sedi, realizzate con linee molto accattivanti, al fine di attirare l'attenzione, al pari di un cartellone pubblicitario che, al contrario, non può essere utilizzato.

Molte aziende, addirittura, utilizzano questo mondo virtuale per testare i gusti e le esigenze degli avatar e lo fanno attraverso veri e propri sondaggi dai quali ricavano spunti per creare i prodotti che poi andranno a finire nel mercato reale. Ciò è quello

che ha attuato la casa automobilistica della Toyota, che ha creato nel virtuale un prototipo di macchina che, una volta valutato positivamente dagli avatar, avrebbe fatto il proprio ingresso nel mondo reale.

Nel mondo di SL ha fatto il suo ingresso anche una rinomata azienda di telefonia mobile: la Vodafone che sta mettendo in atto una sorta di ridefinizione nel rapporto tra reale e virtuale. Ha messo a disposizione dei suoi utenti un nuovo servizio: *Vodafone InsideOut*. Questo servizio consente di chiamare all'interno del metamondo di SL, ma anche e soprattutto di effettuare chiamate da SL verso apparecchi reali. La particolarità sta nel mantenere la separazione tra avatar e utente, infatti, chi riceve la chiamata vede comparire il nome dell'avatar, ma l'identità della persona reale resta celata. L'avatar in questo modo, acquisisce una personalità definita: la telefonata non arriva all'utente del mondo reale, bensì alla rappresentazione che l'individuo dà di sé nel mondo virtuale. Per quanto riguarda i costi che l'utente/avatar deve sostenere, fino al 30 novembre sono nulli per poi diventare a pagamento in un prossimo futuro (300 Linden dollar per ogni messaggio o minuto di chiamata, circa 1,44 dollari americani). Altro aspetto da tenere in considerazione è che i numeri assegnati agli avatar sono presi dall'utenza tedesca e ciò significa che chiamare da un numero reale ad un cellulare virtuale viene a costare come una chiamata in Germania. Anche la Telecom si è cimentata nella comunicazione virtuale e lo ha fatto attraverso il *First Life Communicator*. E' stato più che altro un esperimento, terminato il 18 settembre c.a. ed è consistito nell'indossare un *object*, reperibile sull'isola Telecom Italia 1. Questa proposta è stata

realizzata dalla Tim in collaborazione con ISN Virtual Worlds, una società milanese che opera nel campo della tecnologia informatica in veste di fornitore di servizi per il marketing e la comunicazione con i nuovi mezzi tecnologici. Il First Life Communicator è stato pensato per effettuare telefonate tra avatar, spedire 40 SMS, e-mail, per fare telefonate della durata massima di tre minuti e per essere usato verso il mondo esterno su numeri nazionali, verso tutti gli operatori fissi e mobili, nell'arco di quattro settimane.

Su SL sono stati riprodotti una gran parte dei settori commerciali presenti nella vita reale che hanno fruttato agli utenti/avatar giri d'affari che non hanno nulla da invidiare a quelli realizzati nella loro prima vita.

Per quanto riguarda le personalità che hanno saputo sfruttare al meglio le possibilità di guadagno del mondo di SL vi sono:



Anshe Chung, una delle personalità più note nell'universo 3D, soprannominata la “Rockfeller di Second Life”. I suoi Anshe Chung Studios sono i più ricercati da chi

ha bisogno di case o isole virtuali. Nella realtà la sua attività non ha nulla a che vedere con quella virtuale in quanto, Ailin



Philip Linden: la sua mente geniale è riuscita a fargli guadagnare, attraverso la sua stessa creazione, due volte, in quanto Philip Rosedale, questo è il suo vero nome, oltre ad essere uno dei creatori di SL, è anche lui, un venditore di appezzamenti.



Cristiano Midnight, il cui vero cognome è Diaz. E' stato un innovatore in SL, che ha creato un'applicazione per la condivisione delle foto nel mondo, Snapzilla.



Barnesworth Anubis, nella realtà Adam Anders nel mondo virtuale di SL gestisce un negozio di vestiti e un'agenzia immobiliare.



Stroker Serpentine, il cui nome reale è Kevin Alderman, è colui che fino a non molto tempo fa, ha gestito il porno ed i quartieri a luci rosse della virtuale Amsterdam. Ora la sua attività è stata acquistata all'asta, per cinquanta mila dollari, da uno sconosciuto olandese, ma il suo intento ora è quello di creare una sorta di campo giochi per adulti, sempre legato al tema dell'eros. In SL, infatti, oltre a quartieri ricchi di case, negozi, musei e strutture architettoniche di ogni genere, oltre al lussuoso quartiere dei Parioli (creato dall'immobiliarista Bruno Cerboni), possiamo incappare anche nei quartieri a luci rosse.

Second Life quindi, è da considerare come un vero e proprio mondo parallelo, in cui è possibile lavorare, studiare, intrattenersi e realizzare a pieno il proprio Ego superando anche i limiti imposti dal reale e dalla morale. In alcuni siti, infatti, si possono leggere curiosità riguardanti truffe ed inganni a livello civile e commerciale, e a tal proposito, la società californiana Linden Lab, si sta attivando per realizzare un tribunale virtuale a cui i residenti possono rivolgersi in caso di denunce e comportamenti scorretti tra avatar, al fine di mantenere sempre alto il livello di sicurezza e di lealtà tra i residenti che, cercano spesso di ottimizzare nel virtuale i loro guadagni reali, anche attraverso mestieri che nella *Real Life* sono considerati fuori legge, come la prostituzione.

Credo che ciò che più attiri di questo mondo alternativo, siano proprio le numerose possibilità di guadagno concesse dai più svariati mestieri che è possibile

intraprendere, e a sostegno di ciò, la mancanza di limiti legali che nel mondo reale non sarebbero possibili perché porterebbero alla più completa anarchia.

L'idea di usufruire di un modello di educazione virtuale, a molti potrebbe sembrare poco idoneo al fine di un raggiungimento culturale vero e proprio, in quanto il mezzo utilizzato per la trasmissione degli insegnamenti è un computer¹⁵. Esistono invece strumenti telematici in grado di fornire insegnamenti accurati anche attraverso la rete. L'*e-learning*, così è definita un'attività formativa on-line, rivolta ad utenti adulti, prevede infatti, l'utilizzo della connessione alla rete per usufruire dei materiali didattici e dei corsi specifici che vengono trasmessi attraverso una "piattaforma tecnologica" (*Learning Management Sistem*).

Gli utenti che usufruiscono di questa modalità di istruzione sono studenti universitari, docenti, studenti di scuole superiori, che hanno a loro disposizione la possibilità di tenere sempre sotto controllo il loro grado di apprendimento, sia attraverso un piano di studi da seguire, sia attraverso controlli periodici on-line di apprendimento con schede di valutazione ed autovalutazione. Ci si iscrive ad un corso, fornendo nome e password, e si accede di volta in volta ad una piattaforma fornendo questi dati. Una volta entrati nella piattaforma di *e-learning* si inizia ad interagire con gli elementi del corso: al suo interno è possibile trovare dispense, che è possibile scaricare direttamente dalla rete, esercitazioni o addirittura immagini con le quali potersi esercitare a casa. Questi corsi sono seguiti da un tutor che, in un apposito forum, si mette a disposizione degli utenti al fine di offrire chiarimenti e delucidazioni sulle

¹⁵ Si faccia riferimento a <http://www.repubblica.it> nella sezione Tecnologia & Scienze, articolo del 4 maggio 2007 di Valerio Maccari

materie trattate. Gli utenti naturalmente hanno la possibilità di interagire anche con altri iscritti, e questo rappresenta una possibilità in più di confrontarsi con altre persone su più argomenti. Al termine di questi corsi, gli utenti, dopo aver superato una prova finale, ricevono un attestato, a giustificare quanto appreso.

Questa tipologia d'insegnamento è stata adottata anche da alcuni atenei che permettono appunto di seguire i corsi universitari direttamente dal proprio PC, scaricare dalla rete il materiale didattico senza recarsi necessariamente nella sede universitaria e senza dipendere dai vincoli di tempo degli orari di corso.

L'insegnamento nel virtuale potrebbe essere un'altra grande innovazione portata dal mondo di SL, infatti, la vera novità di questa nuova tipologia di insegnamento è da vedere nel fatto che queste lezioni virtuali rendono possibile annullare le distanze che intercorrono fra gli studenti/avatar che si affacciano da ogni parte del mondo, creando un senso di comunità e di vicinanza anche se il proprio compagno di banco si collega da un altro continente.

6. Conclusioni

Non è possibile stabilire con precisione fino a che punto la realtà virtuale possa essere considerata *realtà* né tantomeno stabilire se una conoscenza ottenuta attraverso il virtuale possa sortire gli stessi effetti di una conoscenza ottenuta attraverso il mondo reale.

In termini filosofici, ciò che è reale può essere considerato tale attraverso due strade completamente diverse fra loro: idealismo ed empirismo. Il primo sostiene che può essere considerata realtà tutto ciò di cui abbiamo conoscenza, mentre il secondo presuppone che la realtà sia rappresentata solo da ciò di cui abbiamo un dato sensibile, tangibile, altrimenti il mondo esterno rimane assolutamente inconoscibile.

In un mondo virtuale, la coscienza di aver appreso, avviene attraverso l'esperienza sensibile, di conseguenza sono soddisfatte entrambe le teorie, empirica e idealistica; ciò significherebbe che fra realtà virtuale e realtà, non sussiste nessuna differenza e che non sarebbe possibile fare alcuna distinzione fra i due tipi di realtà.

Una differenza fondamentale invece c'è, ed è quella che caratterizza e distingue nettamente i due tipi di realtà. Nel mondo reale l'uomo è costretto a viverci, in quanto ci si trova automaticamente inserito appena nasce, in quello virtuale, invece, decide di inserirsi e, di conseguenza, decide di immergersi in un mondo che non si è trovato, ma che si è costruito in base alle proprie conoscenze. Tuttavia, se si andasse verso un uso incondizionato di sistemi virtuali, probabilmente si andrebbe incontro ad una serie di problematiche. Una di queste, ad esempio, riguarda la possibilità di un costante estraniarsi dal mondo reale e di conseguenza un disadattamento sempre più marcato alla realtà, con la perdita della propria identità e forse con una pretesa di autosufficienza che può arrivare all'incapacità di socializzare. Le libertà che la realtà virtuale può offrire all'individuo, infatti, sono numerose e spesso allettanti ed hanno la capacità di estendere le capacità umane, sia quelle comunicative, sia quelle fisiche, rappresentando senz'altro un evolversi della conoscenza e un ampliamento delle

proprie libertà. Però è necessario fare degli sforzi affinché la realtà virtuale possa veramente considerarsi un mezzo nuovo e straordinario capace di aprire nuovi orizzonti a chiunque, in grado di eliminare tutte le barriere e di dare all'uomo la possibilità di sentirsi realmente più libero di conoscere. E' possibile affermare che, indipendentemente da ciò che s'intende per realtà, l'esperienza virtuale rappresenta indubbiamente un mezzo per ampliare le proprie conoscenze e in particolare, se non permette di conoscere realmente mondi ipotetici, permette almeno di conoscere più a fondo la realtà stessa, dando all'uomo l'opportunità vera e concreta di vivere non un'esperienza di realtà, ma un'esperienza del suo rapporto con la realtà e quindi del suo rapporto con se stesso e col mondo.

Second Life è considerato da molti un vero e proprio *Paese dei balocchi* in quanto, a partire dall'aspetto esteriore, è possibile diventare e fare ciò che si è sempre desiderato. In questo mondo infatti, non vigono le leggi che regolano la società del reale, quindi è possibile fare ciò che si desidera, senza vincoli. Da un lato questo aspetto dà la possibilità di dare libero sfogo alla propria fantasia ed immaginazione, ma dall'altro annienta quelli che sono i limiti che ciascun individuo possiede: la mia libertà non si esaurisce dove comincia quella dell'altro. Questo potrebbe portare ad uno stato di anarchia assoluta che distruggerebbe l'uomo, questa volta però nel reale, dove risiedono emozioni, sentimenti ed una economia assolutamente reale.

7. Lettura riassuntiva e dati

Si sente parlare, sempre più spesso, di sistemi immersivi di realtà virtuale e di mondi virtuali. Le descrizioni più comuni del virtuale fanno riferimento per lo più alla tecnologia utilizzata (mouse, guanti, occhiali ecc.) mentre le spiegazioni delle esperienze umane nei mondi virtuali utilizzando categorie concettuali provenienti dall'ambito disciplinare della semiotica come: simulazione visiva. Proprio grazie a questi motivi negli ultimi anni è nato un fenomeno come il "Second Life": è un mondo virtuale tridimensionale multi-utente inventato nel 2003 dalla società americana Linden Lab. Un mondo virtuale insomma che assomiglia tantissimo a internet, che offre migliori prospettive di sviluppo, tanto che sinonimo di Second Life è l'espressione "Internet 3D". Alla bidimensionalità e alla staticità del web tradizionale, SL sostituisce la tridimensionalità (anche se solo grafica), personalizzazione (la navigazione avviene mediante un avatar gestito direttamente da una persona fisica tramite tastiera e mouse), maggiore dinamicità e inoltre la sua relativa facilità di introdurre contenuti di qualsiasi genere, mediante tecniche di costruzione, di animazione e di linguaggio (linden script). Il sistema fornisce ai suoi utenti (Residenti) gli strumenti per aggiungere e creare nel mondo virtuale nuovi contenuti grafici: oggetti, fondali, fisionomie dei personaggi, contenuti audiovisivi ecc. La peculiarità del mondo di Second Life è quella di lasciare agli utenti la libertà di usufruire dei diritti d'autore sugli oggetti che essi creano, potendoli poi scambiare e vendere con i residenti mediante l'uso della moneta virtuale "Linden Dollar" che

può essere convertita in veri dollari americani mediante il sito www.eldexchange.eu (1000L\$ equivalgono a 4 \$ statunitensi). Per molti versi anche qui come nel vita reale ricopre un ruolo importante l'aspetto economico, ogni giorno vengono effettuati dei movimenti finanziari pari a un 1 milione e 500 mila dollari tra i circa 4 milioni di avatar esistenti sulla rete. Quindi è evidente l'interesse suscitato da un tale movimento di denaro, che serve alle transazioni più disparate: dall'acquisto di abbigliamento e oggetti personali creati da avatar (ovvero le figure virtuali dei residenti in Second Life, dotati di un proprio nome, sembianza, forma, movimento ecc.), all'impiego nel gioco d'azzardo con tavoli da poker e casinò; dal pagamento di prestazioni sessuali con accompagnatrici e accompagnatori virtuali o dotati della webcam reale, all'investimento bancario; dall'affitto di case e negozi, alla compravendita di porzioni di terreno o di vere e proprie isole (le Sim equivalenti ad uno spazio di 65536 metri quadrati) gestite direttamente e finanziariamente dai server di Linden Lab oppure da server privati collegati in rete. Attualmente partecipano alla creazione del mondo di *Second Life* oltre 400 mila utenti attivi di tutto il pianeta (circa 9 milioni totali se si considerano gli utenti registrati, il che comprende gli utenti inattivi) , e ciò che distingue "Second Life" dai normali giochi 3D online è che ogni personaggio che partecipa alla "seconda vita" rappresenta, secondo la fantasia dell'utente, l'utente stesso. Gli incontri all'interno del mondo virtuale appaiono dunque come reali scambi tra esseri umani attraverso la mediazione "figurata" degli avatar. L'iscrizione è gratuita, anche se è obbligatorio essere maggiorenni. Per costruire e vendere oggetti all'interno di "Second Life", inoltre, occorre "comprare"

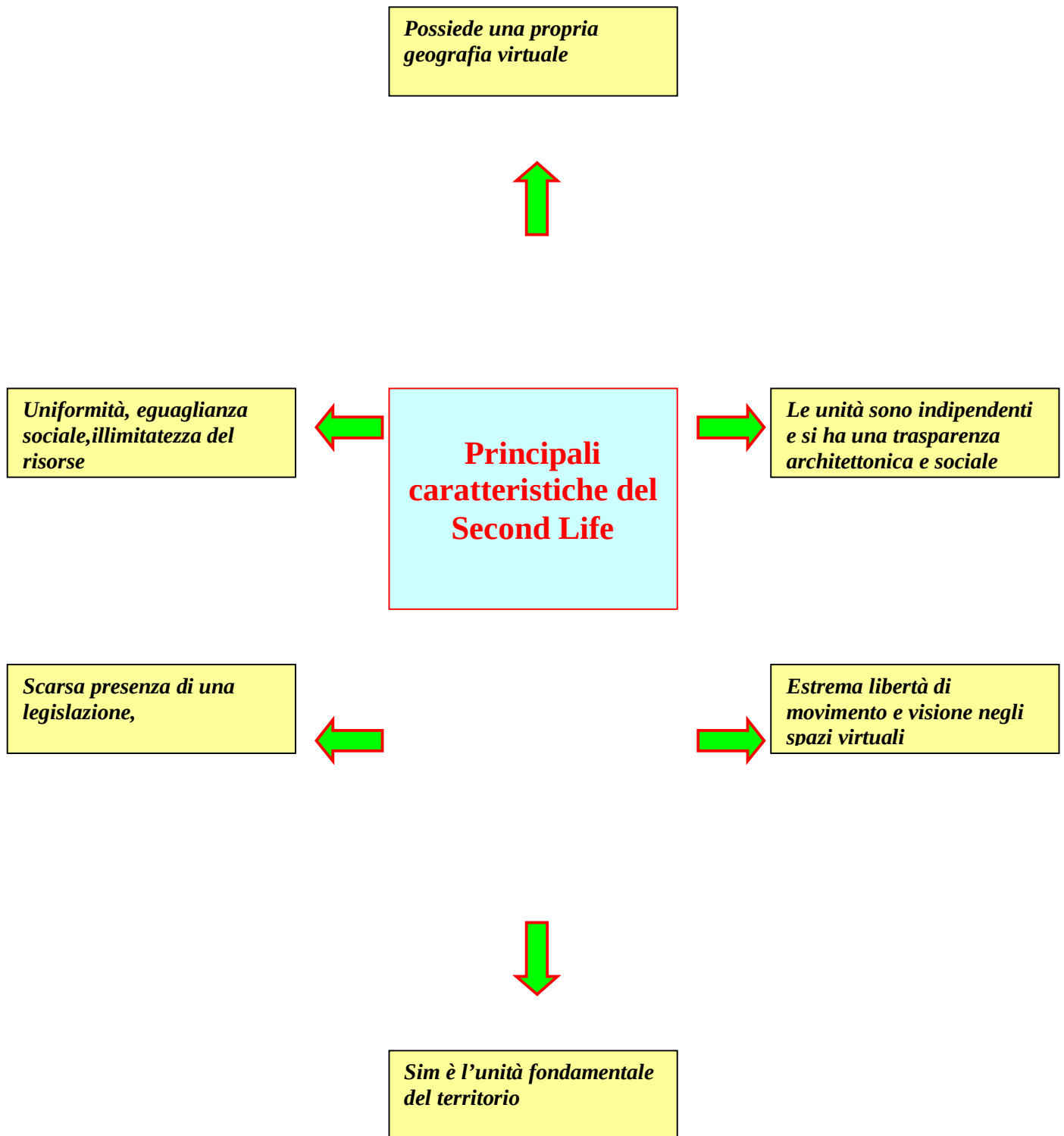
aree di terreno nel mondo virtuale. Molti personaggi che partecipano alla vita di "Second Life" sono programmatori in 3D. Qualcuno di essi ha guadagnato somme di (vero) denaro vendendo gli script dei propri oggetti creati per essere utilizzati dentro il mondo virtuale. *Second Life* viene comunemente utilizzato dai suoi utenti per proporre agli altri partecipanti conferenze, file musicali e video, opere d'arte, messaggi politici, ecc.; si è inoltre assistito alla creazione di numerose sottoculture all'interno dell'universo simulato SL, che è stato studiato in numerose università come modello virtuale di una interazione umana, falsa, ma in cui si proietta ciò che si vorrebbe essere. Non sono solo gli investimenti ad attirare molti visitatori e a far aumentare questa nuova moda sempre più crescente negli ultimi anni. Del milione e mezzo di persone che si sono collegate nell'ultimo mese di giugno e degli 8 milioni e 200 mila residenti non tutti sono attratti dai soldi da spendere e guadagnare ma anche dai iniziative sociali, culturali e religiose. Le università americane insieme a quelle europee hanno svolto iniziative culturali di un certo rilievo, sperimentando forme di condivisione tra ricercatori o iniziative di e-learning in aule virtuali; numerosi gli istituti culturali: ad esempio il nostro Ministero degli Affari Esteri ha acquistato uno spazio per collocarvi un virtuale Istituto Italiano di Cultura che attualmente ospita una mostra sull'arte italiana contemporanea; tante le librerie che offrono e-book scaricabili gratuitamente o a pagamento dalla rete; molti i musei virtuali con interessanti mostre tematiche; tanti i teatri, i cinema, i luoghi di riflessione religiosa (chiese, templi, moschee), gli eventi e le iniziative che si aggiungono quotidianamente a un'offerta ha come unico limite la fantasia umana. L'idea generale

del SL è quella di creare una realtà virtuale nella quale sono permesse un'infinità di libere espressioni senza alcun vincolo e restrizione se non legata all'aspetto tecnologico, che per la maggior parte degli avatar è superabile nel tempo. In realtà in materia nascono alcune problematiche già messe al vaglio da diverse nazioni e istituzioni sull'espressione di "Villaggio Globale":

- Una globalizzazione non totale, che riguarda una piccola porzione del mondo reale in quanto:
 - a. è rivolta alla parte tecnologicamente avanzata del pianeta, basti pensare che il 61% degli avatar sia europeo, il 19% nordamericano e il solo 13% asiatico
 - b. ai ricchi che possiedono l'uso delle fonti energetiche e culturali
 - c. a causa delle profonde divisioni dal resto di un mondo non globale in cui il web non giunge
 - d. a causa di una forte diffidenza basti guardare la Cina che concorre tecnologicamente con l'Occidente
- L'uso improprio della rete per scopi di pedofilia
- La proiezione di una realtà e di un sistema economico, culturale e religioso esistente e che come tale è in assoluto contrasto con l'utopia di una società felice e perfetta che non è e che dovrebbe essere
- Alcuni psichiatri lo considerano un gioco pericoloso nel caso l'utente sia persuaso, anche a causa della forte influenza psicologica praticata dalla ditta

produttrice per ragioni di guadagno, il pericolo più grande è che "Second Life" diventi veramente una seconda vita, anziché una finzione.

Tutti questi aspetti hanno indotto diverse nazioni verso politiche di controllo messe in atto dalle forze di polizia per controllare e cercare di gestire nel miglior modo possibile la complessità del problema. Second Life è caratterizzata da una vera e propria struttura nella quale si possono delineare le differenti caratteristiche che rendono questa realtà virtuale unica nel suo genere:



L'elemento politico in quanto tale è largamente diffuso in Second Life: dalla politica pragmatica come i luoghi di propaganda (ad esempio i siti di supporto o

di opposizione all'amministrazione americana) o come quelli in cui si dibattono temi particolari alla politica ideale, come i luoghi costruiti da gruppi socialisti, comunisti, anarchici che sono abbastanza numerosi. Con delle analisi più approfondite però si è potuto constatare una certa superficialità e la prevalenza di elementi commerciali e di svago e quindi di condizioni abbastanza agevolate all'espressione di ideali utopici, le quali invece non si realizzano, almeno finora, compiutamente. Il fattore denaro (che da virtuale diventa reale) è uno degli apici del Second Life in quanto muove gran parte dell'attività dei naviganti e che fa diventare SL un luogo assai appetibile non solo per investitori virtuali, ma per protagonisti dell'economia reale. Un'ulteriore riflessione consiglierebbe di indagare sull'età dei residenti. I dati statistici rilevabili dal web indicano un'età media di 32 anni. Da una ricerca effettuata dalla Linden Lab si evince che a sorpresa gli italiani, partiti in sordina nell'apprezzare la possibilità di inventarsi una seconda vita, già lo scorso gennaio balzavano tra i paesi Top Ten con i loro 1.93% di residenti attivi (al primo posto gli Stati Uniti con il 31,19%) convalidando la convinzione che fa della nostra una nazione scarsamente propensa al rischio, più portata ad osservare e solo quando tutto è più che consolidato, a partecipare. Certo che osservando anche l'età dei residenti (13-17 anni con 1,24%; 18-24 anni con 27,46%; 25-34 anni con 38,78%, 35-44 anni con 21 %, e 45+ anni con 11,52%) e verificando come questo nuovo mondo sia prevalentemente "giovane", viene da chiedersi se mai arriverà l'era di una spinta innovativa tutta nostrana. Come si può constatare consultando le tabelle a pagina 5 come

l'aumento della popolazione residente nel Second Life abbia avuto un'impennata esponenziale dopo un primo tentennamento nei mesi iniziali. Nelle tabelle successive si possono controllare: il numero di residenti, numero di registrati, percentuale dei residenti attivi per paese (condizione per essere tale è il collegamento per più di un'ora al mese) e il totale delle ore di utilizzo da parte di tutti i residenti. SL mette in relazione più persone di varie culture contemporaneamente, finisce per sfociare in un uso altrettanto consumistico delle relazioni interpersonali: il disagio sociale che probabilmente è almeno in parte fattore di interesse per esperienze come le comunità virtuali, comporta la ricerca di relazioni numerose ma superficiali e momentanee che non consentono l'interscambio profondo di idee e opinioni intime; al pari di quanto accade d'altronde nei luoghi di ritrovo e di divertimento odierni, dove la compulsività della ricerca di relazioni cela gravi solitudini.

<u>Numero di registrati</u>		<u>Percentuali dei residenti attivi per paese</u>	
2003 gennaio 144	2006 gennaio	Stati Uniti 31,19%	Repubblica Ceca
2003 febbraio 167	124.175	Francia 12,73%	0,11%
2003 marzo 209	2006 febbraio	Germania 10,46%	Sud Africa 0,11%
2003 aprile 286	144.830	Regno Unito	Hong Kong 0,11%
2003 maggio 411	2006 marzo	8,09%	Taiwan 0,09%
2003 giugno 618	165.054	Olanda 6,55%	Croazia 0,08%
2003 luglio 881	2006 aprile	Spagna 3,83%	Estonia 0,08%
2003 agosto 1.095	198.104	Brasile 3,77%	Lussemburgo
2003 settembre	2006 maggio	Canada 3,30%	0,08%
1.294	228.445	Belgio 2,63%	Europa 0,08%
2003 ottobre 1.477	2006 giugno	Italia 1,93%	Colombia 0,07%
2003	323.467	Australia 1,48%	Malesia 0,07%
novembre 1.745	2006 luglio	Svizzera 1,29%	Marocco 0,06%
2003 dicembre	427.817	Giappone 1,29%	Emirati Arabi
2.098	2006 agosto	Svezia 0,95%	0,06%
2004 gennaio 2.740	597.269	Danimarca 0,88%	Filippine 0,06%
2004 febbraio	2006 settembre	Cina 0,61%	Tailandia 0,06%
3.419	805.638	Austria 0,56%	Afghanistan 0,06%
	2006 ottobre		

2004 marzo 4.026	1.203.244	Grecia 0,55%	Bulgaria 0,05%
2004 aprile 5.159	2006 novembre 1.727.229	Turchia 0,51%	Peru 0,05%
2004 maggio 6.351		Messico 0,48%	Slovenia 0,04%
2004 giugno 8.133	2006 dicembre 2.251.416	Argentina 0,45%	Tunisia 0,04%
2004 luglio 9.443		Irlanda 0,39%	Cipro 0,04%
2004 agosto 10.910	2007 gennaio 3.117.287	Portogallo 0,39%	Porto Rico 0,04%
2004 settembre 12.485		Polonia 0,36%	Algeria 0,04%
2004 ottobre 14.038		Ungheria 0,34%	Egitto 0,04%
2004 novembre 15.481		Norvegia 0,33%	Russia 0,03%
2004 dicembre 17.131		Venezuela 0,29%	Arabia Saudita 0,03%
2005 gennaio 18.959		Israele 0,27%	Costa Rica 0,03%
2005 febbraio 20.913		Singapore 0,26%	Ucraina 0,03%
2005 marzo 23.058		Nuova Zelanda 0,21%	Andorra 0,03%
2005 aprile 25.361		Romania 0,20%	Slovakia 0,03%
2005 maggio		Finlandia 0,19%	Vietnam 0,03%
		India 0,18%	Latvia 0,03%
		Cile 0,17%	Martinica 0,03%
		Corea del Nord 0,12%	Lithuania 0,03%
			Albania 0,02%

27.642			Uruguay 0,02%
2005 giugno 30.820			
2005 luglio 36.663			
2005 agosto 40.200			
2005 settembre 52.635			
2005 ottobre 69.524			
2005 novembre 84.155			

All'interno di Second Life si vive una vera e propria vita. Come prima cosa si deve creare l'identità tanto desiderata (si può assumere la sembianza che si vuole:alti,biondi,belli ecc.)



e poi cercare di cominciare una vita da zero. Bisogna ad esempio vestirsi, comprare da mangiare, lavorare ovvero vivere in tutti i sensi. Ma per fare qualsiasi cosa bisogna cominciare a guadagnare qualche Lined Dollar e come fare?????

Si possono guadagnare dei soldi trovando un lavoro vero e proprio ad esempio come ballerino oppure esistono dei luoghi dove si possono guadagnare qualche LD ballando, prendendo il sole o semplicemente stando seduti. Buffo vero? Ebbene si anche senza fare nulla, stando seduti in uno dei numerosi locali ed in mille altre maniere apparentemente banali si può “lavorare”. Ed in mille altre maniere, apparentemente banali. Certo non si guadagna granchè ma per una cifra che varia da 10 a 20 L\$ l'ora vale anche la pena, per non girare proprio senza soldi. Ecco una lista di luoghi che offrono questa possibilità: Money Island Una intera isola per guadagnare ballando, stando seduti (circa 5 L\$ ogni 10 minuti) o compilando sondaggi (più remunerativo, ma vengono richiesti dati personali).

Carduccis Mansion Qui sembrano un po' più taccagni. Per una ora seduti di fronte alle slot (senza giocare) pagano 12 L\$. TOnline Beach .Qui puoi prendere il sole guadagnando 2 L\$ ogni 10 minuti

Perchè qualcuno dovrebbe pagare per non fare nulla? E' l'altro quesito che nasce spontaneo. Successivamente però, curiosando tra i vari terreni in vendita e in affitto in Second Life e tramite delle ricerche sulla rete si capisce il perchè. I terreni o comunque i luoghi più frequentati vengono restituiti con più rilevanza nelle ricerche, conseguentemente sono più affollati ed acquistano valore, sia per la vendita che per l'affitto. I luoghi in Secondo Life sostanzialmente hanno le stesse dinamiche dei siti

internet: più visitatori, più valore. Poiché si simula una vita vera e propria in SD si diventa anche residenti e quindi si viene assunti per un lavoro vero proprio. In quasi tutti luoghi si trovano oggetti gratuiti da prendere, ma quasi sempre di tratta di merchandising o oggetti sponsorizzati. Esistono quasi dappertutto negozi di abbigliamento ma i capi si pagano. Alcuni sono economici, altri decisamente più cari, ma sempre a pagamento. A meno che non si conoscano i posti giusti.

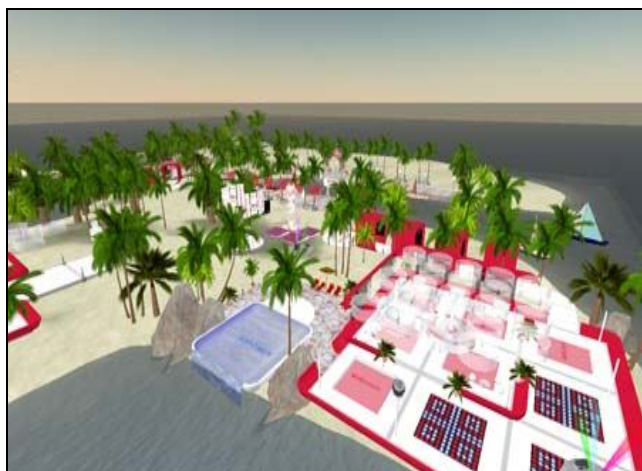


La bellezza di Second Life oltre che di crearsi una nuova identità è anche quella di scoprire dei luoghi nuovi pieni di curiosità. Help Island: è un'isola che ti permette di esercitarti nell'iterazione con il mondo esterno, l'utilizzo di oggetti ed anche di veicoli (aerei, auto, barche) e insegna le tecniche di base della creazione. Esistono anche manuali e corsi più avanzati di programmazione per la creazione di oggetti avanzati con iterazioni sul mondo esterno. Anche su Help Island esiste un negozio gratis, che offre addirittura un aereo, una bicicletta, una casa ed altri oggetti decisamente interessanti. Secret Reflection : una grotta meravigliosa tutta da esplorare. Babylon, Babylonia : un' isola dedicata alla civiltà di Sumer, in particolare alla dea Ishtar / Inanna, meglio conosciuta come Aphrodite per i greci o Venus per i

Romani. C'è un vero e proprio museo ed alcuni templi dell'antica Sumer ricostruiti. AKK Horse Ranch Island, Aeos : un ranch fantastico circondato dal mare. E' possibile andare a cavallo o godere del meraviglioso tramonto. Skydive SL Skydiving on St. Pom, Pamran : un centro di addestramento per lancio con il paracadute e tante altre invenzioni da scoprire e soprattutto da creare liberamente in una realtà virtuale in cui l'unico vincolo è l'immaginazione. Ora di seguito sono riportate alcune immagini e siti interessanti per capire meglio il principio di questa nuova realtà virtuale: www.secondlife.com (sito che consente di convertire L\$ in \$ americani), www.youmark.it (sito che riporta le statistiche di Liden Lab)

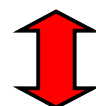
ALCUNI CLASSICI PAESAGGI PRESENTI NEL SECOND LIFE

***COMPLESSO
RESIDENZIALE***



MUSEO DELL'ARTE

***UNA DELLE
NUMEROSE VIE***



PAESAGGIO

DECOMPOSITION METHOD IN COMPARISON WITH NUMERICAL SOLUTIONS OF BURGERS EQUATION

Christos Mamaloukas* and Stefanos Spartalis**

ABSTRACT – This paper presents a solution of the one-dimension Burgers equation using Decomposition Method and compares this solution to the analytic solution [Cole] and solutions obtained with other numerical methods. Even though decomposition method is a non-numerical method, it can be adapted for solving nonlinear differential equations. The advantage of this methodology is that it leads to an analytical continuous approximated solution that is very rapidly convergent [2,7,8]. This method does not take any help of linearization or any other simplifications for handling the non-linear terms. Since the decomposition parameter, in general, is not a perturbation parameter, it follows that the non-linearities in the operator equation can be handled easily, and accurate solution may be obtained for any physical problem.

1. Introduction

Many problems in Fluid Mechanics and in Physics are governed generally by the Navier-Stokes equations. These equations can show the behaviour of a certain attribute (e.g. momentum, heat) in space and time. The one-dimension non-linear differential equation which is used as a model for these problems is Burgers equation. This equation is applied to laminar and turbulence flows as

* Athens University of Economics and Business, Dept. of Informatics, 76
Patission Str, 10434 Athens, Greece, email: mamkris@aueb.gr

** Democritus University of Thrace, Dept. of Production Engineering and
Management, School of Engineering, University Library Building, Kimeria
67100 Xanthi, Greece, email: sspart@pme.duth.gr

well. The Burgers equation which is the one-dimension nonlinear Diffusion Equation is similar to the one dimension Navier-Stokes equation without the stress term. Many researchers tried to find analytic and numerical solutions of this equation using the appropriate initial and boundary conditions. Characteristically in Benton and Platzman [10] are mentioned almost 35 distinct solutions of Burger equation but only the half of them are having physical interest. Agas [9] tried to get approximate solution of Burger equation using a new numerical solution which is called "Group of Explicit" Method. He also tried the method of Finite Differences and the method of Lines in Finite Elements. The problem he faced was that these methods could not give solutions for big values of the Reynolds number. He also found some problems in convergence.

In this paper, a solution obtained by the Adomian's Decomposition Method (ADM), which is described briefly in this paper and was used by Mamaloukas [12, 13] for the numerical solution of the one-dimensional Kortweg-de Vries equation and the pulsatile flow of an incompressible viscous fluid through a circular rigid tube provided with constriction, is compared numerically and graphically to the analytic and to some others numerical methods. As it is shown in the diagrams at the end of this paper this method gives a computable and accurate solution of the problem using only a small number of terms.

2. Formulation of the Problem

Consider the Burgers equation with the following form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

with boundary conditions: $u(0, t) = u(1, t) = 0$ for $t \geq 0$

(2)

and initial condition: $u(x, 0) = 4x(1-x)$ or $\sin \pi x$

(3)

3. Brief Description of ADM

Let $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ and $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Then the equation (1) takes the form:

$$L_t u + Nu = \nu L_{xx} u \quad (4)$$

where the first term is the linear, the third is the highest order term and the second is the non-linear term given by

$$Nu = u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

Now, solving (4) for $L_t u$ and $L_{xx} u$ correspondingly we have

$$L_t u = \nu L_{xx} u - Nu \quad (6)$$

$$L_{xx} u = \nu^{-1} (L_t u + Nu) \quad (7)$$

By defining the one and twofold right-inverse operators L_t^{-1} and L_{xx}^{-1} , given by the form $L_t^{-1} = \int (\cdot) dt$ and $L_{xx}^{-1} = \iint (\cdot) dx dx$, we can formally obtain from (6) and (7)

$$L_t^{-1} L_t u = L_t^{-1} [\nu L_{xx} u - Nu] \quad (8)$$

$$L_{xx}^{-1} L_{xx} u = \nu^{-1} L_{xx}^{-1} [L_t u + Nu] \quad (9)$$

From relations (8) and (9) we obtain

$$u = u_0 + \frac{1}{2} \left[\nu^{-1} L_{xx}^{-1} (L_t u + Nu) + L_t^{-1} (\nu L_{xx} u - Nu) \right] \quad (10)$$

where the term u_0 is to be determined from the initial conditions, so, is

$$u_0 = 4x(1-x) \text{ or } \sin \pi x \quad (11)$$

4. Solution of Burger's Equation with ADM

Now, we introduce a formal counting parameter λ to write equation (10) in the following form

$$u = u_0 + \lambda \frac{1}{2} \left[\nu^{-1} L_{xx}^{-1} (L_t u + Nu) + L_t^{-1} (\nu L_{xx} u - Nu) \right] \quad (12)$$

The equation (12) is called parameterized equation and the parameter λ inserted here is not a perturbation parameter; it is used only for grouping the terms. The u and the nonlinear term Nu are decomposed into the following parameterised forms

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \quad (13)$$

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \quad (14)$$

where A_n are the Adomian's special polynomials [1,2] for the specific non-linearity to be determined by expanding Nu in the ascending power of λ and equating the terms of like powers of λ from both sides of (12). These special polynomials depend only on the u_0 to u_n components.

Substituting the expressions (13) and (14) into (12) and then equating the like power terms from both sides of the resulting expression we have

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \left[\nu^{-1} L_{xx}^{-1} (L_t u_0 + A_0) + L_t^{-1} (\nu L_{xx} u_0 - A_0) \right] \\ u_2 &= \frac{1}{2} \left[\nu^{-1} L_{xx}^{-1} (L_t u_1 + A_1) + L_t^{-1} (\nu L_{xx} u_1 - A_1) \right] \\ &\dots\dots\dots \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2} \left[\nu^{-1} L_{xx}^{-1} (L_t u_n + A_n) + L_t^{-1} (\nu L_{xx} u_n - A_n) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (15)$$

All components are determinable since A_0 depends only on u_0 , A_1 depends only on $u_0, u_1, \dots$, A_n depends only on $u_0, u_1, \dots, u_n$. So, in order to determine Adomian's special polynomials, from (5) and (14) we write

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n = u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (16)$$

Substituting (13) into (16) and then comparing like-power terms of λ on both sides of resulting expression we obtain the following polynomials.

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_1 &= u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_2 &= u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (17)$$

Using the initial condition (11) A_0 can be calculated from expression (17). Substituting the result in the expression of u_1 (15) and then performing all necessary calculations and integrations with respect to t and x respectively, we have u_1 which is:

$$u_1 = -4vt - 8tx + 24tx^2 + \frac{4vx^3}{3} - 16tx^3 - 2vx^4 + \frac{4vx^5}{5} \quad (18)$$

and u_2 which is

$$\begin{aligned} u_2 = & 16vt^2 + 4v^2tx + 16t^2x - 32vt^2x - v^2x^2 - 16v^2tx^2 - 96t^2x^2 - \frac{2vx^3}{3} - \\ & - 16vt^3x^3 + \frac{32}{3}v^2tx^3 + 160t^2x^3 + vx^4 + \frac{148}{3}vt^4x^4 - 80t^2x^4 - \frac{2vx^5}{5} + \\ & + \frac{8v^2x^5}{15} - \frac{248}{5}vt^5x^5 - \frac{10v^2x^6}{9} + \frac{248}{15}vt^6x^6 + \frac{4v^2x^7}{5} - \frac{v^2x^8}{5} \end{aligned} \quad (19)$$

If we suggest as a solution of u an approximation of only two or three terms then from (11), (18) and (19) we have the solution of (1):

$$u = u_0 + u_1 \text{ or } u = u_0 + u_1 + u_2$$

As an example, if we give the values $x = 0.25, t = 0.05, v = 0.001$ we get $u = 0.712314$ with two terms and $u = 0.712791$ with three terms.

5. Tables of Results and Diagrams

For the solution of this equation the initial conditions $u(x,0) = 4x(1-x)$ and $u(x,0) = \sin \pi x$ were used without restricting generality. The boundary conditions were $u(0,t) = u(1,t) = 0$ for $t \geq 0$. The compared methods are Analytic Solution, the Implicit method, the Explicit method, the methods of lines with Gauss-Legendre and Hermite, the Group of Explicit method and the Decomposition method. For comparison reasons with the results of other published papers, $\Delta x = 0.25$ and time amplitude $0.01 \leq t \leq 0.25$ were used.

In the above diagrams numerical results of Burger equation are registered for different values of ν . For comparison reasons the viscosity values $\nu = 1, \nu = 0.1, \nu = 0.01, \nu = 0.001$ were used.

We give below the Tables of Results and some diagrams only for the first initial condition $u(x) = 4x(1-x)$ for values of $x = 0.25, 0.5, 0.75$ for $t = 0.01, 0.05$ (0.05) 0.25 and for $\nu = 1, 0.1, 0.01, 0.001$. As for the second initial condition we get similar results. For comparison reasons we also use as a solution of u , two and three terms of Decomposition method.

x=.25	v=0.1		4x(1-x)				
t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.7422	0.7276	0.7236	0.7274	0.7273	0.7272	0.7399
0.05	0.6621	0.6745	0.67	0.6453	0.6452	0.6471	0.6939
0.1	0.584	0.5675	0.5548	0.5608	0.5592	0.5671	0.6364
0.15	0.5189	0.5043	0.5042	0.4931	0.4853	0.5039	0.5789
0.2	0.4681	0.4535	0.4536	0.4362	0.4213	0.4531	0.5214
0.25	0.4265	0.4119	0.4118	0.4263	0.3652	0.4115	0.4639
x=.50/t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.9917	0.9911	0.9901	0.9916	0.9923	0.9914	1.0027
0.05	0.9533	0.9527	0.9423	0.9516	0.9524	0.953	0.9867
0.1	0.8993	0.8987	0.8815	0.893	0.8933	0.899	0.9667
0.15	0.8434	0.8428	0.8326	0.8317	0.8313	0.8431	0.9467
0.2	0.7889	0.7883	0.7935	0.7352	0.7714	0.7886	0.9267
0.25	0.7375	0.7369	0.7328	0.5198	0.7143	0.7372	0.9067
x=.75/t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.7417	0.7571	0.7517	0.7567	0.7572	0.757	0.7654
0.05	0.7663	0.7818	0.7823	0.778	0.7793	0.7816	0.7795
0.1	0.7882	0.8038	0.7906	0.7892	0.7934	0.8035	0.7969
0.15	0.7999	0.8154	0.8013	0.778	0.7923	0.8152	0.8145
0.2	0.802	0.8093	0.8179	0.1649	0.7782	0.8173	0.832
0.25	0.7955	0.8067	0.8116	0.206	0.7553	0.8108	0.8495

x=.25	v=0.01						
t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.7492	0.7346	0.7342	0.7344	0.734	0.7342	0.7422
0.05	0.746	0.6766	0.6748	0.675	0.6745	0.6755	0.7106
0.1	0.742	0.6122	0.6087	0.608	0.6075	0.6104	0.6711
0.15	0.738	0.5562	0.5512	0.5494	0.5514	0.5537	0.6316
0.2	0.734		0.5016	0.4998	0.5043	0.5046	0.5921
0.25	0.73			0.4534	0.4642	0.4652	0.5526
x=.50/t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.9992	0.9986	0.9992	0.9984	0.999	0.9989	1.0003
0.05	0.996	0.9873	0.9901	0.9854	0.9875	0.9887	0.9987
0.1	0.992	0.9611	0.9662	0.9556	0.9573	0.9636	0.9967
0.15	0.988	0.9233	0.9299	0.9144	0.9183	0.9263	0.9947
0.2	0.984		0.8835	0.8667	0.8734	0.8796	0.9927
0.25	0.98			0.7908	0.8283	0.8256	0.9907
x=.75/t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.7556	0.7644	0.7517	0.7643	0.7651	0.7645	0.7583
0.05	0.7722	0.8241	0.7823	0.8206	0.8243	0.824	0.7867
0.1	0.8469	0.9027	0.7906	0.886	0.8954	0.902	0.8222
0.15	0.925	0.9843	0.8013	0.9381	0.9544	0.9832	0.8577
0.2	0.9945		0.8179	0.9631	0.9931	1.0671	0.8932
0.25	0.9996		0.8116	0.8109	1.005	1.1513	0.9287

x=.25	v=0.001						
t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.7349	0.701	0.6945	0.7351	0.7352	0.735	0.7425
0.05	0.6746	0.6432	0.5932	0.6778	0.6765	0.6782	0.7123
0.1	0.6075	0.6015	0.6014	0.6126	0.6126	0.6144	0.6746
0.15	0.5538	0.5843	0.5885	0.5555	0.5571	0.5582	0.6369
0.2	0.4979			0.5061	0.5112	0.5094	0.5992
0.25	0.4543			0.463	0.4743	0.4673	0.5615
x=.50/t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.9982	0.9325	0.9632	0.9991	0.9991	0.9996	1
0.05	0.9864	0.9432	0.9736	0.9888	0.9901	0.9921	0.9998
0.1	0.9558	0.9228	0.9323	0.9617	0.9643	0.9699	0.9997
0.15	0.9243	0.8647	0.8842	0.9223	0.9283	0.9343	0.9995
0.2	0.8663			0.8754	0.8872	0.8871	0.9993
0.25	0.7906			0.8209	0.8453	0.8306	0.9991
x=.75/t	Analytic	Implicit	Explicit	L-Gauss	L-Hermite	Group	Decomp
0.01	0.7652	0.6946	0.7432	0.765	0.7652	0.7651	0.7576
0.05	0.8204	0.8417	0.8436	0.8249	0.8284	0.8285	0.7874
0.1	0.8859	0.9632	0.9348	0.895	0.9062	0.9138	0.8247
0.15	0.9379	1.023	1.018	0.9507	0.971	1.0049	0.862
0.2	0.9628			0.9817	1.013	1.1005	0.8993
0.25	0.8115			0.9514	1.024	1.1988	0.9366

Table 1: Comparison results for Burger equation for initial condition $4x(1-x)$ with $v = 1, 0.1, 0.01, 0.001, \Delta x = 0.25, \Delta t = 0.05$

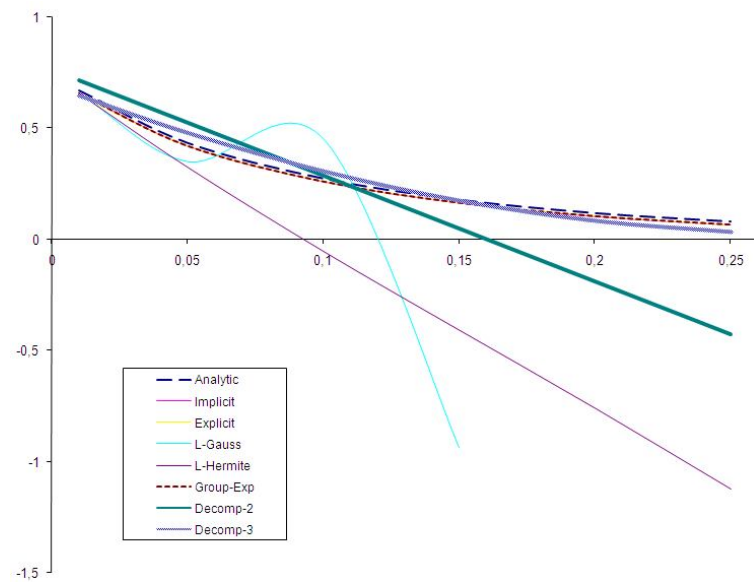


Diagram 1: Comparison results with $v = 1$, $x = 0.25$, $0.01 \leq t \leq 0.25$ using 2 and 3 terms

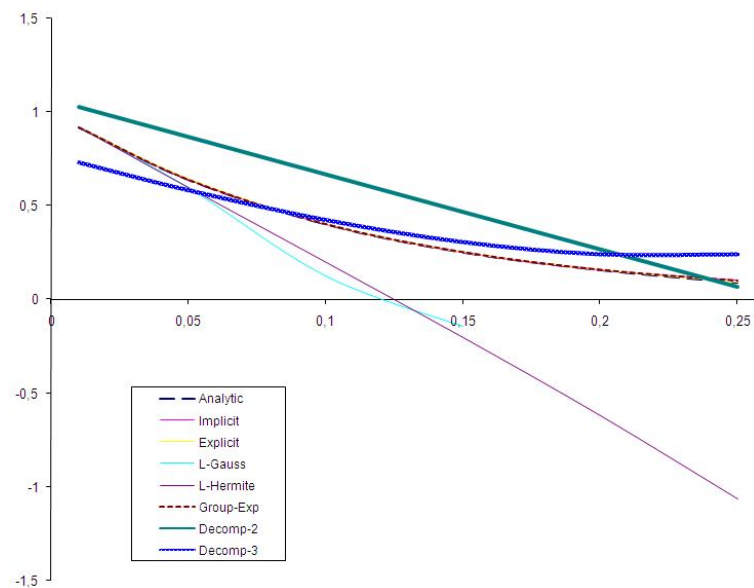


Diagram 2: Comparison results with $v = 1$, $x = 0.5$, $0.01 \leq t \leq 0.25$ using 2 and 3 terms

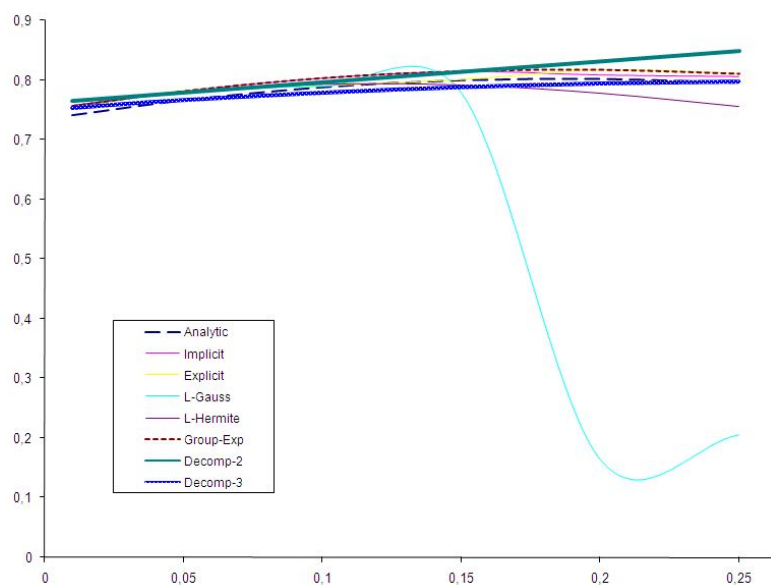


Diagram 3: Comparison results with $v = 0.1$, $x = 0.75$, $0.01 \leq t \leq 0.25$ using 2 and 3 terms

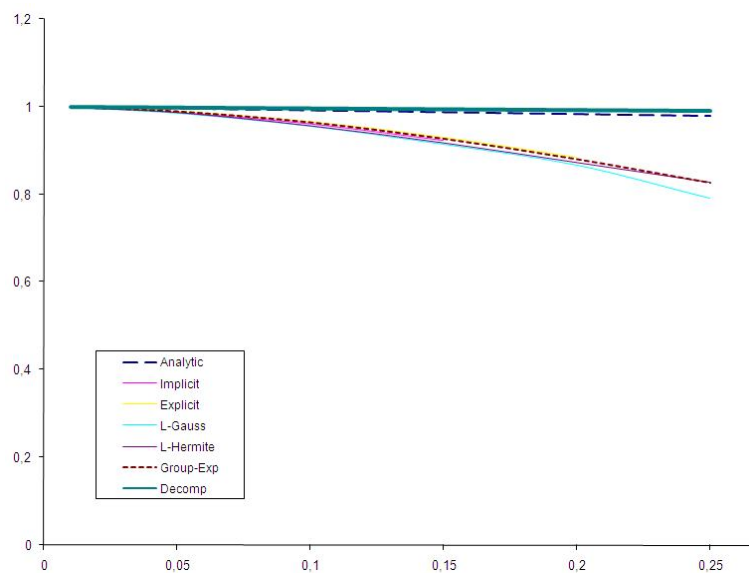


Diagram 4: Comparison results with $v = 0.01$, $x = 0.5$, $0.01 \leq t \leq 0.25$ and 2 terms

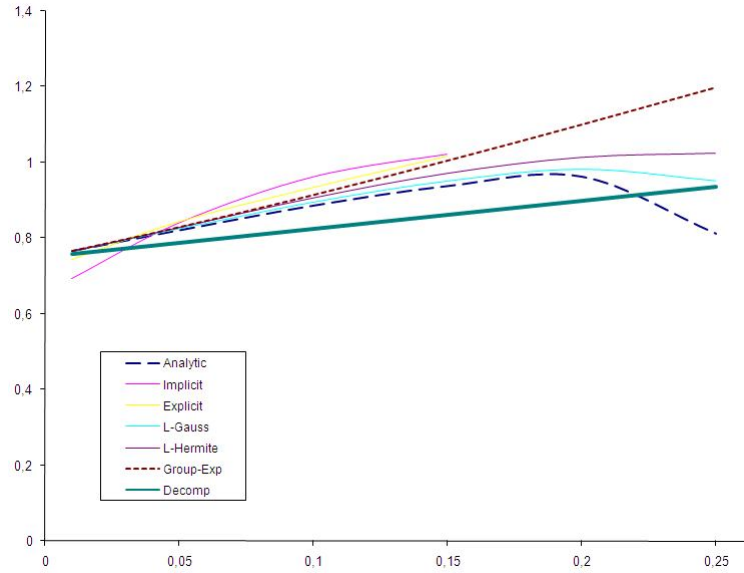


Diagram 5: Comparison results with $\nu = 0.001$, $x = 0.75$, $0.01 \leq t \leq 0.25$ and 2 terms

6. Discussions

The analytic solution as it is described by Cole [13] is liable to restrictions concerning the values of the coefficient $\nu = \frac{1}{R_e}$. For example, if the value of the

Reynolds number is greater than 1000 then we can not find any solution because Fourier series do not converge. For this reason we try numerical approaches, like finite differences and finite elements.

Concerning finite differences the explicit method give us adequate results if and only if $\lambda \leq 1/2$. Otherwise results did not converge. With the implicit method we do not need the covenant $\lambda \leq 1/2$, but we need a large number of calculations. Finally, the group of explicit methods gives us adequate results with few calculations and the method is more stable.

Concerning finite elements, the method of lines with Gauss and Hermite was used with initial and boundary conditions from Madsen and Sincovec [14]. These methods, using great values of Reynolds number, gave us adequate results without the limitations for Δx and Δt , with small number of repetitions and without stability limitations. However, the errors depend first on the choice of the polynomial and second on the choice of Δx and Δt

Concerning the decomposition method from the above diagrams it is obvious how powerful this method is. Using only two terms we can obtain similar results with the other numerical methods and the analytic solution. Of course, in some cases the present solutions deviate from the solutions given in the table. The decomposition solution can be further improved if more-term approximations of the solution are obtained.

As far as accurate results are concerned, computational experience has shown that they can be obtained easily by taking half a dozen terms. In case we do not have a sufficiently high precision by using a few of the A_n , then accordingly to Rach R. [15] there are two alternatives. One is to compute additional terms by any of the available procedures. The second approach is to use the Adomian-Malakian "convergence acceleration" procedure [16]. This unique approach conveniently yields the error-damping effect of calculating many more terms of the A_n to determine whether further calculation is required.

7. Conclusions

The great advantage of the decomposition method is that of avoiding simplifications and restrictions which change the non-linear problem into a mathematically tractable one, whose solution is not consistent to physical solution.

Further study on the stability and the convergence of the solutions will prove the accuracy of the above method.

BIBLIOGRAPHY

1. G. ADOMIAN, *Nonlinear Stochastic Operator Equations*, Academic Press, 1986.
2. G. ADOMIAN, *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
3. G. ADOMIAN, J. Math. Anal. Appl., 119, (1986), 340-360.
4. G. ADOMIAN, Appld. Math. Lett., 6, No5, (1993), 35-36.
5. G. ADOMIAN, Rach R., *On the Solution of Nonlinear Differential Equations with Convolution Product Non-linearities*, J. Math. Anal. Appl., 114, (1986), 171-175.
6. G. ADOMIAN, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
7. Y. CHERRUAULT, Kybernetes, 18, No2, (1989), 31-39.
8. Y. CHERRUAULT, Math. Comp. Modeling, 16, No2, (1992), 85-93.
9. C. AGAS, *The Effect of Kinematic Viscosity in the Numerical Solution of Burger Equation*, Thessaloniki, 1998.

10. E.R. BENTON & G.W. PLATZMAN, *A Table of Solutions of the one-dimensional Burgers Equation*, Quart. Appl. Math., 1972.
11. J. M. BURGERS, *The Nonlinear Diffusion Equation*, D. Reidel Publishing Company, Univ. of Maryland, USA, 1974.
12. C. MAMALOUKAS, *Numerical Solution of one dimensional Kortweg-de Vries Equation*, BSG Proceedings 6, Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, 6, (2001), 130-140.
13. C. MAMALOUKAS, Haldar K., Mazumdar H. P., *Application of double decomposition to pulsatile flow*, Journal of Computational & Applied Mathematics, 10 , Issue 1-2, (2002), 193–207.
14. J.D. COLE, *On a Quasilinear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics*, A.Appl. Maths, 9, (1951), 225-236.
15. N. K. MADSEN and R. F. SINCOVEC, *General Software for Partial Differential Equations in Numerical Methods for Differential System*, Ed. Lapidus L., and Schiesser W. E., Academic Press, Inc., 1976.
16. R. RACH, *A Convenient Computational Form of the Adomian Polynomials*, J. Math. Anal. Appl., 102, (1984), 415-419.
17. G. ADOMIAN and MALAKIAN, *Self-correcting approximate solutions by the iterative method for nonlinear Stochastic Differential Equations*, J. Math. Anal. Appl., 76, (1980), 309-327.
18. G. ADOMIAN and MALAKIAN, *Inversion of Stochastic Partial Differential Operators-The Linear Case*, J. Math. Anal. Appl., 77, (1980), 505-512.
19. G. ADOMIAN and MALAKIAN, *Existence of the Inverse of a Linear Stochastic Operator*, J. Math. Anal. Appl., 114, (1986), 55-56.
20. G. ADOMIAN and R. RACH, *Inversion of Nonlinear Stochastic Operators*, J. Math. Anal. Appl., 91, (1983), 39-46.

Effect of Introduction of Fault and Imperfect Debugging on Release Time

P. K. Kapur^{*}, Deepali Gupta[@], Anshu Gupta^{*}, P. C. Jha^{*}

Abstract

One of the most important decisions related to the efficient management of testing phase of software development life cycle is to determine when to stop testing and release the software in the market. Most of the testing processes are imperfect once. In this paper first we have discussed an optimal release time problem for an imperfect fault-debugging model due to Kapur et al considering effect of perfect and imperfect debugging separately on the total expected software cost. Next, we proposed a SRGM incorporating the effect of imperfect fault debugging and error generation. The proposed model is validated on a data set cited in literature and a release time problem is formulated minimizing the expected cost subject to a minimum reliability level to be achieved by the release time using the proposed model. Solution method is discussed to solve such class of problem. A numerical illustration is given for both type of release problem and finally a sensitivity analysis is performed.

Keywords: Software Reliability, Non-Homogeneous Poisson Process, Imperfect Debugging, Error Generation, Release Time.

1. INTRODUCTION

Last decade of the twentieth century is marked in history for the incredible growth in the information technology. Consequently computers and computer-based systems have entered in every walk

^{*} Department of Operational Research, University of Delhi, Delhi -07, India.

[@] Department of Mathematics, Jaypee Institute of Information Technology, Noida

and talk of our lives. We have become heavily dependent on automated tools and intelligent systems for almost every activity. A mere delay in the operation of these systems can lead to big financial losses. Our lives depend critically on the correct functioning of these systems. There are already numerous instances where failures of computer-controlled systems have led to colossal loss of human lives and economy. With the increased dependence of human kind on software systems, software systems are also becoming complex and large and a major concern for the software developers is to deliver more reliable software in smaller development time.

It is the testing stage of the software development in which attempts are made to remove most of the faults lying dormant in software. A successful test strategy begins by considering the requirement specification and continues by specifying test cases based on this requirement specification, to be executed later to find the corresponding faults, which might have been introduced during the various stages of the SDLC. The growing field of Software Reliability Engineering deals in building mathematical models that describe the failure\removal phenomenon with respect to time\testing efforts and consequent enhancement in reliability of the software due to fault removal known as Software Reliability Growth Modeling (SRGMs). Several SRGMS have been discussed and validated by the various researchers under the varying set of assumptions. Most of these models depict either exponential or S-shaped relationship between the testing time\effort and the corresponding number of faults removed [2,9].

Most of the earlier software reliability models assume the fault removal process (fault debugging) to be perfect i.e. when an attempt is made to remove a fault, it is removed with certainty and no new faults are introduced. But this assumption is not realistic due to the complexity of the software system and incomplete understanding of the user's requirements or specifications by the testing team. The software testing team may not be able to fix the cause of the failure properly or they may introduce new faults during removal. Therefore

it is necessary to incorporate the effect of imperfect debugging into the software reliability growth modeling. In recent years, several imperfect debugging SRGMs have been proposed and studied (Pham [10], Kapur and Younes [5], Slud [12], and Obha and Chou [8], etc.)

There are two type of imperfect debugging possibilities-first, on a failure the corresponding fault is identified, but just because of incomplete understanding of the software, the detected fault is not removed completely and hence the fault content of the software remains unchanged on the removal action, proposed by Kapur [3] known as imperfect fault debugging, - second, when on a failure the corresponding fault is identified and removed with certainty but some new faults are added to the software during the removal process, proposed by Obha and Chou[8]. This type of imperfect debugging led to an increase in the fault content of the software known as error generation.

No software can be tested indefinitely in order to make it bug free since users of the software want faster deliveries and constraint on development cost. As discussed above an important objective of developing SRGM is to predict software performance using the measure of software reliability and use the information for decision-making. An important decision problem of practical concern is to determine when to stop testing and release the software system to the user known as "Release Time Problem". This decision depends on the model used for describing the failure phenomenon and the criterion used for determining system readiness. The optimization problem of determining the optimal time of software release can be formulated based on goals set by the management. Firstly the management may wish to determine the optimal release time such that total expected cost of testing in the testing and operation phase is minimum. Secondly they may set a reliability level to be achieved by the release time. Thirdly they may wish to determine the release time such that the total expected cost of the software is minimum and reliability of the software is achieved to a certain desired level. Such a problem is known as a Bi-criteria release time problem. For Bi-criteria release

time problem release time is determined by carrying a trade off between cost and reliability. Many researchers in literature have studied various release time problems for different SRGMs [2,3,6,7,9]. Min Xie [13] attempted to determine the optimal release time of software using the SRGM proposed by Obha and Chou [8] incorporating the second type of imperfect debugging i.e. error generation. Whereas the author is referring to imperfect fault debugging that is due to the fault not fixed properly, in his cost model, which creates confusion between two types of imperfect debugging. The cost model used by the author is incomplete, as he considered the cost of fixing an error to be same for due to perfect and imperfect fault debugging during testing and operation phase. The mathematical form of SRGM by Obha and Chou [8] is equivalent to the Kapur [3] model of imperfect fault debugging but the two models are based on different set of assumptions, Obha and Chou model incorporate the effect of error generation whereas Kapur model incorporate the effect of imperfect fault debugging. In this paper we have determined the optimal time when software is ready to be release for use using the imperfect fault-debugging model due to Kapur [3] modifying the cost model of Min Xie. We incorporated separate cost of fixing an error due to perfect and imperfect fault debugging during testing and operation phase in the cost model and determined the release time in the way as determined by Min Xie, which gives the optimal values of the release time and the level of perfect debugging p . However it is imperative to estimate the level of perfect fault debugging i.e. p from the SRGM used to describe the failure phenomenon using the collected failure data, and not as a decision to be obtained from release time problem. At the optimal release time of software determined minimizing the cost, we may not obtain the desired reliability level. Hence if we have a reliability level to be achieved by the optimal time of software release we should incorporate the desired reliability level either as a constraint of a release time problem or as an objective of Bi-criteria release time problem. However we may not obtain a minimum cost at the desired reliability level, therefore release time is determined by a trade-off between reliability and cost. In this paper we have proposed a SRGM incorporating two types of imperfect

debugging simultaneously. The proposed model is validated on software failure data sets used in literature. We then determined the release time for the proposed model minimizing the total expected software cost subject to minimum level of reliability to be achieved by the release time incorporating the effect of imperfect debugging and error generation on cost model.

This paper is organized as follows: In the section 2.1 we have discussed a release time problem for perfect debugging SRGM due to Goel Okumoto. In section 2.2.1 we have discussed we have reviewed imperfect fault debugging SRGM due to kapur et al. Then in section 2.2.2 we have discussed the effect of imperfect debugging on total expected software cost and then finally in section 2.2.3 we formulated a release time problem for imperfect fault debugging SRGM due to kapur et al and derived the optimal release time of the software minimizing the total expected software cost. In section 3 first we proposed a SRGM incorporating the effect of imperfect debugging and fault generation in section 3.1. Parameters of the proposed model are estimated in section 3.2. Further we discuss the effect of imperfect fault debugging and error generation on total expected software cost in section 3.3 and finally a release time problem is formulated and solved minimizing the total expected software testing cost subject to minimum reliability level constraint. In section 4.1 a numerical illustration is given for both type of release problem and finally a sensitivity analysis is performed to determine the effect of variations in minimum reliability level to be achieved, in cost of fixing an error perfectly and imperfectly in operation phase and in level of perfect debugging..

2. Release Time Problem for Imperfect Fault Debugging SRGM

2.1 Determination of Release Time for Perfect Debugging SRGM

Among all SRGMs developed so far a large family of stochastic reliability models based on a non-homogeneous Poisson process known as NHPP reliability models, has been widely used. Some of

them depict exponential growth while others show S-shaped growth depending on nature of growth phenomenon during testing. Most commonly cost model seen in literature for determination of release time for perfect debugging NHPP models is [2,13]

$$C = C_1 m(T) + C_3 (m(\infty) - m(T)) + CT \quad \dots(2.1)$$

Using Goel Okumoto NHPP [2] model, for which the mean value function is

$$m(t) = a(1 - e^{-bt}) \quad \dots(2.2)$$

The optimal release time minimizing the total expected software cost defined as (1) is given by

$$T^* = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{ab(C_3 - C_1)}{C} \right) \quad \dots(2.3)$$

Maximum likelihood estimates (MLE) of a and b for the software failure data cited in Zhang and Pham [10], are obtained as $a = 142.32$ and $b = 0.1246$. Assuming $C_1 = \$200$, $C_3 = \$1500$, and $C = \$5$, from (3), the optimal release time is calculated as 67.70556 and the minimum expected software cost is found to be \$28,842. However, the model assumes a perfect testing process. It would be of interest to study the effect of imperfect debugging on total expected software testing cost. In the next section we have discussed the effect of imperfect fault debugging on expected software testing cost, briefly discussing the imperfect fault debugging SRGM due to Kapur [3].

2.2 Release Time Problem for Imperfect Fault Debugging SRGM (Kapur [1])

2.2.1 Imperfect Fault Debugging SRGM

A simple imperfect fault debugging model proposed by Kapur [3] assume on a failure the corresponding fault is identified and when an attempt is made to remove the fault it is not fixed properly, which does not lead to any change in the initial fault content of the software. The model is formulated as follows

Model Assumptions

1. Software system is subject to failures at random times caused by faults remaining in the software.
2. Failure rate of the software is equally affected by errors remaining in the software.
3. At any time the failure rate of the software is proportional to the faults remaining in the software.
4. On a instantaneous repair effort starts and the following may occur:
 - (a) Fault contents are reduced by one, with probability p
 - (b) Fault contents are unchanged with probability $1-p$.
5. The error removal phenomenon in the software is modeled by NHPP.

Notations

- a : initial error content.
- b : proportionality constant(fault removal rate per remaining fault).
- p : probability of perfect debugging.
- $m_f(t)$: mean number of failures detected in $(0,t]$.
- $m_r(t)$: mean number of faults removed in the software till time t .
- $\lambda(t)$: intensity function or fault detection rate per unit time.

The differential equation describing the rate of change of $m_r(t)$ with respect to time under the assumptions specified above and following the notations is given by

$$m'_r(t) = bp(a-m_r(t)) \quad \dots(2.4)$$

Solving equation (2.4) under the initial condition $m_r(0) = 0$ is given by

$$m_r(t) = a \left[1 - e^{-bpt} \right] \quad \dots(2.5)$$

Corresponding mean number of failures in $(0, t]$ is given by

$$m_f(t) = \int_0^t b(a - m_r(t)) dt \quad \dots(2.6)$$

$$m_f(t) = \frac{a}{p} \left[1 - e^{-bpt} \right] \quad \dots(2.7)$$

The NHPP intensity function is given by

$$\lambda(t) = ab \exp(-bpt) \quad \dots(2.8)$$

It can be seen that $\lambda(t)$ is a decreasing function in t with $\lambda(0) = ab$ and $\lambda(\infty) = 0$.

In the next section we have proposed the cost model incorporating the effect of imperfect debugging.

2.2.2 Effect of Imperfect Debugging on the Cost Model

A major concern in software development is the cost. It is well known that the development of a software system is time-consuming and costly. Since most software testing processes are imperfect debugging ones, it is of great importance for the management to know the effect of the imperfect debugging on software cost (Ammann et al. [1], Shanthikumar [11], and Pham [10]). On the other hand, if the release time of the software is determined by the minimum cost criterion, the imperfect debugging will affect the release time as well.

The parameter p representing the probability of perfect debugging can also represent the testing level, indicating “how perfect” the testing process is. Testing level parameter p is usually influenced by a number of factors, such as the experience of the testing personnel, the testing strategy adopted, and the number of reviews in debugging. When the testing level is low, it is possible to increase it to a certain extent, but usually this has to be achieved at a higher testing cost.

Total expected software cost includes cost of testing and the cost of fixing a fault during testing and operation phase for perfect and imperfect debugging. Cost of fixing an error is different for both perfect and imperfect debugging. Also the cost of testing is a function of perfect debugging probability p . Since the testing cost parameter C depends on the testing team composition and testing strategy used, If the probability of perfect debugging is to be increased, it is expected that extra financial resources will be needed to engage more experienced testing personnel, and this will result in an increase of C . In other words, C should be a function of the testing level, denoted by $C(p)$ and hence this function should possess the following two properties:

1. $C(p)$ is a monotonous increasing function of p .
2. When $p \rightarrow 1$, $C(p) \rightarrow \infty$.

The second property implies that perfect debugging is impossible in practice or the cost of achieving it is extremely high.

Notations:

- $C_1(C_2)$: cost incurred on a prefect (imperfect) debugging effort before release of the software system.
- $C_3(C_4)$: cost incurred on a prefect (imperfect) debugging effort after release of the software system. ($C_3 > C_1$, $C_4 > C_2$).
- C : testing cost per unit time.
- T : release time of the software.
- T^* : optimal release time.

R_0 : desired level of software reliability at the release time ($0 < R_0 < 1$).

Although there are many cost functions that can satisfy these conditions, a simple, but reasonable function that meets the two properties above is given by:

$$C(p) = \frac{C}{(1-p)} \quad \dots(2.9)$$

Hence, the cost model (2.1) can be modified as

$$\text{Min } C(T,p) = (C_1p + C_2(1-p))m_f(T) + (C_3p + C_4(1-p))(m_f(\infty) - m_f(T)) + \frac{CT}{(1-p)} \quad \dots(2.10)$$

If the release time remains at 67.70556, the software cost under different probabilities of perfect debugging or testing levels is calculated and summarized in Table 1. It is clear that the software cost changes significantly as the testing level, p , changes. Obviously, if the management has not taken into consideration the effect of imperfect debugging on software cost, the model may give a wrong estimate of the system reliability and/or cost at the release time.

Table 1.

p	Cost($\$10^3$)
0.7	37037
0.75	35485.03
0.8	34345.28
0.85	33652.61
0.9	33693.12
0.95	36123.14
1	∞

In the next section we will determine optimal release time and optimal testing level such that the total expected software cost is minimized.

2.2.3 Optimal Release Policy

The optimization problem minimizing the total expected software cost in order to determine optimal release time T^* and optimal testing level p^* can be formulated as follows

$$\begin{aligned} \text{Min } C(T,p) &= [C_1p + C_2(1-p)] \cdot m_f(T) + [C_3p + C_4(1-p)] \cdot (m_f(\infty) - m_f(T)) + \frac{CT}{(1-p)} \\ \text{Subject to } 0 < p < 1 \quad \text{and} \quad T > 0 \quad \dots(2.11) \end{aligned}$$

Using the principles of calculus the above optimization problem can be solved as follows:

Taking partial derivatives of $C(p,T)$ with respect to p and T and equate them to zero, we have that

$$\frac{\partial C}{\partial T} = [C_1p + C_2(1-p)] \cdot a e^{-bpT} + [C_3p + C_4(1-p)] \cdot (-a e^{-bpT}) + \frac{C}{(1-p)} = 0 \quad \dots(2.12)$$

And

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial p} &= (C_1 - C_2) \frac{a}{p} (1 - e^{-bpT}) + (C_1p + C_2(1-p)) \left(-\frac{a}{p^2} + \frac{a}{p^2} e^{-bpT} + \frac{abT}{p} e^{-bpT} \right) \\ &\quad + (C_3 - C_4) \left\{ \frac{a}{p} (e^{-bpT}) \right\} + (C_3p + C_4(1-p)) \left(-\frac{a}{p^2} e^{-bpT} - \frac{abT}{p} e^{-bpT} \right) + \frac{CT}{(1-p)^2} = 0 \quad \dots(2.13) \end{aligned}$$

From (2.12) T can be expressed in terms of p as

$$T = g(p) = \frac{1}{bp} \ln \left(\frac{ab(D_2 - D_1)(1-p)}{C} \right) \quad \dots(2.14)$$

Where $D_1 = C_1p + C_2(1-p)$, $D_2 = C_3p + C_4(1-p)$

It is clear that, when p takes values between $(0,1)$, the condition $T > 0$ is always satisfied.

Substituting the value of T from (2.14) into (2.13), we get

$$\frac{\partial C}{\partial p} = \frac{(2p-1)C(D_2 - D_1) \ln \left\{ \frac{ab(D_2 - D_1)(1-p)}{C} \right\} - C_2 ab(D_2 - D_1)(1-p)^2 - C(C_4 - C_2)(1-p)}{bp^2(1-p)^2(D_2 - D_1)} = 0 \quad \dots(2.15)$$

or, equivalently $h(p) = 0$.

$$h(p) = (2p-1)C(D_2 - D_1) \ln \left\{ \frac{ab(D_2 - D_1)(1-p)}{C} \right\} - C_2 ab(D_2 - D_1)(1-p)^2 - C(C_4 - C_2)(1-p) = 0 \quad \dots(2.16)$$

$h(p)$ is a continuous function of p on $(0,1)$ and

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} h(p) = -K \quad \lim_{p \rightarrow 1^-} h(p) = -\infty \quad \dots(2.17)$$

$$\text{where } K = \left(C \ln \left(\frac{ab(C_4 - C_2)}{C} \right) + abC_2 + C \right) (C_4 - C_2) \quad \dots(2.18)$$

Now, taking the derivative of $h(p)$ with respect to p , we have that

$$h'(p) = 2C(D_2 - D_1) \ln \left\{ \frac{ab(D_2 - D_1)(1-p)}{C} \right\} + (2p-1)C(D_2 - D_1) \left(\frac{-1}{1-p} \right) + C(C_4 - C_2) \\ + \left(2C_2 ab(D_2 - D_1)(1-p) - C_2 ab(1-p)^2 + (2p-1)C \ln \left(\frac{ab(D_2 - D_1)(1-p)}{C} \right) \right) (C_3 - C_1 - C_4 + C_2) = 0$$

It can be seen that $h'(p)$ is a continuous and strictly decreasing function on $(0,1)$ and

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} h'(p) = 2K + \left(C \ln \left(\frac{ab(C_4 - C_2)}{C} \right) + C_2 ab \right) (C_4 - C_3 - C_2 + C_1) \quad \lim_{p \rightarrow 1^-} h'(p) = -\infty$$

The following Theorem summarizes some analytical results regarding the existence and uniqueness of the optimal solution.

Theorem 1. The optimal values of p and T , denoted by p^* and T^* , which minimize the expected software cost given by (9) are as follows:

Case 1. If $K \leq 0$, then $p^* = \inf\{p : h(p) < 0\}$ and $T^* = g(p^*)$.

Case 2. If $K > 0$, then define $p' = \inf\{p : dh/dp < 0\}$ and

1. If $h(p') > 0$, then $p^* = \min[C(p_1, T_1), C(p_2, T_2)]$ and $T^* = g(p^*)$, where p_1 and p_2 are the solutions to the equation of $h(p) = 0$ and $T_1 = g(p_1)$, $T_2 = g(p_2)$.
2. If $h(p') = 0$, then p^* equals the unique solution to the equation of $h(p) = 0$ and $T^* = g(p^*)$.
3. If $h(p') < 0$, then p^* and T^* does not exist within $0 < p < 1$ and $T > 0$.

Using the above procedure to find the optimal release time first we need to determine the value $\inf\{p : h(p) < 0\}$ or $p' = \inf\{p : dh/dp < 0\}$ what ever is the case assuming a perfect debugging environment i.e $p=1$ as both $h(p)$ and $h'(p)$ function of p in order to determine the optimal value of p and then using this optimal value of p we estimate the other parameters of the SRGM based on the collected failure data and then determine the optimal release time. The procedure if repeated for this optimal value and more dense data we will obtain another set of optimal values and hence it is a iterative approach. Hence the solution procedure adopted by Min Xie does not terminate in one step to give the optimal values. However it is imperative to estimate the level of perfect fault debugging i.e. p from the SRGM used to describe the failure phenomenon using the collected failure data over a period of time, and not as a decision to be obtained from release time problem by minimizing cost function. The effect of level of perfect debugging on release time can be obtained by carrying a sensitivity analysis on the release problem.

Whenever a decision is made to release the software the management evaluate the reliability of the software as quality metric at the release time. In the numerical example given in this paper we found that the reliability level at the optimal release time is 0.9398, where as for the

problem discussed by Min Xie it is 0.9117. However if the management desires to obtain a reliability level 0.95 by the release time, the approach followed above to find the optimal solution couldn't be used. Therefore we must consider the level of reliability to be achieved while formulating such class of problem.

Before we discuss the release time problem by minimizing the cost under reliability constraint we propose and validate a SRGM incorporating the effect of both imperfect fault debugging and error generation in the next section.

3. Release Time Problem for an SRGM Incorporating Two Types of Imperfect Debugging

3.1 SRGM with Two types of Imperfect Debugging

During the testing process when a fault is encountered, corresponding fault is identified and an attempt is made to remove the fault, there are three possibilities, first the fault is removed perfectly, secondly the fault is not removed perfectly due to which the fault content remains unchanged known as imperfect fault debugging, third the fault is removed perfectly, but when the test case that led to the failure is re-executed some other fault is encountered, known as error generation. In fact while removing the fault the programmer has introduced a new fault leading to an increase in total fault content of the software. Newly introduced fault leads to a failure only when the original fault is removed perfectly.

Model Assumptions

1. Software system is subject to failures at random times caused by faults remaining in the software.
2. Failure rate of the software is equally affected by errors remaining in the software.
3. At any time the failure rate of the software is proportional to the faults remaining in the software.

4. On a instantaneous repair effort starts and the following may occur:
 - (a) fault contents are reduced by one with probability p
 - (b) fault contents are unchanged with probability $1-p$.
5. The error removal phenomenon in the software is modeled by NHPP.
6. During the fault removal process faults are generated with a constant probability α .

Under the assumptions specified above the differential equation for the proposed model is given by

$$m_r'(t) = bp(a(t) - m_r(t)) \quad \dots(3.1)$$

Where $a(t)$ can be expressed as

$$a(t) = a + \alpha m_r(t) \quad \dots(3.2)$$

Substituting (3.2) in (3.1) we have

$$m_r'(t) = bp(a + \alpha m_r(t) - m_r(t)) \quad \dots(3.3)$$

Solving equation (3.3) under the initial condition $m_r'(0) = 0$ we get

$$m_r(t) = \frac{a}{1-\alpha} \left[1 - e^{-bp(1-\alpha)t} \right] \quad \dots(3.4)$$

Corresponding Mean number of failures in $(0, t]$ is given by

$$m_f(t) = \int_0^t b(a(t) - m_r(t)) dt \quad \dots(3.5)$$

$$m_f(t) = \frac{a}{p(1-\alpha)} \left[1 - e^{-bp(1-\alpha)t} \right] \quad \dots(3.6)$$

The NHPP intensity function is given by $\lambda(t) = ab \exp(-bpt) \dots(3.7)$

It can be seen that $\lambda(t)$ is a decreasing function in t with $\lambda(0) = ab$ and $\lambda(\infty) = 0$.

In the next section we validate and compare the model with some existing models.

3.2 Parameter Estimation

Method of least squares or maximum likelihood has been suggested and widely used for estimation of parameter of mathematical models. The model proposed in this paper is a non-linear and it is difficult to find solution for nonlinear models using Least Square method and require numerical algorithms to solve it.

Statistical software packages such as SPSS help to overcome this problem. SPSS is a statistical package for Social Sciences. It is a comprehensive and flexible package for statistical analysis and data management system. SPSS can take data from almost any type of file and use them to generate tabulated reports, charts and plots of distributions and trends, descriptive statistics, and conduct complex statistical analysis. SPSS Regression Models enables the user to apply more sophisticated models to the data using its wide range of nonlinear regression models. For the estimation of the parameters of the proposed model method of Least Square has been used. Non-linear regression is a method of finding a nonlinear model of the relationship between the dependent variable and a set of independent variables. Unlike traditional linear regression, which is restricted to estimating linear models, nonlinear regression can estimate models with arbitrary relationships between independent and dependent variables.

3.2.1 Comparison Criteria

1. Mean Square Error (MSE):

The model under comparison is used to simulate the fault data, the difference between the expected values, $N(t)$ and the observed data N_i is measured by MSE as follows.

$$MSE = \sum_{i=1}^k \frac{(N(t_i) - N_i)^2}{k} \quad \dots(3.8)$$

Where k is the number of observations. The lower MSE indicates less fitting error, thus better goodness of fit.

2. Coefficient of multiple determination (R^2):

We define this coefficient as the ratio of the sum of squares resulting from the trend model to that from constant model subtracted from 1.

$$R^2 = 1 - \frac{\text{residual SS}}{\text{corrected SS}} \quad \dots (3.9)$$

R^2 measures the percentage of the total variation about the mean accounted for the fitted curve. It ranges in value from 0 to 1. Small values indicate that the model does not fit the data well. The larger value of R^2 explains the better fit of the model.

3.2.2 Data Analysis and Model Comparison

To validate the proposed model we have carried out the parameter estimation on a data set from a real time command and control system, which represents 136 failures, observed during system testing for 25 hours of CPU time [9]. Parameters of the model are estimated by the nonlinear least squares method in SPSS using cumulative failure data against time. Estimated parameter values are given in table- 2. The MSE and R^2 values are also given. The Fitting of the models is illustrated graphically in figure 1 and figure 2.

Table 2:

Estimated parameter values for the proposed model					
Parameters				Goodness of Fit Criteria	
a	b	p	α	RMSPE	R2
134	0.140238	0.998417	0.0125628	30.64387	.96641

Figure 1:

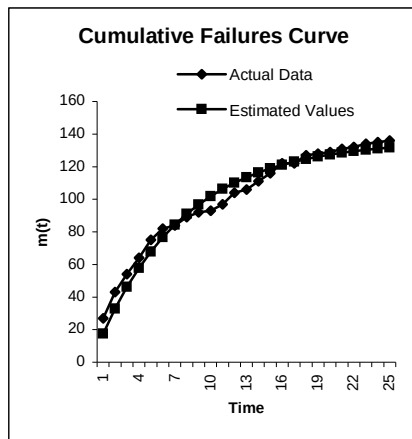
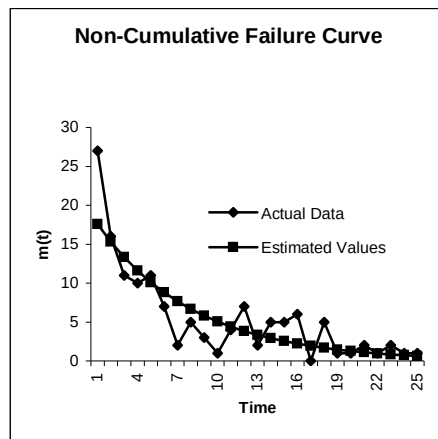


Figure 2:



In the next section we have proposed the cost model incorporating the effect of imperfect fault debugging and error generation.

3.3 Effect of Imperfect Fault Debugging and Error Generation on Cost Model

Like knowing the effect of the imperfect debugging on software cost it is also of great importance for the management to know the effect of fault generation on cost. Since due to fault generation amount of fault content of software increases, it has a direct effect on the reliability level of the software achieved by the release time.

The parameter α representing the probability of error generation is usually influenced by a number of factors, such as the experience of the testing personnel, the testing strategy adopted, and the number of

reviews in debugging etc. It is possible to decrease the value of α to a certain extent, but usually this has to be achieved at a higher testing cost. As specified above total expected software cost includes cost of testing and the cost of fixing a fault during testing and operation phase for perfect and imperfect debugging. Cost of fixing an error is different for both perfect and imperfect debugging however it remains unchanged due to error generation. But the cost of testing is a function of both perfect debugging probability p and fault generation probability α . Since the testing cost parameter C depends on the testing team composition and testing strategy used, If the probability of perfect debugging is to be increased and probability of error generation is to be decreased, it is expected that extra financial resources will be needed to engage more experienced testing personnel, and this will result in an increase of C . In other words, C should be a function of the testing level and error generation, denoted by $C(p, \alpha)$ and hence this function should possess the following two properties:

1. $C(p, \alpha)$ is a monotonous increasing function of p and $(1 - \alpha)$.
2. When $p \rightarrow 1$, and $\alpha \rightarrow 0$, $C(p, \alpha) \rightarrow \infty$.

The second property implies that perfect debugging is impossible in practice or the cost of achieving it is extremely high. Although there are many cost functions that can satisfy these conditions, a simple, but reasonable function that meets the two properties above is given by:

$$C(p) = \frac{C}{(1 - p(1 - \alpha))} \quad \dots(3.10)$$

Hence, the cost model (2.9) can be modified as

$$\text{Min } C(T, p) = (C_1 p + C_2 (1 - p)) m_f(t) + (C_3 p + C_4 (1 - p)) (m_f(\infty) - m_f(t)) + \frac{CT}{(1 - p(1 - \alpha))} \quad \dots(3.11)$$

In the next section we will determine optimal release time for software minimizing the total expected cost subject to the desired reliability constraint.

3.4 Optimal Release Policy

The optimization problem minimizing the total expected software cost in order to determine optimal release time T^* subject to the software reliability not less than a specified reliability objective can be formulated as follows

$$\text{Min } C(T) = [C_1p + C_2(1-p)] \cdot m_f(T) + [C_3p + C_4(1-p)] \cdot (m_f(\infty) - m_f(T)) + \frac{CT}{1-p(1-\alpha)}$$

Subject to $R(x|T) = \exp[-(m(T+x) - m(T))] \geq R_0$ Where $0 < R_0 < 1$ and $x > 0$.

Using the principles of calculus and assuming that the values of all the parameters of the proposed SRGM have been estimated including p and α from the past failure data, the above optimization problem can be solved as follows:

Taking partial derivatives of $C(T)$ with respect to T and equating it to zero, we have

$$\frac{\partial C}{\partial T} = [C_1p + C_2(1-p)]abe^{-bp(1-\alpha)T} + [C_3p + C_4(1-p)] \left(-abe^{-bp(1-\alpha)T} \right) + \frac{C}{1-p(1-\alpha)} = 0 \quad \dots(3.12)$$

From (3.12) we observe that

$$\lambda(t) = \frac{C}{(D_2 - D_1)(1-p(1-\alpha))} \quad \dots(3.13)$$

$$\text{Where } D_1 = C_1p + C_2(1-p) \text{ , } D_2 = C_3p + C_4(1-p) \quad \dots(3.14)$$

$$\lambda(t) = ab \exp(-bp(1-\alpha)t) \quad \lambda(0) = ab \quad \lambda(\infty) = 0 \quad \dots(3.15)$$

From (3.15) it can be seen that $\lambda(t)$ is a decreasing function in time.

Result 1:

If $ab > \frac{C}{(D_2 - D_1)(1 - p(1 - \alpha))}$ then $C(T)$ is decreasing for $T < T_0$ and increasing for $T > T_0$ thus, there exist a finite and unique $T = T_0 (> 0)$ minimizing the total expected cost. And if $ab \leq \frac{C}{(D_2 - D_1)(1 - p(1 - \alpha))}$ then $C'(T) > 0$ for $T > 0$ and hence $C(T)$ is minimum for $T = 0$.

Further reliability of software defined as “given that the testing has continued up to time T , the probability that a software failure does not occur in time interval $(T, T + x)(x \geq 0)$ ”. Hence the reliability of software is represented mathematically as

$$R(x | T) \equiv R(T + x | T) = \exp^{-(m(T+x) - m(T))} \quad \dots(3.16)$$

Using (3.16) we obtain

$$R(x | 0) = e^{-m(x)}, R(x | \infty) = 1 \quad \dots(3.17)$$

Result 2:

From (3.17) it is observed that $R(x | t), t > 0$ is a increasing function of time. Thus $R(x | 0) < R_0$ there exist $T = T_1 (> 0)$ such that $R(x | T) = R_0$ and if $R(x | 0) \geq R_0$ then $R(x | t) \geq R_0 \quad \forall \quad t \geq 0$ and $T = T_1 = 0$.

Combining the cost and reliability requirements we state the following theorem for optimal release policy for the proposed SRGM of imperfect fault debugging and error generation.

Theorem 2: Assuming

$C_3 > C_1 > 0, C_4 > C_2 > 0, C > 0, x > 0$, and $0 < R_0 \leq 1$

(a) if $ab > \frac{C}{(D_2 - D_1)(1 - p(1 - \alpha))}$ & $R(x | 0) < R_0 < 1, T^* = \max(T_0, T_1)$

(b) if $ab > \frac{C}{(D_2 - D_1)(1 - p(1 - \alpha))}$ & $R(x | 0) \geq R_0 > 0, T^* = T_0$

$$(c) \text{ if } ab \leq \frac{C}{(D_2 - D_1)(1 - p(1 - \alpha))} \& R(x|0) < R_0 < 1, T^* = T_1$$

$$(d) \text{ if } ab \leq \frac{C}{(D_2 - D_1)(1 - p(1 - \alpha))} \& 0 < R_0 \leq R(x|0), T^* = 0$$

Using the above theorem we can determine the optimal release time minimizing the total expected software cost under a desired reliability level constraint.

4. Numerical Examples and Sensitivity Analysis

4.1 Numerical Example of Release Time Problem for Imperfect Fault Debugging SRGM

Assuming that the parameters a and b of Imperfect Fault Debugging SRGM due to Kapur et al the SRGM have already been estimated using the collected failure data and estimated values of a and b are 142.32 and 0.1246 respectively. Further assuming that cost of perfect fault debugging during testing and operation phase i.e. C_1 and C_2 to be \$200 and \$110 respectively, cost of imperfect fault debugging during testing and operation phase to be same i.e. $C_3 = C_4 = \$1500$ and cost of per unit testing $C = \$10$. Following the theorem 1 we obtain the optimal release time $T^* = 56.28$, optimal level of perfect debugging $p^* = 0.8897$ and optimal total expected software cost $C(T^*) = 33365.047$ and achieved level of reliability $R(T^*) = 0.9398$. Where as for the release time problem discussed by Min Xie $T^* = 55.196$, optimal level of perfect debugging $p^* = 0.85$ and optimal total expected software cost $C(T^*) = 37931.44$ and achieved level of reliability $R(T^*) = 0.9117$. Thus we can see that if we include separate cost of fixing faults perfectly and imperfectly it has significant effect on optimal release time and cost depending upon the values of the various costs associated with the cost model. Note that the above release time problem is solved in way as done by Min Xie which gives optimal values of p and T^* however it is imperative to estimate the level of perfect fault debugging i.e. p from the SRGM used to describe the failure phenomenon using the collected failure data, and not as a decision to be obtained from release time problem to be obtained from

release time problem. In the next numerical example we have determined the optimal release time minimizing the cost function subject to reliability constraint assuming that value of perfect debugging and error generation parameters are estimated using collected failure data.

4.2 Numerical Example of Release Time Problem for an SRGM Incorporating Two Types of Imperfect Debugging

Assuming that the parameters a , b , p and α of proposed SRGM have already been estimated using the collected failure data and estimated values of a , b , p and α are 134, 0.14024, 0.99842 and 0.01256 respectively. Further assuming that cost of perfect and imperfect fault debugging during testing i.e. C_1 and C_2 to be \$200 and \$110 respectively, cost of perfect and imperfect fault debugging during operation phase to be same i.e. $C_3 = C_4 = \$1500$ and cost of per unit testing $C = \$10$. If minimum reliability requirement by the release time is 0.85, following result 1 and 2 we obtain $T_0 = 25.6162$ and $T_1 = 38.3983$. Then finally following theorem 2 we obtain $T^* = 38.3983$. The minimum total expected software cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$55235.55$ and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 135$.

4.3 Sensitivity Analysis

We have conducted, a sensitivity analysis of the release time problem formulated for the proposed model to study the effect of variations in minimum reliability requirement by the release time, most sensitive costs involved in cost function and level of perfect debugging, on the optimal release time and total expected software testing cost. Although we can analyze the sensitivity of all the parameters of the SRGM and Cost model but due to the limitation on size of paper we still can evaluate the optimal release time problem for various conditions by examining about the behavior of some parameters and costs that have the most significant influence.

We define

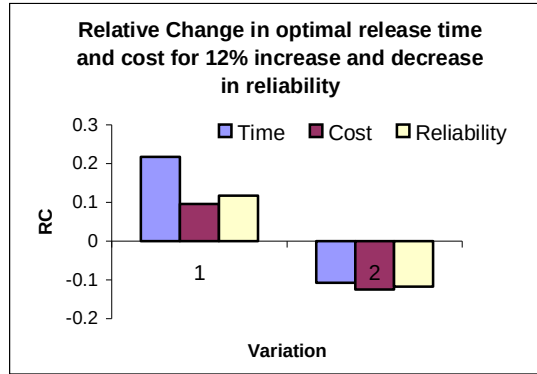
$$\text{Relative Change (RC)} = \frac{\text{MOV} - \text{OOV}}{\text{OOV}} \quad \dots(4.1)$$

Where OOV is the original optimal values and MOV is the modified optimal values obtained when there is a variation in some attribute of the release time problem.

4.3.1 Effect of Variations in Minimum Reliability Requirement by the Release Time

The optimal value of the release time obtained for the desired reliability level may be too late as compared to the scheduled delivery time, in such a case the management and/or the user of a project based software may agree to release the software at some lower reliability level with some warranty on the failures, which in turn will change the optimal release time to an earlier time and consequently lower the cost. On the other hand if the scheduled delivery is later than the optimal release time the management may wish to increase the desired reliability level at some additional testing cost.

Assuming the values of parameters and various costs associated with cost model to be same as in section 4.2. If minimum reliability requirement by the release time increased to 0.95 (about 12% increase) then we obtain $T^* = 46.73$ (about 21.7% increase) and its RC is 0.217229. The minimum total expected software cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$60542.43$ (about 9.6% increase), its RC is 0.096077 and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 136$ and if minimum reliability requirement by the release time decreased to 0.75 (about 12% decrease) then we obtain $T^* = 34.27$ (about 10.7% decrease) and its RC is -0.10757. The minimum total expected software testing cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$52984.85$ (about 12.48% decrease), its RC is -0.12483 and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 134$. Figure 2 plots the relative change in the optimal release time and cost for the case of 12% increase and decrease in reliability objective.

Figure 2:

4.3.2 Effect of Variations in Costs Involved in the Cost Model

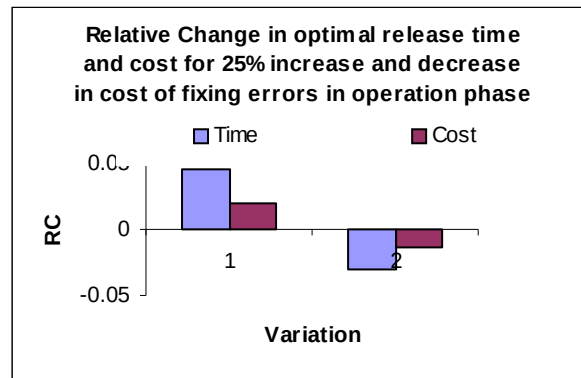
Here we investigate the sensitivity of variations in various costs involved in the cost model. If any of the cost fixing an error in testing phase or operation phase for perfect and \or imperfect debugging and cost of per unit testing time varies during the testing process, it will have significant changes in optimal testing cost and release time. We have studied the sensitivity of cost of perfectly fixing an error in testing and operation phase. Sensitivity for the rest of the costs can be carried in a similar manner.

If we assume that the values of parameters of the SRGM to be same given in section 4.2 and assuming that cost of perfect and imperfect fault debugging during testing i.e. C_1 and C_2 to be \$200 and \$110 respectively, cost of perfect and imperfect fault debugging during operation phase to be same i.e. $C_3 = C_4 = \$2000$ and cost of per unit testing $C = \$2$. If minimum reliability requirement by the release time is 0.85, following result 1 and 2 we obtain $T_0 = 39.61$ and $T_1 = 38.3983$. Then finally following theorem 2 we obtain $T^* = 39.61$. The minimum total expected software cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$55958.87$ and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 134$.

Now if cost of fixing a fault perfectly and imperfectly in operation phase i.e. C_3 and C_4 is increased by 25% i.e. from \$2000 to \$2500,

then we obtain $T^* = 41.38$ (about 0.4% increase) and its RC is 0.0447562. The minimum total expected software cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$57053.21$ (about 1.9% increase), its RC is 0.019556 and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 136$ and if C_3 and C_4 is decreased by 25% i.e. from \$2000 to \$1500, then we obtain $T^* = 38.398$ (about 3% decrease) and its RC is -0.030605 . The minimum total expected software cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$55235.55$ (about 1.2% decrease), its RC is -0.01293 and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 135$. Figure 3 plots the relative change in the optimal release time and cost for the case of 25% increase and decrease in cost of fixing an error in operation phase.

Figure 3.



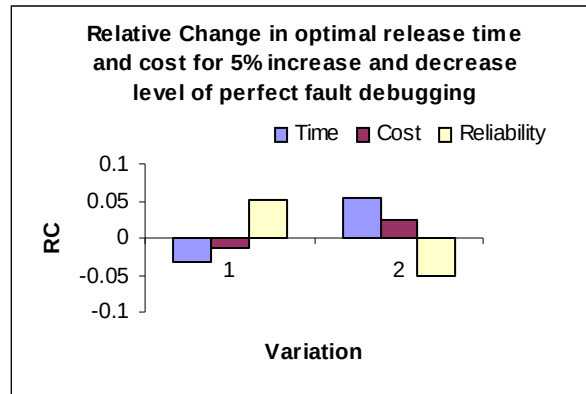
4.3.3 Effect of Variations in level of perfect fault debugging

Finally we investigate the sensitivity of variations in level of perfect fault debugging parameter p . If the testing personals were skilled personal the level of perfect fault debugging would be more or vice versa. Variations in level of perfect debugging have significant effect on the optimal time of software release. If the level of perfect debugging increases for a testing process it is expected that the software can be released earlier as compared to the optimal release time determined otherwise and vice versa

If we assume that the values of parameters a , b and α of the SRGM and the cost involved in cost function to be same given in section 4.2 and a reliability level of 0.85 is desired to be achieved and assuming value of perfect fault debugging parameter p is 0.9. Following result 1 and 2 we obtain $T_0 = 39.369$ and $T_1 = 40.737$. Then finally following theorem 2 we obtain $T^* = 40.737$. The minimum total expected software cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$56649.53$ and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 135$.

Now if p is increase by 5%, then we obtain $T^* = 39.369$ (about 0.03% decrease) and its RC is -0.03357 . The minimum total expected software cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$55812.96$ (about 1.4% decrease), its RC is -0.01477 and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 135$ and if p is decrease by 5%, then we obtain $T^* = 42.93$ (about 5.3 % increase) and its RC is 0.053869. The minimum total expected software cost at T^* i.e. $C(T^*) = \$58037.50$ (about 2.4% increase), its RC is 0.024501 and number of faults removed by the release time $m(T^*) = 136$. Figure 4 plots the relative change in the optimal release time and cost for the case of 5% increase and decrease perfect fault debugging parameter p .

Figure 4.



A similar conclusion can be obtained for the other costs and parameters of the SRGM such as C_1 , C_2 , C , a , b and α taking the simultaneous changes in two or more costs and SRGM parameters.

5. Conclusion

In this paper first we have formulated and derived optimal release time minimizing the expected software cost subject for an imperfect fault-debugging model due to Kapur et al considering effect of perfect and imperfect debugging separately on the total expected software cost. Next, we proposed a SRGM incorporating the effect of imperfect fault debugging and error generation. The proposed model is validated a data set cited in literature. Then a release time problem is formulated and solved minimizing the expected software cost subject to a minimum reliability level to be achieved by the release time for the proposed model. A numerical illustration is given for both type of release problem and finally a sensitivity analysis is performed to determine the effect of variations in minimum reliability level to be achieved by release time and various costs involved in cost model on optimal release time and cost.

Reference:

1. Ammann P.E., Brilliant S.S., and Knight J.C, "The Effect of Imperfect Error Detection on Reliability," IEEE Trans. Software Eng., vol. 20, pp. 142-148, 1994.
2. Kapur P.K., Garg R.B., and S. Kumar, "Contributions to Hardware and Software Reliability", World Scientific, Singapore.1999.
3. Kapur P.K., Garg R.B., "Optimal Software Release Policies for Software Reliability Growth Models under Imperfect Debugging", Recherche operationnelle/Operations Research, vol 24, pp. 295-305,1990.
4. Kapur P.K., Agarwal S., Garg R.B., " Bi-criterion Release Policy for Exponential Software Reliability Growth Models ", Recherche operationnelle/Operations Research, vol 28, pp. 165-180,1994.
5. Kapur P.K. and Younes S., "Modeling an Imperfect Debugging Phenomenon in Software Reliability," Microelectronics and Reliability, vol. 36, pp. 645-650, 1996.

6. Kapur PK, Bhalla VK. "Optimal release policy for a flexible software reliability growth model" *Reliability Engineering and System safety* **1992**; 35: 49-54.
7. Kapur PK, Garg RB, Bahlla VK. "Release policies with random software life cycle and penalty cost" *Microelectronics Reliability* **1993**; 33 (1): 7-12.
8. Ohba M. and Chou X.M., "Does Imperfect Debugging Affect Software Reliability Growth?" Proc. 11th Int'l Conf. Software Eng., pp. 237-244, 1989.
9. Pham H., "Software Reliability", Springer-Verlang Singapore Pte. Ltd. 2000.
10. Pham H, "A Software Cost Model with Imperfect Debugging, Random Life Cycle and Penalty Cost," Int'l J. Systems Science, vol. 27, pp. 455-463, 1996.
11. Shanthikumar J.G., "A State and Time-Dependent Occurrence Rate Software Reliability Model with Imperfect Debugging," Proc. Nat'l Computer Conf., pp. 311-315, 1981.
12. Slud E., "Testing for Imperfect Debugging in Software Reliability," Scandinavian J. Statistics, vol. 24, pp. 555-572, 1997.
13. Xie M., "A Study of the Effect of Imperfect debugging on Software Development Cost", IEEE Transactions on Software Engineering, vol 29, No 5, May 2003.

Studi liceali di matematici ebrei nella Mantova del tardo Ottocento

Alessandro Janovitz¹

Sunto. Si illustrano gli studi effettuati, le scuole frequentate, le materie seguite e i professori avuti da sei illustri matematici ebrei mantovani (Gino Fano, Aldo Finzi, Gino Loria, Cesare Rimini, Adolfo Viterbi e Giulio Vivanti), nati in un'area geografica e temporale ristrettissime. Si evidenzia il positivo influsso dell'insegnamento ginnasiale e liceale da essi ricevuto nella Mantova del tardo Ottocento.

Abstract. Gino Fano, Aldo Finzi, Gino Loria, Cesare Rimini, Adolfo Viterbi and Giulio Vivanti are six remarkable Mantuan Jewish mathematicians. This paper deals with their good high-school education received in Mantua before their university studies, in the second half of the nineteenth century.

Parole Chiave: formazione matematica, liceo mantovano, matematici ebrei

1. Introduzione

Mantova può vantare una plurisecolare tradizione nell'ambito degli studi scientifici, in particolare quelli idraulici, indispensabili in un territorio circondato, come quello mantovano, dalle acque lacustri. Basti citare, a titolo esemplificativo, i nomi ben noti di Giovanni

¹ Dipartimento BEST del Politecnico di Milano, Via Bonardi, 3, 20133 Milano. E-mail: a.janovitz@alice.it. Il presente lavoro, svolto nell'ambito del gruppo di ricerca d'Ateneo del Politecnico di Milano, è stato presentato al Congresso nazionale Mathesis, tenutosi a Trento dal 2 al 4 novembre 2006.

Benedetto Ceva (Milano 1647 – Mantova 1734) e Giuseppe (o Gioseffo) Mari (Canneto sull'Oglio 1730 – Mantova 1807), entrambi oggetto di recentissime trattazioni storiche.¹ Proprio in questo filone di studi, volto a rivalutare l'importanza delle scienze, in particolare matematiche, nel mantovano, si colloca il presente lavoro, dedicato alla analisi degli studi preuniversitari compiuti a Mantova nella seconda metà dell'Ottocento da sei giovani ebrei che sarebbero divenuti illustri matematici: Gino Fano, Aldo Finzi, Gino Loria, Cesare Rimini, Adolfo Viterbi e Giulio Vivanti.

Dopo aver presentato una breve biografia di ciascuno, ponendo in evidenza le scuole frequentate (§ 2), se ne descrivono gli studi effettuati, illustrando le materie seguite (§ 3) e ricostruendo le personalità dei professori avuti (§ 4).

2. Gino Fano, Aldo Finzi, Gino Loria, Cesare Rimini, Adolfo Viterbi, Giulio Vivanti

Come già detto, Fano, Finzi, Loria, Rimini, Viterbi e Vivanti nacquero tutti a Mantova tra il 1859 e il 1882, compiendo ivi i primi studi, come meglio si vedrà nelle rispettive sintetiche biografie, poste in ordine cronologico, a loro dedicate.

2.1. Giulio Vivanti

Giulio Benedetto Isacco Vivanti² nacque a Mantova il 24 maggio 1859 da famiglia di posizione socialmente elevata. I suoi primi studi, di tipo classico, si svolsero privatamente e da privatista affrontò annualmente gli esami al Ginnasio-Liceo Virgilio di Mantova,³ con risultati assai positivi. Laureatosi, nel 1881, in ingegneria civile al Politecnico di Torino, conseguì due anni dopo la laurea in matematica all'Università di Bologna. Libero docente in Calcolo infinitesimale dal

¹ Si veda, per esempio, [25], [26] e l'articolo di Giuliana Tomasini in questa rivista.

² A proposito di Giulio Vivanti si veda [15], [23] e [28].

³ [5], bb. 193, 194, 195.

1892, insegnò all'Università di Pavia e, dal 1895, in quella di Messina. Ordinario dal 1901, tornò nel 1907 all'Università di Pavia, ove rimase fino al 1924, anno in cui si trasferì presso la neonata Università di Milano. Emerito dal 1934, pubblicò opere scientifiche fino al 1947. I suoi principali campi di interesse di furono le funzioni analitiche (in tale ambito elaborò un teorema, detto teorema di Vivanti) e la storia della matematica, con particolare riguardo all'analisi. Fondò e diresse la sezione pavese e poi quella milanese della *Mathesis*. Ebbe fra i suoi allievi Bruno de Finetti (1906-1985). Morì a Milano, il 19 novembre 1949.

2.2. Gino Loria

Gino Benedetto Loria¹ nacque a Mantova il 19 maggio 1862 da famiglia abbiente e di notevole levatura culturale. Si iscrisse, nel 1875, all'Istituto Tecnico Provinciale e Scuola Agraria Carpi di Mantova, ove si diplomò nel 1879,² anno in cui si iscrisse all'Università di Torino. Ivi laureatosi, nel 1883, in matematica, divenne ordinario di geometria superiore nell'Università di Genova dal 1891, ove insegnò fino al 1935. Abbandonò Genova, per le persecuzioni razziali, rifugiandosi nelle valli valdesi del Piemonte. Al termine della guerra pubblicò svariate opere. Studiò prima la geometria delle sfere e della retta, le trasformazioni razionali dello spazio, le funzioni ellittiche; si occupò poi di storia delle matematiche e delle scienze, raggiungendo presto fama internazionale. Fondatore e direttore del «Bollettino di Bibliografia e Storia delle scienze matematiche», collaborò ai più importanti periodici scientifici e fece parte di moltissime prestigiose accademie e istituzioni scientifiche. Si occupò anche di questioni didattiche, in particolare per conto della Commissione internazionale per l'insegnamento della matematica, e fu promotore e direttore della Scuola di magistero in Genova. Si distinse tra i soci più attivi della *Mathesis*, della cui sezione ligure fu a lungo presidente e instancabile animatore. Morì a Genova, il 30 gennaio 1954.

¹ A proposito di Gino Loria si veda [19], [23], [29] e [33].

² [1].

2.3. Gino Fano

Gino Angelo Fano¹ nacque a Mantova il 5 gennaio 1871. La famiglia d'origine era particolarmente in vista per censo e per le attività politiche e sociali svolte. Iscrittosi al Ginnasio-Liceo Virgilio di Mantova nel 1880, dopo tre anni si trasferì, per volontà del padre, al Collegio militare di Milano e poi all'Accademia militare di Torino. Opponendosi ai voleri paterni, tornò a Mantova per iscriversi al reale Istituto Tecnico Alberto Pitentino e Scuola Agraria Carpi, ove, nel 1888, ottenne la licenza.² Iscrittosi, a Torino, a ingegneria, scelse però presto il corso di matematica, in cui si laureò con lode. Dopo un anno di assistentato a Torino e il perfezionamento a Gottingen con Felix Klein (1849-1925), insegnò nella Università di Messina e, dal 1901, in quella di Torino. Ordinario di geometria proiettiva e descrittiva dal 1905, fu sospeso dall'insegnamento nel 1938, per le leggi razziali, e si rifugiò in Svizzera, tornando in Italia dopo la guerra. Fu tra i massimi geometri dell'epoca: tra i suoi lavori più importanti si ricordano quelli sulle geometrie finite e sulle varietà algebriche tridimensionali (rispettivamente piano di Fano e varietà di Fano). Medaglia d'oro dei benemeriti della Pubblica Istruzione, si occupò anche di didattica, partecipando attivamente alla vita della Mathesis. Morì a Verona l'8 novembre 1952.

2.4. Adolfo Viterbi

Adolfo Davide Graziadio Viterbi³ nacque a Mantova il 27 settembre 1873 da famiglia agiata, culturalmente elevata e assai attiva nel contesto politico locale. Studiò al Ginnasio-Liceo Virgilio di Mantova dal 1883 al 1891, anno in cui ottenne la licenza⁴ e si iscrisse all'Università di Bologna, prima in ingegneria, poi in matematica. Laureatosi a Messina nel 1899, specializzatosi a Pisa e a Gottingen,

¹ A proposito di Gino Fano si veda [16], [18], [23] e [32].

² [2].

³ A proposito di Adolfo Viterbi si veda [9], [20], [22], [23], [30] e [31].

⁴ [5], bb. 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 203, 204 e 210.

conseguita una seconda laurea a Padova in ingegneria civile, divenne ivi libero docente in meccanica razionale. Insegnò geodesia teoretica all'Università di Pavia, ordinario dal 1914, distinguendosi per le particolari doti di tipo didattico. Volontario nella grande guerra, morì al fronte il 18 novembre 1917. I suoi studi, orientati dapprima all'analisi, si rivolsero per lo più alla meccanica razionale e alla geodesia, in particolare alla risoluzione approssimata del problema di Dirichlet. Fu collaboratore della *Mathesis*. Ebbe particolare generosità occupandosi, con importanti donazioni, dei concittadini in condizioni di bisogno. Fu maestro di Rocco Serini (1886-1964), ordinario di fisica matematica a Pavia.

2.5. Aldo Finzi

Aldo Finzi¹ nacque a Mantova il 20 dicembre 1878. Dopo aver compiuto i primi studi privatamente, frequentò, dal 1893, il Ginnasio-Liceo Virgilio di Mantova, presso il quale si licenziò nel 1895.² Laureatosi con lode in matematica all'Università di Padova, sotto la guida di Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), iniziò la carriera accademica all'Università di Messina, in qualità di assistente di Giulio Vivanti. Si dedicò anche all'insegnamento negli istituti tecnici di Messina, Reggio Calabria, Bari e Napoli, per divenire preside, ispettore e infine Provveditore della Campania, incarico che ricoprì per più di dieci anni.³ Libero docente in geometria analitica, ebbe incarichi di insegnamento all'Università di Napoli. Oggetto prediletto dei suoi studi fu il calcolo differenziale assoluto; a lui si deve un teorema sulla curvatura conforme di una varietà. Collaborò alla «Enciclopedia delle matematiche elementari» e pubblicò svariati testi per studenti delle scuole superiori. Morì a Roma il 18 novembre 1934.

¹ A proposito di Aldo Finzi si veda [24].

² [5], bb. 174 e 175.

³ [7].

2.6. Cesare Rimini

Cesare Giacomo Rimini¹ nacque a Mantova il 18 febbraio 1882 da famiglia economicamente assai debole. A soli otto anni iniziò gli studi al Ginnasio-Liceo Virgilio di Mantova, ottenendo con ottimi voti la licenza nel 1898.² Si laureò con lode all'Università di Pisa, da *enfant prodige*, a vent'anni. Ivi perfezionatosi in analisi, si laureò, nel 1907, in ingegneria a Bologna, esercitandovi, per oltre vent'anni, la professione di ingegnere. Libero docente, dal 1927, in elettrotecnica generale, incaricato all'Università e nella Scuola postuniversitaria di perfezionamento in radiocomunicazioni di Bologna, ne fu espulso per le leggi razziali. Dopo la guerra, riassunse le cariche accademiche fino al 1955. Si occupò di teoria delle superfici, eteromografie e iperomografie, calcolo tensoriale e elettrotecnica, in particolare delle proprietà geometriche delle correnti alternative. Fu presidente della sezione di Bologna dell'Associazione Elettrotecnica Italiana. Autore di apprezzati testi di analisi per studenti universitari, fu premiato dall'Accademia d'Italia per il suo «Elementi di radiotecnica». Morì a Bologna l'1 aprile 1960.

3. L'istruzione secondaria a Mantova nella seconda metà dell'Ottocento

Come si è visto nel § 2, i matematici di cui si sta trattando ebbero una formazione scolastica legata al liceo classico e all'istituto tecnico di Mantova.³ In seguito all'annessione, nel 1866, di Mantova al Regno d'Italia, il liceo divenne, nel 1867, «Regio Ginnasio-Liceo Virgilio». La scuola tecnica, invece, fu sostituita nel 1868 dall'«Istituto Tecnico provinciale e Scuola Agraria Carpi», governativo dal 1879, denominato

¹ A proposito di Cesare Rimini si veda [14], [17] e [23].

² [5], bb. 169, 170, 172, 174, 175, 176, 177 e 178.

³ Durante la dominazione asburgica, l'istruzione secondaria a Mantova era garantita dall'esistenza dell'«imperial regio Liceo di Mantova» e di una scuola tecnica attiva per il primo triennio.

nel 1884 «R. Istituto Tecnico Alberto Pitentino e Scuola Agraria Carpi di Mantova», tuttora funzionante come «Istituto tecnico commerciale statale Alberto Pitentino».¹

Per comprendere meglio quale fosse l'organizzazione degli studi nelle due scuole nel periodo storico qui considerato, si propongono due tabelle.²

	A N N O	RELI GIONE	ITALIA NO	TE DE SC O	LA TI NO	GR EC O	ST. GE OG R	MA TE MA T	ST. NAT. FISI CA	FI LO SO F	GI NN AS T.	DI SE GN O	FR AN CE SE
I	'64	2	4	-	8	-	3	3	2	-	-	-	-
	'75	0,5	7	-	9	-	3	1	-	-	1	-	-
	'90	-	7	-	7	-	2	1	1*	-	1	3	2
II	'64	2	3	2	7	-	3	3	2	-	-	-	-
	'75	0,5	7	-	11	-	3	1	-	-	1	-	-
	'90	-	7	-	7	-	4	2	-	-	4	3	2,5
III	'64	2	2	2	6	4	3	3	2	-	-	-	-
	'75	0,5	7	-	8	-	3	1	-	-	1	-	-
	'90	-	7	-	6	-	4	1	1	-	4	3	2,5
IV	'64	2	2	2	6	4	3	3	2	-	-	-	-
	'75	0,5	5	-	6	5	4	3	-	-	1	-	-
	'90	-	5	-	6	3	4	2	2	-	4	-	-
V	'64	2	2	3	6	4	3	4	2	-	-	-	-
	'75	0,5	4	-	6	5	4	3	-	-	1	-	-
	'90	-	6	-	5	3	4	2	2	-	4	-	-
1	'64	2	2	3	7	4	3	3	2	-	-	-	-
	'75	0,5	6	-	5	3	5	6	-	-	-	-	-
	'90	-	4	-	5	3	4	3	1+1	2	4	-	-
2	'64	2	2	2	4	4	3	3	3	3	-	-	-
	'75	0,5	3	-	4	3	3	3	2+4,	4	-	-	-
	'90	-	4	-	3	3	4	3	5 2+3	2	4	-	-
3	'64	2	2	2	5	5	3	1	3	3	-	-	-
	'75	0,5	3	-	3	3	3	3	3+4,	4	-	-	-
	'90	-	4	-	3	3	3	3	5 2+3	2	4	-	-

* Scienze naturali

Tabella n. 1 – Orario settimanale delle lezioni presso il

¹ Si veda a tal proposito [21].

² Le tabelle n. 1 e n. 2 sono state elaborate sulla scorta dei documenti conservati nell'Archivio dell'Istituto tecnico commerciale statale 'A. Pitentino' di Mantova e nell'Archivio di Stato di Mantova.

«Regio Ginnasio-Liceo Virgilio» di Mantova.

Nella prima, relativa al liceo, alla prima colonna corrisponde l'anno di corso, alla seconda l'anno di riferimento (e precisamente il 1864, il 1875 e il 1890), a ciascuna delle successive una materia di insegnamento; a ogni colonna corrisponde, invece, l'anno di corso e per ognuno di essi si presenta il numero di ore settimanali a seconda dell'anno di riferimento. Nella tabella n. 2, relativa invece all'istituto tecnico (sezione fisico-matematica), a ciascuna riga corrisponde una disciplina, mentre le colonne (raggruppate per ogni anno di corso) sono a loro volta suddivise nei due anni di riferimento, e precisamente il 1872 e il 1885, ognuno corrispondente all'anno di applicazione di una riforma scolastica.

	I anno		II anno		III anno		IV anno	
	'72	'85	'72	'85	'72	'85	'72	'85
Lettere italiane	6	6	6	5	5	4	5	6
Geografia	2	3	2	3	2	-	2	-
Storia	3	3 ¹	3	3 ¹	3	2 ¹	3	-
Lingua francese	3	3	2	3	2	2	2	-
Lingua tedesca o inglese	3	-	4	3	4	5	4	5
Matematica elementare	6	-	5	-	-	-	-	-
Matematica	-	6	-	5	5	5	5	5
Geometria descrittiva e disegno	-	-	-	-	4	-	4	-
Storia naturale	3	3	3	3	2	-	-	-
Fisica	3	-	3	-	3	5 ²	-	3 ³
Nozioni generali di chimica	-	-	3	-	-	3 ⁴	-	4 ⁴
Chimica	-	-	-	-	3	-	3	-
Elementi di meccanica	-	-	-	-	-	-	3	-
Disegno ornamentale	6	6	6	6	6	-	6	-
Disegno architettonico	-	-	-	-	-	4	-	6
Totale	35	30	37	31	39	30	37	29
¹ Con il nome di Storia generale ² Con il nome di Fisica generale ³ Con il nome di Fisica complementare ⁴ Con il nome di Chimica generale								

Tabella n. 2 - Orario settimanale delle lezioni presso l'Istituto tecnico di Mantova, sezione fisico-matematica.

La lettura delle due tabelle mostra come l'insegnamento della matematica abbia subito una evidente riduzione al liceo classico (ove già rivestiva un ruolo piuttosto marginale), rimanendo invece di centrale importanza nell'istituto tecnico.

4. I docenti

Il seguente elenco indica i docenti di matematica dei sei scienziati oggetto del presente lavoro: a fianco del nome di ciascuno compare il periodo di insegnamento e la scuola di servizio («tecnico» rappresenta l'istituto tecnico di Mantova, mentre «classico» indica il liceo classico di Mantova).

Pietro Caminati	1883-96	tecnico
Adolfo Coen	1895-1905	classico
Antonio C. Dall'Acqua	1883-1908	tecnico
Vespasiano Fattorini	1868-83	tecnico
Ruggero Grilli	1894-95	classico
Alessandro Sterza	1870-79	tecnico
	1874-1908	classico
Giuseppe Tezza	1863-94	classico

Dall'esame del materiale documentario originale si evince che Caminati ebbe come allievo Fano; Coen Rimini; Dall'Acqua Fano; Fattorini Loria; Grilli Finzi e Loria; Sterza Fano, Loria, Rimini e Viterbi; Tezza Finzi e Viterbi. Nel seguito si espongono, per ciascun docente, gli elementi più significativi utili per delinearne le personalità.¹

4.1. Pietro Caminati

Nato a Genova il 7 aprile 1837, ottenne all'Università di Genova il diploma di magistero nel 1855 e la laurea in ingegneria idraulica nel

¹ Le notizie, salvo diverso avviso, sono state desunte da [4] e [6].

1859, diplomandosi poi in architettura presso l'Accademia di belle arti di Genova nel 1862. Professore di matematica in svariate scuole (Pierdarena, Modica, Terni, Sondrio, Palermo, Mantova e Foggia), ottenne numerosi riconoscimenti per le proprie attività, tra i quali una menzione onorevole nell'esposizione nazionale in Torino per «l'opera pubblica sopra i logaritmi di somma e sottrazione» (1884), la medaglia di bronzo nell'esposizione generale italiana in Palermo «per lavoro didattico musicale col titolo “Nuova curva fonica da darsi agli Istrumenti musicali ad arco”» (1892) e la medaglia d'oro nell'esposizione internazionale delle industrie e del lavoro in Torino per un goniografo e un compasso goniografico, entrambi brevettati (1911). Le sue ventitré pubblicazioni sono per lo più dedicate allo studio della geometria e dei logaritmi. Fondò e diresse, inoltre, «Il Tartaglia. Periodico di Scienze Fisico-Matematiche elementari per gli alunni delle Scuole secondarie pubblicato per cura del Prof. Ing. Pietro Caminati», pubblicato dal 1898 al 1899.

4.2. Adolfo Coen

Nato a Livorno il 9 gennaio 1848 da famiglia ebraica, studiò dapprima all'Università di Pisa, poi in quella di Bologna, ivi laureandosi con lode in matematica nel 1885. Insegnò matematica in diverse città (Tempio, Cagliari, Vicenza, Cosenza, Salerno e Mantova). Fu membro onorario della società scientifica degli studi psicologici di Francia, socio fondatore dell'Unione Matematica Italiana e ufficiale della corona d'Italia. Pubblicò, tra il 1887 e il 1895, alcuni libri di testo per le scuole superiori. Morì a Livorno il 17 dicembre 1926.

4.3. Antonio Carlo Dall'Acqua

Nato a Dolo (Venezia) il 22 marzo 1838, conseguita la laurea in ingegneria e architettura all'Università di Padova nel 1861, ottenne il diploma di architetto presso l'Accademia di belle arti di Venezia nel 1864. Fu docente di matematica a Forlì, Como, Pesaro e Mantova, collocato a riposo nel 1908. Fece parte della Commissione conservatrice dei monumenti ed oggetti d'arte e di antichità per la

Provincia di Pesaro e Urbino dal 1881 e di quella per la Provincia di Mantova dal 1889; fu socio corrispondente della R. Accademia Raffaello di Urbino dal 1882 e socio effettivo residente della R. Accademia virgiliana di Mantova dal 1890, divenendone Prefetto nel 1907. Fece altresì parte della civica Commissione degli studi di Mantova. Pubblicò una quarantina di opere, composte da monografie, articoli e necrologi, tutte riguardanti la storia dell'arte e dell'architettura. Morì a Mantova l'11 ottobre 1928.

4.4. Vespasiano Fattorini

Nato a Mantova il 13 settembre 1836, si laureò in ingegneria civile e architettura all'Università di Pavia nel 1860. Fu docente di matematica a Vigevano, Ferrara, Venezia e Mantova, divenendo preside dell'Istituto tecnico di Cremona dal 1883. Morì a Napoli il 19 gennaio 1886. Eugenio Togliatti (1890-1977) lo descrive come «persona modesta, ma didatticamente assai capace e piena di entusiasmo per la sua scienza.»¹

4.5. Ruggero Grilli

Nato a Russi (Ravenna) il 17 settembre 1848, iniziò i propri studi in matematica presso l'Università di Bologna nel 1866. Fu docente di matematica nel liceo di Mantova nell'anno scolastico 1894-95. Pubblicò, nel 1889, un trattato di algebra per i licei. Si trasferì a Treviso nel 1895.

4.6. Alessandro Sterza

Nato a Verona il 13 giugno 1851, conseguito il diploma di perito agrimensore, seguì privatamente i corsi di matematica e di meccanica a Monaco di Baviera e i corsi dell'accademia di Belle Arti di Milano, ottenendo la licenza per l'insegnamento fisico-matematico e di agronomia e agrimensura nonché il diploma della reale Accademia di

¹ [34], p. 115.

Milano per l'insegnamento del disegno. Fu professore di matematica dapprima a Verona, successivamente a Mantova, insegnando ivi anche disegno presso la scuola d'arte del comune, la regia Scuola normale e la scuola serale d'arte. Prestò altresì servizio, sempre a Mantova, nella scuola superiore femminile e nella scuola d'arte applicata all'industria. Fu, a partire dal 1880, socio effettivo residente della R. Accademia Virgiliana,¹ ove tenne, tra il 1901 e il 1904, alcune conferenze, sintetizzate negli «Atti e Memorie» dell'Accademia stessa, sulla telegrafia senza fili, sulla navigazione aerea e sulla radioattività.² Fu, infine, cavaliere dell'ordine di Leopoldo I del Belgio e vicepresidente del giurì internazionale per le scienze all'esposizione internazionale di Bruxelles del 1897. Pubblicò una ventina di opere, fra le quali numerosi testi scolastici e un romanzo. Morì a Aosta il 15 aprile 1912.

4.7. Giuseppe Tezza

Nato a Azzago, Verona, il 16 luglio 1840, laureatosi in matematica, la insegnò per oltre trent'anni al liceo classico di Mantova. Pubblicò due opere scientifiche, una delle quali dedicata alle scienze applicate. Morì a Milano il 27 giugno 1897.

5. Considerazioni conclusive

Da quanto precedentemente visto, emergono alcuni dati significativi che caratterizzano positivamente gli insegnamenti della matematica impartiti a Mantova nella seconda metà dell'Ottocento, come si vedrà nel dettaglio in seguito.

Anzitutto, la essenziale stabilità nel tempo del corpo docente. I professori prima citati mantennero, infatti, la propria cattedra nella medesima istituzione scolastica mantovana assai a lungo: Caminati per trentatré anni, Coen per venti, Dall'Acqua per venticinque, Fattorini

¹ [12], p. v; [13], p. vi.

² [9], pp. XXX-XXXII; [10], pp. XIX-XXI; [11], pp. XVII-XX.

per quindici, Sterza per trentaquattro, Tezza per trentuno.¹

In secondo luogo, il possesso di titoli di studio adeguati: Coen e Tezza erano laureati in matematica; Caminati, Fattorini e Dall'Acqua erano ingegneri; Sterza aveva seguito privatamente corsi di Matematica e di Meccanica a Monaco di Baviera.

Le pubblicazioni, poi, rappresentano un indizio della attenzione posta sia alle questioni didattiche sia alla ricerca scientifica: Caminati scrisse venticinque pubblicazioni di carattere matematico e didattico; Coen quattro manuali di aritmetica e algebra; Sterza undici libri di testo scolastici e vari articoli di divulgazione scientifica; Tezza un articolo e un saggio sulle scienze; Dall'Acqua trentasei pubblicazioni sulla storia dell'arte.

Infine, gli interessi coltivati da molti in ambiti extrascolastici indicano una propensione a allargare le proprie attività e i propri saperi a svariati livelli, consentendo favorevoli ricadute anche nella didattica.

Bibliografia

FONDI ARCHIVISTICI²

[1] APMn, Registri delle classificazioni, anni scolastici 1875-76, 1876-77, 1877-78 e 1878-79.

[2] APMn, Registro iscrizioni e classificazioni. Anni 1885-86-86-87-87-88-88-89. Completo.

[3] APMn, Stati – Esami Licenza. Dall'anno 1881-82 all'anno 1888-89 inclusi.

[4] APMn, Stato del personale.

[5] ASMn, Liceo ginnasio «Virgilio», parte I, bb. 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 172, 174, 175, 176, 177, 178, 193, 194, 195,

¹ Fa eccezione Grilli, insegnante per un solo anno a Mantova.

² Si sono utilizzati i seguenti acronimi: APMn, Archivio dell'Istituto tecnico commerciale statale 'A. Pitentino', Mantova; Archivio della Provincia, Mantova; ASMn, Archivio di Stato, Mantova; AVMn, Archivio dell'Accademia nazionale virgiliana, Mantova.

203, 204 e 210.

[6] ASMn, Liceo ginnasio «Virgilio», parte II, b. 35, Regg. stato personale 1887-1940, Stato personale dal 1887 al 1923.

[7] AVMn, Fascicolo di Aldo Finzi.

OPERE A STAMPA

[8] (1918) Adolfo Viterbi, *Bollettino della “Mathesis” società italiana di matematica*, 2, 83-86.

[9] (1903) *Atti e memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, Biennio 1901-1902.*

[10] (1904) *Atti e memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, Anno accademico 1903-1904.*

[11] (1905) *Atti e memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, Anno accademico 1904-1905.*

[12] (1908) *Atti e memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, Anno accademico 1906-1907.*

[13] (1911) *Atti e memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, parte II.*

[14] Caprioli L. (1960) Cesare Rimini, *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 15, 349-351.

[15] Cinquini S. (1950) Giulio Vivanti. Commemorazione letta dal s. c. prof. Silvio Cinquini, *Rendiconti dell’Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 83, 185-205.

[16] Conte A., Giacardi L. (1999) Gino Fano, in: *La Facoltà di Scienze matematiche fisiche naturali di Torino, 1848-1998, Tomo primo, Ricerca Insegnamento Collezioni scientifiche*, a cura di C. S. Roero, Deputazione subalpina di storia patria, Torino, 548-554.

[17] Dragoni G. (2002) Giorgio Todesco e Cesare Rimini, in: *La cattedra negata. Dal giuramento di fedeltà al fascismo alle leggi razziali nell’Università di Bologna*, CLUEB, Bologna, 185-194.

[18] Fano U. (2000) The Memories of an Atomic Physicist for My Children and Grandchildren, *Physics Essays*, 2-3, 176-197.

[19] Giacardi L. (1999) Gino Loria, in: *La Facoltà di Scienze matematiche fisiche naturali di Torino, 1848-1998, Tomo secondo, I Docenti*, a cura di C. S. Roero, Deputazione subalpina di storia patria,

Torino, 520-525.

[20] Il Municipio di Mantova (1918) *In memoria del prof. comm. Adolfo Viterbi*, Mondadori, Ostiglia.

[21] Janovitz A. *Insegnamenti della matematica a Mantova nella seconda metà dell'Ottocento* (in corso di pubblicazione).

[22] Janovitz A. (2001) Adolfo Viterbi matematico, fisico e geodeta: la formazione culturale e le opere scientifiche, in: *Contributi di scienziati mantovani allo sviluppo della matematica e della fisica, Atti del Convegno Nazionale della Mathesis, Mantova 17-19 maggio 2001*, a cura di F. Mercanti e L. Tallini, Tip. Cremonese, Cremona, 143-152.

[23] Janovitz A., Mercanti F. Sull'apporto evolutivo dei matematici ebrei mantovani nella nascente nazione italiana (in corso di pubblicazione).

[24] Marcolongo R. (1935) Aldo Finzi (1878-1934), *Il bollettino di matematica Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli studi matematici nelle scuole medie*, 82-84.

[25] Mercanti F. (2003) Notizie sulla nascita di Giovanni Benedetto Ceva e sulla sua famiglia d'origine, *Atti e memorie dell'Accademia Nazionale Virgiliana*, 71, 3-29.

[26] Mercanti F. (2004) *Giovanni Benedetto Ceva Matematico Cesareo*, Clup, Milano.

[27] Mercanti F. (2008) Mari, Giuseppe, in: *Dizionario biografico degli italiani*, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 192-195.

[28] Nagliati I. (2001) Giulio Vivanti storico dell'analisi, in: *Contributi di scienziati mantovani allo sviluppo della matematica e della fisica, Atti del Convegno Nazionale della Mathesis, Mantova 17-19 maggio 2001*, a cura di F. Mercanti e L. Tallini, Tip. Cremonese, Cremona, 199-208.

[29] Pepe L. (2001) Gino Loria e i suoi 'assidui studi' di storia delle matematiche, in: *Contributi di scienziati mantovani allo sviluppo della matematica e della fisica, Atti del Convegno Nazionale della Mathesis, Mantova 17-19 maggio 2001*, a cura di F. Mercanti e L. Tallini, Tip. Cremonese, Cremona, 227-234.

[30] Taramelli T. (1919) Per il prof. Adolfo Viterbi, in: *Inaugurazione dell'Anno Accademico 1918-19 della R. Università degli Studi di Pavia*, Pavia, 45-61.

- [31] Tenca L. (1959) Adolfo Viterbi, *Bollettino di geodesia e scienze affini*, 2, 291-295.
- [32] Terracini A. (1953) Commemorazione del socio Gino Fano, *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei*, 14, 702-715.
- [33] Terracini A. (1954) Commemorazione del socio Gino Loria, *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei, Classe Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*, 17, 402-421.
- [34] Togliatti E. (1954) Necrologio. Gino Loria, *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 9, 115-118.

Notizie sulla vita e sulle opere di ‘Gioseffo Mari’ matematico e idraulico nella Mantova del Settecento

Giuliana Tomasini¹

Sunto. Si illustrano alcuni documenti inediti, relativi alla vita e alle opere di Giuseppe Mari, in particolare sulla sua attività di ‘Regio matematico’ e di autorevole membro dell’Accademia Virgiliana di Mantova. Conosciuto anche, e forse ancora di più, come ‘Gioseffo Mari’, fu matematico e idraulico di primo piano nella Mantova della seconda metà del Settecento, ricoprendovi importanti cariche nella gestione delle acque del mantovano.

Abstract. We have illustrated same unpublished documents, about life and works of Giuseppe Mari, best known as ‘Gioseffo Mari’. He was a very famous mathematician and hydraulician in Mantua during the second half of the seventh century and he had important charges on the management of the mantuan waters.

Parole Chiave: matematica, idraulica, Mantova, Settecento

1. Introduzione

Questo lavoro si inserisce in una più vasta ricerca che pone la città di Mantova quale punto d’incontro di un ideale crocevia d’Europa dell’arte e della scienza. Lo scopo principale di questa ricerca è quello di approfondire la conoscenza di quegli accadimenti culturali,

¹ Politecnico di Milano, Polo regionale di Mantova, Dipartimento BEST; e-mail: giuliana.tomasini@virgilio.it. Lavoro eseguito nell’ambito del gruppo di ricerca d’Ateneo del Politecnico di Milano e presentato al Congresso nazionale Mathesis, tenutosi a Trento dal 2 al 4 novembre 2006.

ambientali, sociali e politici attraverso i quali il ducato di Mantova acquisì una posizione di preminenza nella pianura padana. Mantova, infatti, per essere stata la più importante piazzaforte della pianura Padana e anche per la sua collocazione geografica e per la conformazione specifica del suo territorio (con i conseguenti problemi idraulici che ne derivano), fu per secoli una fucina di scienziati. Questi erano fondamentalmente degli importanti matematici e idraulici che godevano di una posizione privilegiata e spesso di ragguardevole potere politico, sociale e culturale.

In un siffatto contesto trova la sua esatta collocazione questo lavoro, che si ricollega agli studi ora in corso sullo scenario mantovano di cui si è detto, studi dei quali una prima traccia si trova nel Convegno nazionale Mathesis sul tema «*Contributi di scienziati mantovani allo sviluppo della matematica e della fisica*», tenutosi nel maggio 2001, proprio a Mantova.¹

Assai conosciuto dai suoi contemporanei,² il nome di Gioseffo³ Mari riemerge periodicamente nella letteratura dell'Ottocento⁴ e del

¹ Il convegno è stato patrocinato dall'Accademia Nazionale Virgiliana di Mantova e dalla Prima Facoltà di Architettura del Politecnico di Milano – Sede di Mantova. Gli “Atti del Convegno *Contributi di scienziati mantovani allo sviluppo della matematica e della fisica*, a cura di F. Mercanti e L. Tallini, Mantova 17-19 maggio 2001, C. U. M., Mantova 2001”, sono stati pubblicati nel novembre 2001 ad opera del Consorzio Universitario Mantovano.

² Cfr. *Storia letteraria d'Italia*, VI, Modena, Soliani 1754, p. 44; *ibid.*, XIV, Modena, Remondini 1759, pp. 176, 181, 202; *Giornale de' letterati d'Italia*, XXX, Modena, Società tipografica 1785, pp. 262-278; *ibid.* XXXI, pp. 278-282;

³ Il vero nome di Mari è Giuseppe (Appendice 1), anche se in molti atti ufficiali e su frontespizi di suoi libri o nella intestazione di suoi manoscritti o, addirittura, nella sua firma si trova spessissimo il nome ‘Gioseffo’. Nel seguito verranno utilizzati indifferentemente i due nomi.

⁴ Cfr. L. ROSSO, *Biografia Degli Uomini illustri mantovani mancati nel Secolo XIX*, I, Mantova, s. e. 1830, pp. 72-81; A. MAINARDI, *Storia di Mantova*, Mantova, Benvenuti 1865, p. 365; *id.*, *Dello studio pubblico di Mantova*, Mantova, Segna 1871, pp. 21, 27, 32; C. SOMMERVOGEL, *Bibliothèque de la compagnie de Jésus*, V, Bruxelles-Paris, Schepens-Picard 1894, coll. 544-546;.

Novecento,¹ fino ai nostri giorni del nuovo millennio.² In tal senso, uno stimolo per approfondire le scarse conoscenze sulla sua vita e sulle sue opere mi è stato offerto, in particolare, da alcune annotazioni di Maria Teresa Borgato³, Ugo Baldini⁴ e Luigi Pepe⁵. In esse si evidenziano, in particolare, il valore scientifico e la peculiarità, anche in una visione moderna, del pensiero e dell'attività di questo importante scienziato, che fu anche 'Regio Matematico' e 'Prefetto Generale alle Acque' del mantovano, direttore della Facoltà di matematica dell'Accademia Virgiliana di Mantova e 'Matematico nazionale' in seno all'Istituto nazionale della repubblica italiana. In tal senso è in corso di studio una monografia sulla sua vita e sulle sue opere, sostanziata da molti documenti inediti, conservati per la maggior parte a Mantova.⁶ Nel prosieguo si anticipano alcune tra le più importanti notizie biografiche che lo riguardano (§ 2). Si elencano, inoltre, le opere a stampa e le dissertazioni manoscritte giacenti presso l'Accademia Virgiliana di Mantova, nonché alcuni progetti idraulici (§ 3). Infine, nell'appendice documentaria si riporta il contenuto di quattro emblematici documenti

¹ Cfr. L. MAZZOLDI, *La legislazione sulle acque del mantovano nel '700*, in *Politica ed Economia a Mantova e nella Lombardia durante la dominazione austriaca (1707-1866)*. Atti del convegno storico, a cura di R. Giusti, Bollettino Storico Mantovano, II, Mantova 1959, pp. 166-168, 171; P. CARPEGGIANI, *Un progetto idraulico della fine del Settecento*, in *Civiltà mantovana*, VI, 35, 1972, pp. 325, 329, 331.

² Cfr. M. T. BORGATO, *Agostino Masetti e i suoi progetti idraulici nel periodo napoleonico*, Atti del Convegno *Contributi di scienziati mantovani*, cit., pp. 31-32, 35, 38; U. BALDINI, *S. Rocco e la scuola scientifica della provincia veneta: il quadro storico (1600-1773)*, in *Gesuiti e università in Europa (secoli XVI-XVIII)*. Atti del Convegno di studi. Parma, 13-15 dicembre 2001, a cura di G. P. Brizzi e R. Greci, Bologna, CLUEB 2002, p. 316; L. PEPE, *Istituti nazionali, accademie e società scientifiche nell'Europa di Napoleone*, Firenze, Olschki 2005, pp. 45, 62-63, 148, 166, 186, 440, 468, 475.

³ M. T. BORGATO, *Agostino Masetti*, cit. Ivi a p. 31 si legge che Giuseppe Mari, per la sua «attività di matematico e idraulico meriterebbe uno studio particolare».

⁴ U. BALDINI, *S. Rocco e la scuola scientifica*, cit.

⁵ L. PEPE, *Istituti nazionali*, cit.

⁶ Detti documenti si trovano negli archivi dell'Accademia nazionale Virgiliana di Mantova (nel seguito AANV), di stato di Mantova (ASMn) e in quello di Milano (ASMi).

inediti, relativi, rispettivamente, due alla vita (appendici 1 e 3), e due alle opere idrauliche e scientifiche (appendici 2 e 4).

2. Notizie biografiche

Nato il 9 febbraio 1730 a Canneto,¹ «figlio del Signor Carlo Mari, e della Signora Susanna² sua legittima Consorte»,³ Gioseffo Mari compì i primi studi di carattere umanistico nel collegio dei gesuiti di Mantova fino al 1744, quando entrò a far parte della compagnia di Gesù.⁴

Nel 1746 fu presente nel noviziato di S. Ignazio a Bologna e tra il 1747 e il 1750 si dedicò allo studio della filosofia nella scuola gesuitica bolognese di S. Lucia, nella quale ebbe come docente delle discipline matematiche e fisiche Vincenzo Riccati (1707-1775).⁵ Successivamente insegnò lettere e fu maestro di retorica nel Collegio di Brescia (1751-1754), nei sei anni seguenti (1755-62) ancora lettere nel Collegio di Reggio Emilia dedicandosi anche allo studio della Teologia nella scuola di S. Lucia in Bologna. Divenuto sacerdote, venne richiamato dai

¹ Piccolo paese situato sulla riva destra del fiume Oglio, denominato oggi Canneto sull'Oglio, a circa trenta chilometri di distanza da Mantova.

² Il cognome della madre è Poli, come si desume dall'atto di morte di Mari conservato nell'Archivio Storico Diocesano di Mantova, Parrocchia di S. Maria della Carità, Mortuorum liber, 1775-1811, c. 168/49.

³ Appendice 1.

⁴ Come emerge dai cataloghi dell'Archivum Romanum Societatis Jesu (nel seguito ARSI), in essa rimase fino alla soppressione della stessa avvenuta, come è noto, nel 1773 per disposizione di papa Clemente XIV. Dai medesimi cataloghi affiorano le notizie riguardanti tutte le sedi in cui si mosse Mari come novizio, sacerdote e professore, nel seguito riportate.

⁵ Illustre matematico trevigiano, legò il suo nome, in particolare, agli sviluppi in serie delle funzioni iperboliche. Vincenzo Riccati era figlio dell'altro grande matematico Jacopo (1676-1754), studioso dei metodi di risoluzione di particolari equazioni differenziali (cfr, L. PEPE, *Jacopo Riccati, i nuovi calcoli e i 'Principia mathematica'*, «I Riccati e la cultura della Marca nel Settecento Europeo», a cura di G. Piaia e M. L. Soppelsa, Firenze, Olschki 1992, pp. 111-125).

superiori a Mantova, dove, dal 1762 al 1771, fu lettore di matematica e confessore nel Collegio mantovano.¹

In questo periodo iniziò la sua fervida attività scientifica, che durerà per tutta la vita, con la pubblicazione di importanti opere scientifiche, la formulazione di numerose dissertazioni lette presso l'Accademia Reale di Scienze, e Belle Lettere di Mantova² e la progettazione di importanti opere idrauliche.

Nel 1772, sempre presso il Collegio mantovano, ebbe l'incarico dell'insegnamento, oltre che della matematica e della fisica sperimentale, anche dell'idraulica. Con la soppressione dell'ordine dei Gesuiti, nel 1773 Mari, sprovvisto di una abitazione, «ricovrossi in casa di ottimo amico il Signor Luigi Asti Imperial Regio Direttore delle Poste».³

Il crescente sviluppo degli studi idraulici e la situazione idrica del mantovano produssero la conseguente pressante richiesta di formazione professionale di «Giovani capaci agl'Impieghi soggetti al Dipartimento delle Acque, Strade, e Confini, siccome una tale Provincia richiede».⁴ Per la realizzazione di questo programma Mari, con «il disposto da Sua Maestà l'Imperatrice Regina con suo Reale Dispaccio 11. Maggio 1780», assumeva «la Carica del nuovo Regio Matematico aggregata alla Provincia delle Acque ».⁵ Tra i compiti del Regio Matematico⁶ vi era quello di istituire una scuola di idraulica, dato che

per Suprema disposizione viene addossato al Regio Matematico di dare le Lezioni fisse alla Gioventù nella Teoria, e pratica della scienza delle Acque;

¹ Nel frattempo, il 15 agosto 1763, professò a Mantova i voti di povertà, obbedienza, castità e completa obbedienza al Papa, suggellando in tal modo la sua completa appartenenza all'ordine dei Gesuiti. Anche questa notizia si trova nei cataloghi dell'ARSI.

² Attualmente Accademia Nazionale Virgiliana di Mantova. A tale prestigiosa Accademia Mari fu associato già dal 1769 per poi ricoprirne i vari gradi accademici e leggervi numerose dissertazioni (cfr. § 3. 2).

³ L. Rosso, *Biografia Degli Uomini illustri*, cit, p. 73.

⁴ Appendice 3.

⁵ *Ibidem*.

⁶ Tale nomina gli comportò anche la carica di Prefetto Generale alle Acque.

In corresponsività della quale provida prescrizione rimarrà all'effetto suddetto stabilita una Scuola, la quale avendo anch'essa rapporto alla Pubblica Istruzione, sarà sistemata come le altre tutte del Regio Ginnasio¹

dove, peraltro, già Mari operava. L'avviso dell'istituzione della Scuola Teorica e Pratica d'Idrostatica e d'Idraulica porta la data del 9 Aprile 1781 e il 26 novembre dello stesso anno «il ridetto Regio Matematico Signor Abate Mari»² tenne la sua prima lezione.

Nel 1782 trovò una nuova e duratura dimora presso la nobile famiglia del conte Anselmo Zanardi, che «gli affidò la numerosa e scelta sua Biblioteca».³ In particolare, tra il 1784 e il 1786 pubblicò il primo tomo de *Le teorie idrauliche*⁴, dedicato al conte Zanardi (figura 1), e i Tomi I (figura 2) e II de *L'idraulica pratica ragionata*.⁵ Nei due lustri che seguirono predispose anche i tomi successivi,⁶ si dedicò all'insegnamento, agli studi scientifici, in particolare di idraulica e, soprattutto, alla risoluzione di svariati problemi fluviali.

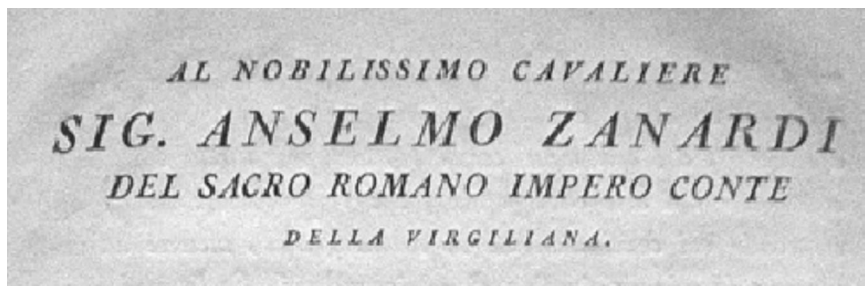


Figura 1

¹ *Ibidem*.

² ASMn, Magistrato Camerale Antico, b. 370, Istruzione Ginnasio, aa. 1761-85.

³ L. ROSSO, *Biografia*, cit, p. 74.

⁴ G. MARI, *Le teorie idrauliche concordate colle sperienze proposte a' suoi discepoli*, I, Guastalla, Costa 1784.

⁵ G. MARI, *L'idraulica pratica ragionata proposta a' suoi discepoli*, I, Guastalla, Costa 1784 e *ibidem*, II, Guastalla, Costa 1786.

⁶ Tali tomi furono pubblicati ai primi dell'Ottocento.

Ratio mathematica 18
(2008), 107 - 132

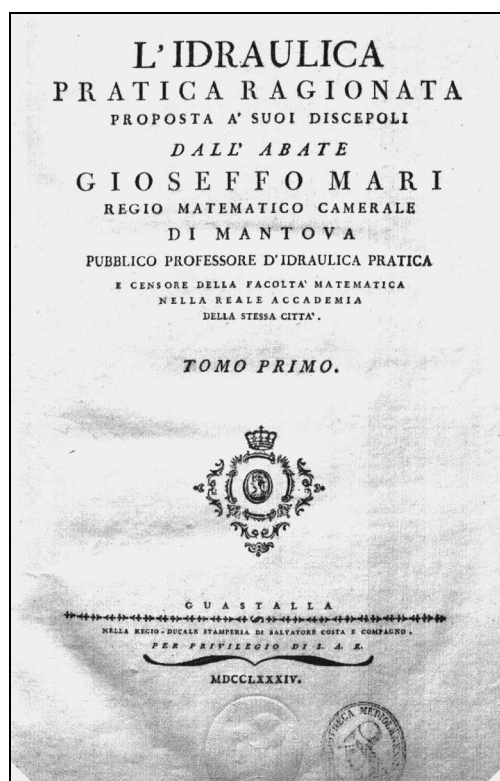


Figura 2

Con l'ingresso delle armate francesi in Mantova nel 1797 la posizione di prestigio di Mari non mutò. Il 22 marzo 1798 venne costituita la Repubblica romana e pubblicato il Regolamento dell'Istituto nazionale della medesima. Esso, come l'*Institut* di Parigi, raccoglieva in sé gli uomini che più si distinguevano nel campo del sapere. Tra i quarantotto membri associati non residenti in Roma venne nominato nella «classe di scienze matematiche e fisiche sezione di matematica»,¹ Giuseppe Mari. Successivamente fu proclamata la costituzione della Repubblica Italiana e l'Istituto Nazionale, con la legge del 17 Agosto 1802, divenne Istituto Nazionale della Repubblica italiana. Mari

¹ L. PEPE, *Istituti nazionali*, cit., p. 45.

continuò a farne parte.¹ Nel 1802 furono finalmente pubblicati anche il terzo e il quarto tomo de *L'idraulica pratica ragionata*² e, nel 1804, il secondo tomo de *Le teorie idrauliche*³. Sempre nel 1804 ebbe a Mantova l'ultimo prestigioso incarico di insegnamento del nascente calcolo decimale, che però dovette abbandonare l'anno successivo per il precario stato di salute, che si aggravò fino a condurlo alla morte, avvenuta in Mantova il 9 Giugno 1807.

3. Le opere a stampa, le dissertazioni e i progetti idraulici

In questo paragrafo si elencano le principali opere riguardanti l'attività pubblicistica e quella progettistica di Mari.

3. 1. Opere a stampa

- ◆ *Le teorie idrauliche concordate colle sperienze proposte a' suoi discepoli*, I, Guastalla, Costa 1784.
- ◆ *L'idraulica pratica ragionata proposta a' suoi discepoli*, I, Guastalla, Costa 1784.
- ◆ *L'idraulica pratica ragionata proposta a' suoi discepoli*, II, Guastalla, Costa 1786.
- ◆ *Inutilità, e danno del ritirare gli argini nelle corrosioni*,⁴ in «Memorie della Reale Accademia di Scienze, e Belle Lettere ed Arti», Mantova, Pazzoni 1795, pp. 177-224.
- ◆ *Sopra il trasporto del canale di Busseto che intendesi di fare nella villa di Polesine sopra i di lei*⁵ *fondi, ed a danno di detta marchesa*, Parma, Rossi e Ubaldi 1798.

¹ Cfr. *ibidem*, p. 148.

² G. MARI, *L'idraulica pratica ragionata proposta a' suoi discepoli*, III, Guastalla, Costa 1802 e *ibidem*, IV, Guastalla, Costa 1802.

³ G. MARI, *Le teorie idrauliche concordate colle sperienze proposte a' suoi discepoli*, II, Guastalla, Costa 1804.

⁴ Unica dissertazione data alle stampe.

⁵ Trattasi della marchesa Dorotea Pallavicini Vidoni alla quale l'opera è indirizzata sotto forma di lettera (Biblioteca di Storia delle Scienze 'Carlo Viganò')

- ◆ *L'idraulica pratica ragionata proposta a' suoi discepoli*, III, Guastalla, Costa 1802.
- ◆ *L'idraulica pratica ragionata proposta a' suoi discepoli*, IV, Guastalla, Costa 1802.
- ◆ *Le teorie idrauliche concordate colle sperienze proposte a' suoi discepoli*, II, Guastalla, Costa 1804.

3. 2. Dissertazioni

Presso l'Accademia Reale di Scienze, e Belle Lettere ricoprì tra il 1775 e il 1793 la carica di Censore della Facoltà di Matematica, per divenirne Direttore nel 1794. Dalle dissertazioni che ivi egli lesse tra il 1769 e il 1804, per quasi tutto l'arco della sua vita, emerge la poliedricità dei suoi interessi scientifici di tipo storico, geografico, matematico, fisico, astronomico e chimico, anche se i suoi studi riguardarono prevalentemente l'idraulica.

Le dissertazioni che giacciono, manoscritte, presso l'Archivio dell'Accademia Nazionale Virgiliana di Mantova sono le seguenti.

- ◆ *Dissertazione contro la quasi comune opinione, che le inondazioni del Nilo abbiano prodotto il rialzamento de' campi dell'Egitto*.¹
- ◆ *Dissertazione in difesa delle due leggi Astronomiche Newtoniane dedotte dalle Kepleriane*.²
- ◆ *Ripari al Po*.³
- ◆ *Sulla forza Centrifuga*.⁴

dell'Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia, FA 7 B 623).

¹ Questa dissertazione venne completata in tempi diversi (prima parte, 1769, seconda parte, 1772, AANV, b. 45/8).

² Dissertazione letta nel 1775 (AANV, b. 61/29).

³ Dissertazione letta nel 1788 (AANV, b. 45/3).

⁴ In questa dissertazione del 1790, che è il completamento di un'altra del 1772 andata perduta, Mari esprime il meglio del suo sapere scientifico. Tra gli esempi emblematici della sua brillante esposizione, per spiegare il concetto di forza centrifuga illustrava «il fenomeno de corpi, che girano sulla superficie della terra nel suo moto diurno. Per questa rotazione terrestre, oggi è oramai fuor di dubbio, che qualunque corpo pesa meno all'equatore, che in qualunque parallelo, come a

Ratio mathematica 18
(2008), 107 - 132

- ◆ *Memoria fisica sui termometri.*¹
- ◆ *Per l'Apparecchio Chimico del Cittadino Astier presentato all'Accademia Scientifica di Mantova.*²
- ◆ *Delle cagioni diradatrici delle tenebre dell'ecclissi.*³

3. 3. Progetti idraulici

Numerosissime sono le relazioni lasciate da Mari manoscritte, oltre alle dissertazioni, riguardanti la sua attività di idraulico, tra le quali si possono ricordare almeno le seguenti.⁴

- ◆ 27 Maggio 1770 - Relazione su un rimedio provvisorio da apportare alla chiusa di Governolo in attesa di uno stabile intervento.
- ◆ 1780 circa - Progetto per irrigare l'orto botanico di Mantova (figura 3).⁵
- ◆ 17 Novembre 1780 - Relazione intorno alla navigazione del Po fino a Mantova.
- ◆ 12 Dicembre 1780 - Relazione sulla chiusa di Governolo.
- ◆ 12 Aprile 1781 - Relazione con osservazioni su un progetto del Colonnello Lorgna relativo alla chiusa di Governolo.
- ◆ 12 Luglio 1786 - Relazione per salvaguardare il Froldo di Revere. Rimedi necessari e modalità d'intervento.
- ◆ 20 Novembre 1786 - Relazione sull'irrigazione del Boschetto.

cagion d'esempio al parallelo di Mantova, lontano 45° poco più, e meno anche in Mantova, che a Pietroburgo, il cui parallelo dista dal nostro 15°», cfr. appendice 4.

¹ Questa dissertazione fu letta in due giorni diversi del 1798, AANV, b. 60/18.

² Dissertazione letta nel 1803 (AANV, b. 59/25).

³ Dissertazione letta nel 1804 (AANV, b. 60/13).

⁴ Tali relazioni giacciono presso ASMn e ASMi.

⁵ Per questo progetto, «l'artificio consisterà in far zampillare l'acqua nella vasca con un getto, che riesca superiore alquanto al piano dell'orto, col mezzo d'una ruota mossa dall'acqua ad un'altezza conveniente di circa sei braccia $\frac{1}{2}$ », cfr. appendice 2.

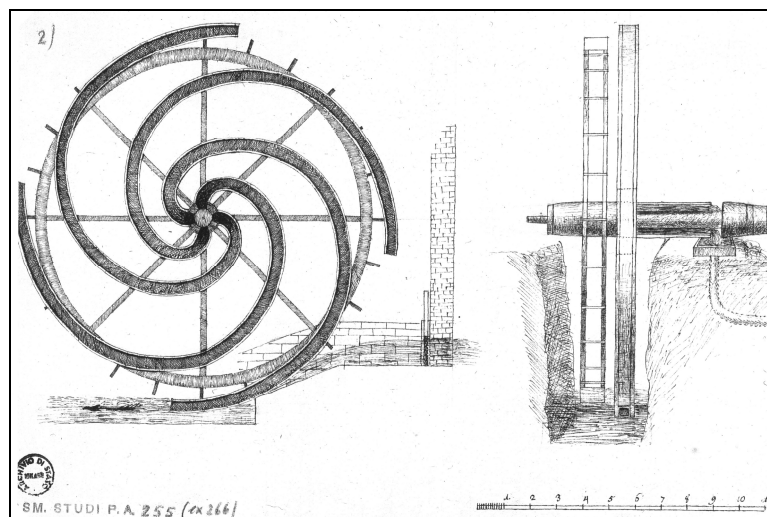


Figura 3

- ◆ 2 Gennaio 1787 - Massime per troncare alla radice la moltitudine di abusi in materia d'Acque.
- ◆ 30 Gennaio 1787 - Elenco dei canali che devono essere scavati per la conservazione delle acque.
- ◆ 21 Giugno 1787 - Progetto idraulico per collegare la città di Mantova alla Favorita.¹
- ◆ 11 Settembre 1787 - Progetto di una macchina per regolare l'acqua del Lago Superiore al vaso di Porto.
- ◆ 12 Maggio 1788 - Intera riforma degli Scolì per le valli di Sermide presentata sotto forma di dissertazione suddivisa in dieci proposizioni (nella quinta cavo Mari).
- ◆ 21 Maggio 1789 - Relazione sull'intervento all'argine di Gazzuolo.
- ◆ 14 Marzo 1792 - Piano di regolamento per togliere i disordini all'argine di Luzzara.
- ◆ 28 Marzo 1792 - Relazione del Regio matematico sugli scandagli fatti nel Po.

¹ Questo progetto è stato pubblicato in P. CARPEGGIANI, *Un progetto idraulico* cit., pp. 324-349.

- ◆ 11 Aprile 1793 - Riflessioni e lavori da eseguire all'argine di Luzzara onde evitare dannose inondazioni.
- ◆ 20 Dicembre 1795 - Relazione dettagliata intorno alle inondazioni dei fiumi Ostigliesi.

APPENDICE DOCUMENTARIA

1. ATTO DI BATTESIMO DI GIUSEPPE MARI, DEL 1730.
ARCHIVIO DELLA PARROCCHIA DI S. ANTONIO ABATE IN CANNETO
SULL'OGLIO, REGISTRO DEI BATTEZZATI DAL 1715 AL 1768, VOL. 8, C.
90, N. 12.

Adì 10 Febbrajo 1730.

Giuseppe figlio del Signor Carlo Mari, e della Signora Susanna sua legittima Consorte è stato battezzato da me Antonio Maria Monda Rettore di S. Michele. Padrini l'Eccellentissimo Signor Dottor Domenico Rebusca, e la Molto Illustre Signora Costanza Arrivabene. Nacque jeri alle ore sei.

2. PROGETTO PER IRRIGARE L'ORTO BOTANICO, DEL 1780 CIRCA.
ASMI, A. G., STUDI P. A., B. 255.

Avendosi sperimentato a qual altezza poteva levarsi l'acqua del vivo, che teglia l'orto botanico in tempo d'acqua ordinaria del lago, da cui derivasi, si è trovato, che non monta, che all'altezza di due braccia e $\frac{1}{4}$ sopra il suo pelo ordinario, quando sostentisi con una chiusa, da cui si lasci stramazze. In tempo d'acqua bassa del lago non sarà molto minore l'altezza: poichè in esso si rattiene l'acqua sempre all'altezza necessaria pei mulini. Il pelo presente è oncie $55 \frac{1}{4}$ più basso del piano su cui aprirassi la vasca. Sostenendo due braccia l'acqua, e anche se si vuole due oncie di più, il pelo dell'acqua così sostenuta verrebbe ad esser più basso del pianterreno della vasca oncie $29 \frac{1}{4}$. Scavando dunque il terreno 5 braccia per formare la vasca, verrebbonvi sul fondo di esso $30 \frac{3}{4}$ oncie di acqua: ma la superficie di essa sarebbe distante dalla superficie del piano oncie $29 \frac{1}{4}$ e se attorno alla vasca si faccia un parapetto, o un orto erboso alto solo oncie $6 \frac{3}{4}$, la superficie dell'acqua sarà 36 oncie più bassa del ciglio dell'orto, e riuscirà assai incomodo l'irrigar l'orto. È dunque necessario di servirsi dell'innalzamento dell'acqua per darvi una caduta capace di muovere una ruota, da cui si sollevi l'acqua ad

un'altezza, che basti ai bisogni dell'innaffiamento. Questo richiede, che possa farsi col minor incomodo possibile, e nel più breve tempo. Il minor incomodo possibile potrebbe aversi, quando l'innaffiamento si potesse eseguire da una sola persona, e colla minor fatica, e si farebbe nel minor tempo, quando nell'atto istesso si potessero irrigare tutti i quarti dell'orto. Se l'acqua entrasse nella vasca posta nel mezzo dei quarti a modo di getto, prima entro un piccol bacino, dal cui labbro cadesse poi nella vasca, e se il bacino fosse alquanto superiore al piano dell'orto, così che si potesser porre sott'esso piccoli canaletti di legno, che rivolgeress l'acqua ai diversi quarti, chiaro è, che una sola persona potrebbe irrigare i quarti tutti, e in poco tempo, perché contemporaneamente. Tutto dunque l'artificio consisterà in far zampillare l'acqua nella vasca con un getto, che riesca superiore alquanto al piano dell'orto, col mezzo d'una ruota mossa dall'acqua ad un'altezza conveniente di circa sei braccia $\frac{1}{2}$. Non suggerisco le trombe perché il Rio è infetto di sabbie sul fondo, dalle quali spesso sarebber guastate. Per animar questa ruota non si può dar all'acqua, che un braccio e $\frac{1}{4}$ di caduta. Dandone una maggiore, potrebbe avvenire, che in acqua bassa del lago non potesse entrar l'acqua nella corsia con quell'altezza e corpo capace a far girare la ruota. Il soprapìù, a che può sollevarsi, servirà colla pressione a dar maggior forza alla caduta. Un'usciera sopra la soglia della corsia, che formerà la caduta ne regolerà la quantità necessaria al movimento della ruota. Come dunque nelle bassezze del lago, l'acqua sulla soglia della vasara può essere scarsa, e quindi di poco momento, converrà formare una ruota, che possa muoversi anche da poca forza. Una ruota, che non porti sempre l'acqua alla circonferenza, ma da questa la passi al centro, e la ruota, che si muoverà colla minor fatica, e tanto più, quanto che in essa il suo raggio, che è il braccio di leva della potenza, dee esser più lungo, e leverà l'acqua pel cammin più corto. Non può dunque convenire al bisogno dell'orto, che la ruota inventata dal Signor Faya. Convien però addattarla ad un canale, che scorra sopra un piano inclinato, qual formerassi dalla caduta dell'acqua. Ecco come ne ho imaginata la maniera. Piantarsi in un albero i crocili necessarj per formare la ruota per le pale. Questa avrà 6 braccia e mezzo di raggio netto dall'albero: porterà 24 pale, ciascuna delle quali sarà di 11 oncie di larghezza, e di 8 di altezza. Tutto ciò secondo l'arte ordinaria. In distanza di mezzo braccio circa dai primi crocili, altrettanti ne sortiran dall'albero, che richiudano e fermino i condotti, che debbon portar l'acqua all'albeero. Questi condotti saranno evolute di un circolo, che abbia la sua circonferenza uguale all'altezza, a cui vuolsi levar l'acqua. L'acqua monterà con una direzione verticale, tangente all'albero, e

perpendicolare al canale in qualunque sito essa si trovi. L'azione del suo peso corrispondendo sempre all'estremità di un raggio orizzontale, che sarà il braccio di leva costante; la potenza, che leverà questo peso coll'ajuto della ruota, sarà sempre la stessa. La corsia sarà larga al principio della caduta oncie 14. e, ove porterà l'acqua perpendicolarmente alle pale, oncie 12. i condotti, che prenderan l'acqua saran 4; la lor bocca sarà di tre oncie in quadro. Salteran fuori della circonferenza delle pale 6 oncie misurate sul raggio della ruota, pescheranno in acqua oncie 4. Il fondo della corsia sarà 2 oncie più alto del pelo dell'acqua, e avrà uno scalino, che si abbasserà le dette due oncie nel sito, ove l'acqua urta perpendicolarmente la pala, per formare una corsia più bassa, che riceva l'acqua, che ha urtato senza che dia rigurgito alla sopravveggnente. Essendovi poca caduta convien levare tutti gl'impedimenti possibili. Per questo effetto si può tenere il raggio dell'albero più corto di 2 oncie del figato, o l'albero 2 oncie più alto. I condotti alzan l'acqua fino all'albero, dal quale sarà trasmessa in un vaso di legno, o di marmo, nel fondo del quale sarà il tubo, che porterà l'acqua alla vasca. Il vaso dourà empersi; il sovra più cadrà nel Rio, o in un cavo vicino per alimentar l'erbe palustri. Il tubo farà zampillare l'acqua dal bacino della vasca, e empirà la vasca fino al segno, che si vorrà. Sarà bene tenerla alta, perché se ne possa anche cavare a mano, volendo, con facilità. A quel segno si farà la bocca di un piccol canale, che porterà l'avanzo alla piccola peschiera, e da essa al Rio, a cui è vicinissima, o ai boschetti vicini. La strada che si fa fare all'acqua è la più breve. Ciò si rileverà dal piano dell'orto, ove è marcata. Il pelo dell'acqua del Rivo è più basso del piano, ove verrà posta la vasca, oncie $55 \frac{1}{4}$. Facendo il raggio della ruota netto dall'albero di braccia $6 \frac{1}{2}$, si può far cadere l'acqua in un vaso o conservatorio colla superficie più alta del piano, ove andrà posta la vasca, oncie $22 \frac{3}{4}$. Tenendo l'orlo della vasca alto 4 oncie dal terreno, e sovresso il bacino alto altre 4; il getto sarà un braccio, meno quello, che porteranno le risistenze, e darà tutto il comodo per le irrigazioni. La vasca sarà profonda tre braccia. Oncie 30 sopra il fondo si farà un canaletto con un mattone disposto pel lungo, e chiuso da' lati da altri due mattoni posti verticalmente, e superiormente da mattoni posti di traverso. Questo col fondo di sotto sarà 7 oncie sotto il terreno del viale di mezzo, e colla parte superiore 3 oncie: correrà il canaletto rettamente fino alla peschiera, che avrà simile bochetto laterale per trasmettere l'acqua soprabbondante nel Rivo. La peschiera per mantenere il pesce dovrà contenere acqua all'altezza di 4 braccia almeno, e nel suo fondo avrà un bocchetto verso il Rio da potersi aprire, quando si volesse cangiarvi acqua. Il

Ratio mathematica 18
(2008), 107 - 132

tubo di condotta dal conservatorio alla vasca, che si può far di cotto, avrà due pollici di diametro non considerata la grossezza delle sue pareti. Il foro da cui l'acqua zampillerà fuor del bacino potrà avere il diametro di un pollice e $\frac{1}{2}$ e l'acqua da esso tramandata potrà bastare alla irrigazione.

Abbate Gioseffo Mari Regio Matematico Camerale.

3. ISTRUZIONI PER LA SISTEMAZIONE DELLA CARICA DI REGIO MATEMATICO, DEL 1780.
ASMI, A. G., STUDI P. A., B. 125.

Ritenuto il disposto da Sua Maestà l'Imperatrice Regina con suo Reale Dispaccio 11. Maggio 1780 successivamente abbassato a questo Regio detto Magistrato Camerale con venerata Lettera primo Giugno prossimo passato di Sua Eccellenza il Signor Conte Ministro Plenipotenziario, e Vice-Governatore sarà la Carica del nuovo Regio Matematico aggregata alla Provincia delle Acque, e ne' seguenti Articoli saranno dettagliate le incombenze che la riguardano.

Primo: La Carica di Regio Matematico essendo istituita principalmente alla migliore economia direzione e distribuzione delle Acque del Mantovano, l'oggetto delle quali forma una delle Provincie di questo Regio detto Magistrato Camerale, s'intenderà quindi soggetto il Regio Matematico stesso, ed addetto al Tribunale per tutti quegli'incombenti, in cui credes'egli di doverlo impiegare.

Secondo: Tre possono essere segnatamente le Cause, per cui convenga al Magistrato valersi della lui opera. Primo: per avere un di lui sentimento verbale, e sarà della di lui puntualità il prestarsi alle premure del Dicastero, dove avravvi conveniente luogo, e Sessione. Secondo: per riferire in iscritto a norma degl'eccitamenti, e sarà lui impegno di soddisfarvi colla maggior esattezza. Terzo: Per visite locali secondo le occorrenze, e sarà del di lui zelo disimpegnarle in tutta quella estensione, che la materia richiederà, nel qual caso sarà provveduto in conformità della pratica, e colli riguari dovuti al Carattere del suo Impiego; dipendendo poi dall'autorità Superiore la riflessione delle sue Diete in evento di Visite che non riguardino interesse della Regia Camera.

Terzo: Qualora dal Tribunale Economico passi a quello di Giustizia alcuna Causa agitata tra Privati se pure il Regio Matematico non avrà opinato presso il Magistrato, sarà della natura del suo ufficio l'essere prescelto a dare il suo

sentimento, particolarmente se si tratti di causa, il cui scioglimento dipenda dall'applicazione delle Teorie dottrinali della scienza delle Acque.

Quarto: Le Convocazioni, che annualmente si tengono nanti il Magistrato delle Digagne, essendo quelle, che danno un lume generale de' bisogni delle loro Arginature, e de' loro scoli, sarà conveniente che v'intervenga il ridetto Regio Matematico per suo lume, e potere alla circostanza prestarvi i suoi suggerimenti.

Quinto: Per Suprema disposizione viene addossato al Regio Matematico di dare le Lezioni fisse alla Gioventù nella Teoria, e pratica della scienza delle Acque; In corresponsività della quale provida prescrizione rimarrà all'effetto suddetto stabilita una Scuola, la quale avendo anch'essa rapporto alla Pubblica Istruzione, sarà sistemata come le altre tutte del Regio Ginnasio.

Sesto: Quanto al tempo, ed al luogo in cui farla il Regio Matematico, e Professore né passerà d'intelligenza colla Soprintendenza Generale ai Regi Studj: quanto poi al numero e durata delle Lezioni, come pure al principio, e fine dell'Anno scolastico s'uniformerà al Diario, ed Orario, che si pubblica in ogni Anno per le Regie Scuole di Mantova.

Settimo: Lo Scopo di questa Istituzione diriggendosi interamente al formar Giovani capaci agl'Impieghi soggetti al Dipartimento delle Acque, Strade, e Confini, siccome una tale Provincia richiede cognizioni teoriche, e pratiche sul regolamento de' Fiumi de' Canali d'irrigazione, de' scoli primarj, e secundarj, degl'Edifizj Idraulici, delle Arginature, vie Pubbliche, e Linee de' Confini Territoriali; verseranno quindi le sue Lezioni su de' principj, che hanno analogia agl'oggetti suddetti.

Ottavo: Conducendo a poter meglio perfezionare la studiosa Gioventù in questa Carriera, oltre lo Studio delle Teoriche Leggi la cognizione de' Tipi, e delle Mappe generali, e particolari, sarà della premura del Regio Matematico il formarne una metodica, e ben ordinata collezione in sussidio de' suoi Allievi. Giovando parimenti alla pratica la cognizione de' Trattati, e delle Relazioni antiche de' passati Ingegneri, assieme a quelle più importanti de' moderni; questi mezzi pure saranno impiegati dal Regio Matematico per istruzione della Gioventù addetta alla sua Scuola, ed Regio detto Magistrato si presterà a somministrargliene le occorrenze.

Nono: Non convenendo poi che tutti indistintamente i Giovani siano ammessi a questa Scuola, se prima non consti di una sufficiente loro disposizione, e capacità; dovranno perciò preventivamente presentarsi al Regio Matematico, perché egli mediante un esame conoscere possa la loro idoneità per l'ammissione.

Decimo: Siccome per Sovrana disposizione gl'Impieghi d'Ingegneri Camerali ed altri Uffizj, che vi hanno rapporto, saranno in occasione di sopravveniente vacanza assegnati a quelli che avranno fatto il corso di questa Scuola, e successivamente l'Alunnato con aver dato saggio della loro abilità; Così il Regio Matematico terrà esatto conto de' progressi, qualità personali, e meriti di ciascheduno, affine di potere alla circostanza informarne il Dicastero.

Undicesimo: Per dare allla Gioventù maggior campo di formare la Pratica negl'esercizj del loro Istituto sarà in facoltà del Regio Matematico scegliersi uno de' suoi Scolari all'atto di qualche Visita locale, per le cui Diarie supplirà la Regia Camera.

4. DISSERTAZIONE DEL SIGNOR ABATE GIUSEPPE MARI 'SULLA FORZA CENTRIFUGA', DEL 1796.
AANV, B. 60/10.

Altra volta¹ io vi ragionai, non ven rimembra forse Accademici Ornatissimi per la lunghezza del tempo infrappostosi, della vera indole, e natura di quella forza, che dicesi centrifuga, di quella cioè, di cui è animato un corpo, che viaggia per una linea curva, e sempre tende a sottrarsi dal centro del suo moto. Conoscer vi feci, non esser questa una forza reale di natura, con che essa operi veracemente, ma una forza in essa immaginata da Geometri, che altre pure ideali surrogarono alle vere, con grandi vantaggi nella fisica. Trattato allora l'argomento in tutta la sua confacente ampiezza, rimaneva solo un dubbio, a che profitto tornasse cotesta ideale surrogazione d'una forza immaginaria ad una vera. A compimento di materia io vi promisi allora, ben lo ricordo, di dimostrarvene a mio agio i sommi vantaggi, e la quasi necessità, che di essa si avea. Altri soggetti più acconcj alle circostanze mi han fatto divagare dal propostomi, nelle altre volte, che ho avuto l'onore d'intertenervi da questo luogo. Sento ora il rimorso di una troppa dilazione, e vengo oggi a liberarmene. L'astrusità dell'argomento non torrà il diletto alla spiegazione de' leggiadri sperimenti, che verrò producendo. Parlerò prima di quelli, che nascono nei fluidi, e negli ammassi di piccoli corpicciuoli nell'atto in che ruotano intorno paralleli all'orizzonte, e sì nei fluidi semplici, e che ne' fluidi misti di materie, e più leggiere, e più gravi. Scenderò indi a parlare di quelli, che nascono nei fluidi, che raggiransi perpendicolari all'orizzonte in compagnia di corpi, o più gravi, o più lievi. Di quelli in terzo luogo, che

¹ Mari allude alla dissertazione del 1772 andata perduta, cfr. Nota 37.

ruotansi obliqui all'orizzonte con corpi più o meno specificamente pesanti. Infine ancor de' corpi posti alla circonferenza de' globi rotanti prima al loro equatore, poi ne' diversi cerchi paralleli. Darò un saggio in tutti questi modi di rotazione, a' quali riduconsi agevolmente gli altri sperimenti prodottisi in questo genere. L'ampiezza della materia non mi farà abusare della vostra sofferenza, e la vaghezza degli oggetti, che vengo a schierarvi avanti, mi concilierà, io mel prometto, tutta la gentil vostra attenzione. Non negano i Geometri, che i fenomeni de' corpi viaggianti per curve non ricevano spiegazione in un qualche modo almeno, e per la più parte colle forze reali di natura. Credono però, e sentenziano, che assai meglio comprendansi colla scorta della lor forza immaginaria, che tanti è presta a dichiararne, quanti ne può fornir la natura, o inventarne l'artificio. Senza di questa avvviluppansi essi di modo, e di buona grazia il confessano, tra mezzo le oscurità che trovano appena traccia di sortirne. L'arte con che opera natura è spesse volte un enigma. Non basta loro il penetrarvi, né con gli occhj della mente, né con quelli del corpo. Sfugge agli uni, e agli altri il magistero, con che ella agisce, e combina le sue forze, buona parte delle quali per ultima giunta è al tutto sconosciuta. Laddove la Teoria della forza centrifuga riduce i fenomeni tutti alle sole leggi dell'equilibrio, leggi semplicissime, e affatto note, e sicure. Senza il presidio di questa mendicar debbonsi le spiegazioni dalle leggi de' diversi movimenti di natura, or troppo oscure, ora poco stabilite, onde, e sorgon poi implicatissimi raziocinj, e spiegazioni sì poco eloquenti, alle quali non sa arrendersi, che a puro stento, l'intelletto. Non basta ciò solo, o Signori miei, a riconoscere vantaggiosa non solo, ma come a dire necessaria la forza, ch'io vi commendo? Vedetelo alle prove de' fenomeni, che con essa verrò rischiarando, poste a fronte delle implesse e antiche spiegazioni. Parliam dunque prima di quelli, che appajon nei fluidi, e negli ammassi de' solidi, che ruotan paralleli all'orizzonte, ora semplici, ora trasmischiati a materie più leggiere, ora più gravi. Molte volte vi sarà avvenuto di osservare, che nel rotarsi alcun poco intorno al suo asse una bottiglia, o altro vaso non ripieno di liquore, come costumasi a sollevarne e rimescelar col fluido qualche materia depostasi sul fondo; nell'atto della rotazione vedesi il fluido racchiuso assorgere, e come rampicarsi alle pareti del vaso, e deprimersi vieppiù, quanto più appressasi al centro di sua rotazione, o sia all'asse verticale del vaso. Di un sì piano fenomeno già ricorderete l'antica astrusa spiegazione. Intendevasi diviso il fluido rotante in molte, e sottili zone, o fascie cilindriche concentriche, che sorgevan perpendicolari dal fondo, e montavan fino alla superficie del fluido, e stendevansi in quel numero, che più vi capiva, dal

centro, o asse del vaso alla circonferenza, o alle pareti di esso. Fate un cavo conico nel mezzo d'una cipolla, e le varie tonache, di che va vestita, vi daran l'idea delle zone acquee, ch'io vi descrivo. Ogniuna di queste zone acquee descrive, dicevasi, il suo circolo, in rotandosi, più piccolo le più aderenti al centro più largo le più distanti. Dunque deve avervi una forza atta a ritenerle nell'intrapreso circolo, che chiamanla centripeta. Ciò non può porsi in dubbio. Ma ove rintracciar questa forza? Eccovi Accademici Ornatissimi le prime ambiguità. Niuna non ne traspare al certo in niuna delle zone, che si aggira, che capace sia di tener vincolata al suo circolo l'acqua, che il descrive, colla piccola fascia, di che è composta. E ciò è pur vero per qualunque indagine se ne prenda. Dunque cotesta forza ritenente ciascuna zona in circolo sarà estrinseca a ciascuna di essa. La deduzione non può riprendersi. Ma se tal forza è forestiera a ciascuna zona; non potrà nascer d'altronde, che da pressione immediata dalla vicina esterna zona, che opponsi allo sforzo della interna, e vietale di scostarsi dal centro, intorno a cui ruota, e di passar oltre alle pareti del vaso, e fa quindi le veci della centripeta. E dal non vedersi altra forza ritenente, che la pressione della prossima esterna zona; passasi di lancio a stabilire, che dunque ciascuna zona acquee ritiensi nel suo circolo dalla pressione della sua vicino, che immediatamente la cinge e la circoscrive. Se dunque la forza, che ritiene la prima più angusta zona nel mezzo del vaso nel suo circolo, risiede nella zona seconda esteriore che la serra, e preme, affinché non si scosti dal centro; non potrà questa seconda zona tener compressa la prima all'indietro senza premere d'altrettanto la terza sua vicina al di fuori, dalla quale essa pure è circondata: e ciò per quella infallibil legge ne' fluidi di premere, e sfiancare ugualmente verso ogni parte. Dunque alla forza propria della terza zona si fa aggiunta ancor della pressione nata dalla centrifuga della zona seconda, e della prima, e quindi la forza della terza avanzerà quella detta seconda, e per la ragione stessa la forza della quarta zona la vincerà molto più sopra quella della terza, e così mano mano fino alle pareti del vaso, ove l'ultime zone saran più premute, che le antecedenti. Dalla quale pressione poi le più premute debbon rialzarsi più che le meno, e così l'acqua assorgere ai lati, mentre si deprime al centro. Se sarò apparso alquanto disuso in questa sposizione, non fu ciò a motivo di dar taccia di troppa prolissità alla vecchia spiegazione, ma per renderla soltanto, quanto potevasi più chiara. Qualunque chiarezza, o brevità, che vi abbiate scorta, scompare al lampo quasi della spiegazione, che diffonde la forza centrifuga. Ammirate. Le zone esteriori descrivono maggior circolo, che le interiori. Posseggon dunque maggior forza centrifuga, che trovansi in ragione de' raggi de' circoli descritti. Distræ

dunque nelle esterne zone maggior parte di gravità dal premere al basso, che nelle interne. Converrà dunque per mettersi in equilibrio colle lor vicine, che quelle tanto crescan d'altezza, quanto sceman di gravità. Negate Signori miei, se il potete, che non appaja questa la legitima figlia di natura, e l'altra al paragone suppositiva. Analogo a questo si è l'altro genere di sperimenti col fluido, o coll'ammasso de' solidi, che gira orizzontalmente, e con cui tramischiansi corpi più leggieri, come quando cribrasi nel vaglio il grano a purgarlo dalle sue buccie, o dalle paglie, o quando rotasi una bottiglia d'alcun liquore schiumoso. Le paglie, e le buccie raccolgonsi nel centro del crivello, e le schiume nel mezzo del vaso. Ma la spiegazione non è meno analoga all'altra, quantunque più dotta, e raffinata. Le schiume, e le paglie prendono la forza a rotarsi, o dal fluido, o dai grani, che le sostentano, e si ruotano con esse. Ma la forza è in ragion della massa stando l'altre cose pari; dunque han più forza a scostarsi dal centro il fluido, e il grano, che le buccie, e le schiume soggette. Ma non può scostarsi dal centro il fluido, e il grano senza gittar verso il centro le paglie, e le schiume, dovendo quelli di necessità occupare il posto di queste, nel portarsi alle pareti del cribro, o del vaso, e non avendo le paglie, e le schiume altro agio a muoversi, che alla parte, ove scontrano minor resistenza, che è il centro, ov'è la menoma velocità. In quella guisa, che i corpi più leggieri d'ugual volume d'acqua immersi in un vaso sospingonsi all'insù, non da altra forza, che da quella delle particelle acquee vicine, e più gravi, che discendono con maggior conato, che quelli più leggieri vi oppongano. Così come nel discendere le particelle acquee, e nell'occupare il luogo de' corpi più leggieri, fan questi ascendere; per ugual modo i grani dotati di maggior forza centrifuga, che portansi alle pareti del cribro, nell'occupare i posti delle paglie, e delle buccie le cacciano al centro. La parità è introdotta ad ornamento di dottrina; non per esigenza dell'esposto. La spiegazione pertanto se è semplice, non è men breve. Voglio risparmiare a' vostri ingegni il tormento della spiegazione antica, e intendo, che me ne siate grati sulla mia parola. Invece di nojarvi, sonomi prefisso di dilettrarvi, e avanzomi nel mio soggetto col fenomeno occorso ad Hugenio e da lui registrato nella dottissima dissertazione de caussa gravitatis, in cui coll'acqua rotar vedrete orizzontalmente un corpo d'essa più pesante, siccome vi ho data promessa. In un vaso cilindrico tutto ripieno d'acqua, e ben chiuso gittò molti piccoli pezzi di cera spagna, e fece rotar il vaso verticalmente, e l'acqua orizzontale. Osservò, I° che i minuzzoli della cera più gravi dell'acqua eransi adagiati sul fondo levigatissimo, e che seguivan assai meglio il moto del fondo del vaso, di quel che facesse l'acqua circonfusa, e che nel rotarsi del cilindro

concorser tutti alle pareti di quello. Arrestato in II° luogo improvvisamente il moto del vaso, o cilindro, ma proseguendo a girarvi entro l'acqua in forza del concepito movimento di rotazione, vide ricorrer tutti i pezzetti di cera dalla circonferenza al centro del vaso, e dove' rimarcare in terzo luogo, che nel portarsi al centro descriveva ciascuno una spirale. Osservate la leggiadria della triplice ristrettissima spiegazione. La cera in I° luogo già caduta al fondo era specificamente più grave dell'acqua. Come più grave contraeva maggior forza centrifuga per allontanarsi dal centro, e quindi accorreva a' lati del vaso. Eccovi la ragione del primo fenomeno. Arrestato in II° luogo il moto del vaso, ma non dell'acqua, i pezzetti di cera più gravi, e più scabri più presto dovean perdere la forza centrifuga di quello che potesse far l'acqua. Dunque allor l'acqua più robusta cacciar dovea di luogo la cera per appoggiarsi essa alle pareti, e spinger questa nel mezzo; come i grani fan colle buccie, e colle paglie. E questa è pur la ragione del secondo fenomeno. Nel portarsi in III° luogo i pezzetti di cera al centro, traversar doveano zone d'acqua, che rotavansi orizzontali colle particelle loro, e più, o meno, quanto più, o meno distavan dal centro. Nell'atto dunque che direttamente spingevansi al centro, raccoglievan dalle zone che traversavano, moti di rotazione. Da questi due moti composti nasce, come già sapete, la spirale. Ed eccovi la ragione anche del terzo fenomeno. Io vi acerto, o Signori, che la spiegazione di questi tre fenomeni è così rapida, che non eccede in lunghezza il racconto, che di essi tesse Hugenio. Questo eccellente uomo trova simile il fenomeno natogli dal rotarsi corpi più gravi entro un fluido, a quello avvenuto a Cartesio, che facendo girare pur orizzontalmente in un vaso molte palline di piombo con limatura di legno, questa fu confinata da quelle nel mezzo del vaso. La ragione n'è la medesima, che ne' grani colle paglie, e nell'acqua prevalente alla forza de' minuzzoli della cera spagna. Ne vuole però avvertiti Hugenio, difficilmente aver luogo il fenomeno, quando non percotansi di continuo le pareti del vaso, affine di dividere, e staccare l'una dall'altre le materie, che vi si aggirano. I fenomeni, che in II° luogo vi ho proposti de' fluidi, che ruotano verticalmente con corpi di diversa gravità, presentanci da Bulfingero nella sua dissertazione de caussa gravitatis physica coronata dalla Reale Accademia di Parigi. Fe rotare Bulfingero sull'asse orizzontale, come a un di presso si fa girare il globo della macchina elettrica, una sfera di vetro quasi tutta ripiena d'acqua in cui posta avea alquanta limatura di ferro. Nel rotarsi orizzontalmente la sfera, il fluido dovea rotarsi verticalmente. Varj fenomeni ne risulterone.

Scelgo que' soli, che dipendono dalla forza centrifuga. La limatura in I° luogo formò come un equatore, o sia una fascia sull'interna superficie del globo equidistante dai poli, sui quali questo aggiravasi, e perpendicolare all'asse orizzontale della rotazione. L'aria in II° luogo, che stanziava in grossa bolla alla sommità del globo, quando rimaneva quieto; al raggirarsi di questo, concentrossi attorno l'asse di rotazione divisa in piccole bollicine. Queste bollicine formaronsi in III° luogo in un cilindro, il cui asse era l'asse stesso della rotazione, ma tenevan con seco da principio avviluppata molt'acqua, dalla quale in progresso liberatesi, ritrassersi in forma cubica al centro del globo rotante. L'Abate Nollet ripetendo lo stesso sperimento pose olio di trementina ad occupare il sito, che teneva l'aria. Quello come più leggiero galleggiava al di sopra dell'acqua, come l'aria di Bulfingero. Nollet ottenne gli stessi fenomeni, e l'olio seguì le traccie stesse dell'aria nell'altro sperimento. La mia spiegazione però si acconcerà all'uno, e all'altro. La limatura in I° luogo come più pesante dell'acqua discesa era, non v'ha dubbio, alla parte infima del globo. Al rotarsi di questo sull'asse orizzontale, la limatura, che toccava immediatamente il vetro posandovi sopra, contrar dovea la prima dal vetro girante il moto di rotazione verticale, indi quell'altra limatura, che succedeva alla prima ad appoggiarsi alla parte infima del globo. Acquistata l'una, e l'altra la forza centrifuga dal moto del globo, siccome più pesanti dell'acqua, d'una maggior forza erano animate, che l'acqua stessa, e quindi dovean tendere al maggior circolo, escludendone l'acqua di minor forza, perché men grave. Il maggior circolo trovavasi appunto nell'equatore del globo. Dunque per la prevalente forza dovea la limatura disporsi in fascia, o zona circolare all'equatore del globo, perpendicolare all'asse orizzontale del globo girante, escludendone l'acqua, e in fascia tanto più grande, quanto più abbondasse la limatura. Così il primo fenomeno non può ricevere più nitida e facile soluzione. L'aria in II° luogo, o l'olio di trementina, che galleggiavano alla sommità del globo anzi pure dell'equatore di esso, dovetter prima balzarsi di sito dalla limatura, che agognò a quel posto, e perseguirsi poi dall'acqua ne' circoli prossimi all'equatore. Sconcertata l'aria da tali forze, e tanto superiori lasciavasi da esse scompartire in quante bolle la volevan ridotta i suoi persecutori. Assalita però eziandio in ciascuna bolla dalle zone roteanti dell'acqua, ceder dovea il campo di battaglia, e prender la ritirata a poco a poco al centro delle zone stesse, e all'asse del rotamento, ove il fluido loro inimico poteva meno, perché ivi menomi erano i suoi giri e le sue forze. Così le bolle sempre più bersagliate nella lor fuga, nel ricoverarsi all'asse della rotazione, ove quasi in sicura trincea trovavansi al coperto dell'assalto

nimico; dovevano appunto squadronarsi in cilindro attorno di esso, miste a piccole particelle d'acqua, che tra i lor volumi avviluppatele traeansi nella lor fuga dietro prigioniere. Che se l'acqua assalitrice accresciuta di forze per una maggior rotazione data al globo, movea alle bolle dell'aria, o dell'olio un nuovo assalto; restringevansi queste nel loro trinciamento all'intorno dell'asse di rotazione quel tanto che bastava a sottrarle alla maggior furia dell'attacco; in luogo cioè, ove ancor meno l'acqua si aggirava. Se infine astrette erano a sloggiarne dal prepotente moto dell'acqua; allora serrandosi tra loro vie maggiormente, e dando libertà alle imprigionate particelle acquee per restringersi di volume; componevansi per ultimo scampo in un nocciolo cilindrico, e in mezzo alla sfera appostavansi protette al di sopra dalla ferrea fascia delle limature. Non milita soltanto negli eserciti la scienza delle ritirate. La natura insegna l'arte di eseguirle, se sapessero studiarla. Aggiunge l'Abate Nollet, che se inchiudasi nel globo coll'acqua girante una pallottola di cera; questa al nascere della rotazione scende a poco a poco verso l'asse orizzontale del globo, e del moto rotatorio, e a qualunque punto dell'asse pervenga discendendo, ivi gettasi essa pure a girare senza propender nullo né al centro né ai poli del globo. Che se poi l'asse di rotazione non tengasi esattamente orizzontale, ma elevato da alcuna parte, e quindi obbliquo all'orizzonte, come porta il terzo genere degli sperimenti, che sonomi proposto a dilucidarvi; la palla allora a qualunque punto appostisi dell'asse in discendendo; arrampicasi poi lungo l'asse medesimo al polo più elevato. Ad ottenere, che piuttosto discenda al polo più depresso, forza è render la palla più greve d'ugual volume acqueo con parte di piombo infusavi in seno. Se raggunisi similmente nel girar dell'acqua alcuna bolla di quell'aria, che va sparsa per gl'interstizj dell'acqua; accorre questa pure al polo di rotazione più elevato. L'eleganza di questi sperimenti sta attendendo la spiegazione. La palla di cera men pesante dell'acqua dee premersi dalla maggior forza centrifuga dell'acqua al centro di quel qualunque circolo parallelo all'equatore, in cui scontrisi, come le bolle aeree, o come l'olio di trementina. Vero è che l'eccesso della gravità dell'acqua sopra la cera sospinge la palla all'insù verso la superficie del globo; ma questo impulso vinto è dalla centrifuga dell'acqua troppo superiore di possa. Non ostante adunque la maggior leggerezza della palla, dee questa confinarsi all'asse di rotazione. Ivi, stando l'asse orizzontale non è spinta la palla che all'insù per la sua leggerezza, e tenuta obbligata al tempo stesso al basso, dalla forza maggiore centrifuga dell'acqua, che agisce direttamente contro la forza, che la solleva. Non sentendosi spinta la palla da niun altro lato, arrestasi a quel punto dell'asse, a cui fu depressa, rotando

semplicemente intorno ad esso per la forza impressavi dalla rotazione dell'acqua. Questa è la soluzione del primo fenomeno, non men di esso a mio parere elegante. Che se l'asse di rotazione inclini con angolo sensibile all'orizzonte, dovrà la palla più leggiera dell'acqua, e più ancora qualunque bolla aerea poggiare al polo elevato dell'asse. Se la palla al contrario rendasi più grave discendere al polo depresso. Imperocchè da una parte la forza centrifuga non oppone niuna resistenza alla palla nella direzione dell'asse, attorno a cui volgesi l'acqua, e il globo, non dispiegando lungo l'asse niuna forza. Infatti si mantiene la palla rotando pacificamente in qualunque punto di esso, ove venga abbassata. Dall'altra parte la forza dell'acqua, che sospinge la palla allo insù per la prevalente gravità specifica, non è più perpendicolare all'asse, quando questo è inclinato all'orizzonte, come perpendicolare vi è sempre la forza centrifuga. Spingendosi allora adunque obbliquamente la palla all'alto dall'eccesso del peso d'un ugual volume di fluido circostante, e non contrastandovi la forza centrifuga dell'acqua nella stessa direzione, può e deve la palla poggiare verso il polo elevato di rotazione, tenendo però la via dell'asse stesso sempre più sgombra di resistenza. Così l'eccesso di gravità nella palla renduta più pesante col piombo intrusovi, d'un ugual volume di fluido, deve trarre la palla stessa a calarsi al polo più depresso. Non vi stancherò, o Signori col racconto delle vecchie spiegazioni. O queste mancano al tutto, o sono così involute, che non è possibile seguirne l'orme ascoltando per qualunque sforzo di attenzione, che vi si adoperi. Contentatevi per ultimo, ch'io vi faccia vedere l'intralcio terribile della vecchia spiegazione sul fenomeno de' corpi, che posano sulla superficie d'altri corpi rotanti, come in ultimo luogo debbo esporvi. Scelgo il fenomeno de corpi, che girano sulla superficie della terra nel suo moto diurno. Per questa rotazione terrestre, oggi è oramai fuor di dubbio, che qualunque corpo pesa meno all'equatore, che in qualunque parallelo, come a cagion d'esempio al parallelo di Mantova, lontano 45° poco più, e meno anche in Mantova, che a Pietroburgo, il cui parallelo dista dal nostro 15°. Poiché, ecco ciò che una volta dicevasi, armatevi di sofferenza. Poiché la direzione della gravità de' corpi, che tendono al centro della terra è obliqua ne' circoli paralleli all'equatore, e tanto più obliqua, quant'essi dall'equatore si scostano, e si approssimano al Polo, e si esercita oltre a ciò in un piano da essi diverso, dirigendosi la gravità per un piano, che passa pel centro dell'equatore, laddove il piano de' circoli paralleli è perpendicolare al punto dell'asse della terra, che loro corrisponde; per ciò è, dicevasi, che la gravità per esempio di un sasso in qualche circolo parallelo, che descrivesi nel moto Diurno della terra attorno a se stessa; per

ciò è, io dissi, che la gravità del sasso deve risolversi in due parti giusta il costume. E prega a considerar quella di queste due parti, che impiegasi a ritenere il sasso girante colla terra nel suo circolo; questa pure in altre due forze è a risolversi, perché essa pure è obliqua ai circoli paralleli, e in diversi piani. Una di queste due ultime forze già risolte trovasi nel piano de' paralleli, l'altra fuor d'esso, ma perpendicolare al piano. Or la parte sola della gravità, che trovasi nel piano, quella è che impiegasi a ritenere il corpo nel circolo, e che si dice centripeta. Essendo dato il circolo di ciascun parallelo, è dato il raggio eziandio, dunque ancor la forza necessaria a ritenere il sasso nel suo circolo, dunque ancor la perpendicolare al piano del circolo. Dunque la prima delle due parti, nelle quali fu divisa la gravità primitiva del sasso, ne è già conosciuta. Or sottraendo questa dalla gravità stessa primitiva, ne risulterà l'altra seconda parte della gravità. Non vi stancate, vi supplico, Accademici Ornatissimi Sostenete ancor per poco. Il fenomeno non è ancora spiegato col ritrovamento di quella parte di gravità, che ci è comparsa dal calcolo. Convien cercare di più la potenza premente. A dedur questa, or è forza comporre la seconda parte di gravità già trovata con quella, che è perpendicolare al piano del circolo parallelo. L'equivalente a queste due forze composte sarà la potenza premente, che esprimerassi dalla diagonale di un parallelogrammo, i lati de' quali siano le due forze, che compongonsi. Or eccoci alla risoluzione. Ma questa potenza così composta è sempre maggiore ne' paralleli più distanti dall'equatore, come appare poi di leggieri. Dunque è maggior la potenza premente ne' circoli paralleli, più che si scostano dall'equatore. Dunque lo stesso sasso deve pesar più a Pietroburgo, che a Mantova, e a Mantova più che all'equatore. S'io non sono riuscito intelligibile, o Signori in questo raziocinio, non ne ho punto rossore, e quasi me ne compiaccio. So bene che non può ascriversi a colpa della mia esposizione, ma bensì dell'inviluppo delle cose, che ho dovuto svolgere. Ho dovuto dividere la gravità primitiva del sasso in due parti; una di queste risolvere in altre due, e indi comporre la seconda di queste colla seconda parte della gravità. Or voglio compensarvi con altrettanto piacere della noja, di che sento avervi colmati sotto la vecchia spiegazione. Presentovi col mezzo della forza centrifuga spiegato il fenomeno in brevi tratti, e all'ultima evidenza. Sotto l'equatore descrive il sasso un maggior circolo nel diurno moto della terra, che in Mantova. Essendo la forza centrifuga in ragion de' raggi de' circoli descritti, stando l'altre cose pari, sarà investito il sasso all'equatore di maggior forza centrifuga che a Mantova, e molto più che a Pietroburgo. Dunque una maggior forza di gravità all'ingìù nel sasso viene elisa dalla

centrifuga all'Equatore, che a Mantova, e qui più, che a Pietroburgo. Ma quella porzion di gravità che si elide non preme. Dunque una maggior parte di gravità nel sasso non preme all'equatore, che a Mantova, o a Pietroburgo. Dunque il sasso men pesa all'Equatore, che a Mantova, e meno qui che a Pietroburgo. Non ho intralasciata niuna idea intermedia per abbreviarvi il mio discorso. Io l'ho difuso in tutta la sua ampiezza. Per questa minor gravità all'equatore, la terra deve esser colà più elevata come lo è in fatti che ai poli. Non son pago però se non vi fo comprendere tutta la finezza di questo metodo. Quantunque sia minore, come vi ho mostrato, la forza centrifuga ne' circoli paralleli all'equatore, che all'equatore stesso; riflettete di più, che non tutta in essi, come all'equatore, non impiegasi a distrarre la gravità dalla sua tendenza al centro della terra. Imperocché ed è colà obliqua alla tendenza di gravità, ed è in diverso piano, come di sopra si è dichiarato. Per iscoprir dunque quella parte di centrifuga, che opponsi alla gravità, risolvesi in due forze. Ma tosto che ne' circoli paralleli ha da risolversi in due la centrifuga; certo è, che minor sarà in essi la parte, che toglie alla gravità, e tanto minore, quanto la linea rappresentante questa parte facciasi più breve. Dunque ne' circoli paralleli la centrifuga minore che all'Equatore, agisce anche meno ad elidere la forza di gravità, e tanto meno, quanto più obliqua alla direzione della gravità. In questo discorso non vi ha che una semplice risoluzione di forze, e nell'antico ben due, ed una composizione. Quale è, o Signori, più semplice, quale più chiaro, e persuadente? Non avrò io dunque ragione di sostenere il metodo della forza centrifuga, sebbene forza immaginaria, nel senso da me stabilito nella prima dissertazione, molto utile alla fisica. Se per esso intendiamo ciò, che per altra guisa ci è sparso di molte tenebre; ci si fa chiara la sua utilità. Se per esso giugniamo facilmente a dichiarare ciò che fuor d'esso è inesplicabile, o incomprensibile; ci si mostra eziandio la quasi necessità. I Maestri dell'arte infatti tutti oggimai, e l'hanno adottato ed esteso alla spiegazione de' più interessanti problemi della fisica e dell'Astronomia. Di questi non ho parlato, perché troppo conosciuti. Ho stimato di farvela veder utile anche ne' più piccoli fenomeni, perché riconosciate la sua utilità nelle somme, e nelle infime opere di natura e dell'arte. Avete veduti interpretati i fenomeni de' fluidi e degli ammassi de' solidi, che ruotan I° paralleli, poi perpendicolari, e in III° luogo obbliqui all'orizzonte con corpi, or più leggieri, or più gravi intermisti, e infine il gran fenomeno de' solidi, che posano alla circonferenza de' globi rotanti, e ciò a fronte delle vecchie interpretazioni. Così spero d'aver compiuta la materia propostavi altra volta, e di essermi sciolto dalle promesse, che ho sembrato forse aver dimenticate.