

RATIO

mathematica

Journal of Foundations and Applications of Mathematics / Rivista di Fondamenti e Applicazioni della Matematica

CHIEF EDITOR

Franco EUGENI

Department of Communication Science/ University of Teramo /Italy/

ADVISORY EDITORS

Luciano D'AMICO/ Department of Communication / Science University of Teramo/ Italy

Antonio MATURO/ Department of Social Science / University of Pescara/ Italy

Ioan TOFAN/ Department of Mathematics/ University of Iasi / Romania

EDITORIAL BOARD

Albrecht Beutelspacher/Department of Mathematics/University of Giessen/Germany

Piergiulio Corsini/Department of Mathematics/ University of Udine /Italy

Ball Khishan Dass/Department of Mathematics/University of Dehli/India

Mario Gionfriddo/Department of Mathematics/University of Catania/Italy

Fabio Mercanti/Department B.E.S.T./ "Politecnico" of Milano/Italy

Renato Migliorato/Department of Mathematics/University of Messina/Italy

Consolato Pellegrino/Department of Mathematics/University of Modena e Reggio/Italy

Aniello Russo Spena/Department of Hydraulics/University of L'Aquila/Italy

Maria Scafati Tallini/Department of Mathematics/University of Roma /La Sapienza Italy

Luca Tallini/Department of Communication Science/University of Teramo /Italy

Horia Nicolai Teodorescu/Dept. of Applied Electronics and Intelligent Systems/Iasi/Romania/

Thomas Vouglouklis/Department of Mathematics/University of Alexandroupolis/Greece

16/05

ISSN: 1592-7415

I Numeri Reali

Franco EUGENI, Daniela TONDINI, Annamaria VICECONTE

Department of Communication Science, University of Teramo.

e-mail : {eugeni, dtondini}@unite.it

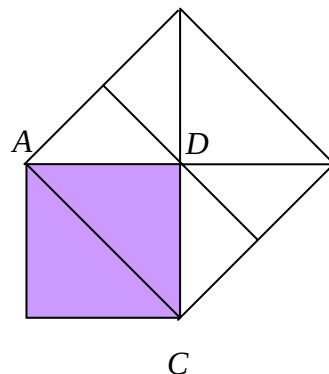
1. Il grande problema dei Pitagorici e la "maledizione" di Ippaso.

FIN DAL VI SECOLO A.C., ANCHE SE CON MODALITÀ LOGICHE DIFFERENTI E CON UN SIMBOLISMO MOLTO DIVERSO DALL'ATTUALE, IL CAMPO DEI NUMERI RAZIONALI SI POTEVA CONSIDERARE OPERATIVAMENTE CONQUISTATO. NATURALMENTE L'USO DEI NUMERI RAZIONALI VENNE RIVOLTO ALLA GEOMETRIA ALLO SCOPO DI COSTRUIRE UNA TEORIA DELLA MISURA PER I SEGMENTI.

La Scuola Pitagorica (VI sec. a.C.) che operava a Crotone propose una teoria della misura molto semplice, basata sulla seguente assunzione arbitraria:

"ogni segmento contiene un numero infinito di punti"

Allora se il segmento AB ha m punti e il segmento CD ha n punti la misura di AB rispetto a CD è m/n . L'ingenua soluzione dei Pitagorici portava facilmente ad un assurdo. Infatti se si considera un quadrato e la sua diagonale, è di immediata verifica, anche sperimentale, che il quadrato costruito sulla diagonale si ripartisce in quattro mezzi - quadrati, tali che:



$$(1) \quad AC^2 = 2AB^2$$

B

Da questa relazione segue che la teoria dei Pitagorici è falsa!

Infatti, ammessa la teoria della misura dei Pitagorici, si avrebbe che $\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$,
cioè:

$$(2) \quad m^2 = 2n^2$$

che è certamente falsa. Infatti è falsa se m è dispari, essendo il secondo membro pari.

Quindi m deve essere pari ed n dispari altrimenti $\frac{m}{n}$ si potrebbe semplificare.

Posto allora $m = 2a$, si ha:

$$4a^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2a^2 \quad \text{ancora assurda per essere } n \text{ dispari ed il}$$

pari

La conseguenza che ne risulta è che vi sono due tipi di coppie di segmenti.

Vi sono coppie di segmenti AB e CD che sono confrontabili, nel senso che il segmento, ad esempio, CD è m volte la n -sima parte del segmento AB .



cioè: $CD = \frac{m}{n} AB$. In tal caso AB e CD si dicono *commensurabili*.

Vi sono però coppie di segmenti per le quali un siffatto confronto non si può fare; un esempio è rappresentato appunto dal lato e dalla diagonale di un quadrato dato per i quali una siffatta relazione non può essere scritta. Coppie siffatte si dicono *incommensurabili*.

La scoperta dei Pitagorici riguardò dunque l'*incommensurabilità*.

Tale scoperta si tenne segreta a lungo, ma Ippaso da Metaponto (Crotone), che sembra fosse un Pitagorico fuoriuscito, la rivelò a Platone, che da buon pettegolo quale era, la diffuse nel modo scientifico di allora. Fu da allora che Ippaso venne maledetto. Notizia di tale maledizione ci giunge dal X libro di Euclide, comunemente attribuito a Proclo:

"È fama che colui il quale per primo rese di pubblico dominio la teoria degli irrazionali sia perito in un naufragio, ciò perché l'inesprimibile e

l'inimmaginabile avrebbero dovuto essere sempre celati. Perciò il colpevole, che fortuitamente toccò e rivelò questo aspetto delle cose viventi, fu trasportato al suo luogo d'origine e viene in perpetuo flagellato dalle onde".

Non sappiamo bene a chi si deve la prima trattazione dei numeri irrazionali; molti la fanno risalire a Eudosso di Cnido (IV sec. a.C.) al quale si attribuisce solitamente la stesura del Libro V degli "*Elementi*" di Euclide, il più ammirato dell'opera euclidea. Tale libro, sotto l'apparenza di una teoria generale delle frazioni, fornisce una teoria generale delle grandezze commensurabili e non. Nei libri aritmetici di Euclide, dal VII al IX, non si parla degli irrazionali quadratici, menzionati solo nel X.

Tuttavia la questione degli irrazionali rimase oscura per molti secoli, certamente fino a Luca Pacioli (1445-1517) e dopo di lui se ne occuparono a fondo Michael Stiefel (1486-1567), Gerolamo Cardano (1501-1576) e Simon Stevin (1548-1620) tanto per citare i primi.

2. I nuovi numeri (maledetti dai Pitagorici): i numeri reali.

I numeri scoperti dai Pitagorici nei due secoli successivi, derivanti dall'uso del teorema di Pitagora, furono i soli *radicali quadratici*.

In questo paragrafo vogliamo ampliare il campo dei razionali in una nuova struttura, quella dei numeri reali.

Denotiamo con $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali.

È ben noto che con il metodo delle divisioni successive ogni numero razionale si può esprimere come un'espressione decimale periodica.

Esempi.

$$\frac{1}{2} = 0,5(0)$$

$$\frac{4}{3} = 1,(3)$$

$$\frac{7}{6} = 1,1(6)$$

Le espressioni date indicano ordinatamente un decimale finito (0-periodico), un decimale con un solo periodo dopo la virgola, un decimale con antiperiodo e periodo. Questo si evince dal fatto che nel denominatore della frazione, ridotta ai minimi termini, ci sono, nel primo caso, solo divisori del 10, nel secondo caso nessun divisore del 10, nel terzo caso infine sono presenti sia divisori del 10 (nel caso è 2) che non divisori del 10 (nel nostro caso 3).

Ricordiamo che è sempre facile risalire da una rappresentazione decimale periodica alla corrispondente frazione generatrice.

Esempi.

$$213,553(0) = \frac{213553}{1000}; \quad 511,(53) = \frac{51153 - 511}{99};$$

$$51,34(123) = \frac{5134123 - 5134}{99900}$$

Le regole di passaggio dai decimali alle frazioni generatrici, del resto evidenti dagli esempi, non si ritiene di doverle enunciare in questa sede. (Una regola che utilizza uno strumento matematico per fare alcune somme infinite: la serie geometrica, utilizzabile per una spiegazione di queste formule delle frazioni generatrici è riportata inell'Appendice 2).

Consideriamo ora, da un punto di vista puramente formale, una scrittura del tipo:

$$\begin{aligned} &2,3132121 \dots \\ &15,1231411 \dots \\ &a, a_1 a_2 a_3 \dots \end{aligned}$$

Si tratta di semplici scritture nelle quali i termini dopo la virgola ... *non presentano alcuna caratteristica di periodicità* ...

Una vasta classe di numeri di questo tipo si rappresenta facendo ricorso ai cosiddetti "**radicali**".

Sia a un numero reale positivo - *che chiameremo **radicando***. Si dimostra che esiste sempre uno ed un sol numero reale b , positivo - *che diremo **radicale*** - tale che $b^n = a$.

L'intero b così introdotto si chiama *radicale n -simo* ovvero *radice n -ma aritmetica* di a , e si denota con:

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{ovvero con il simbolo} \quad a^{\frac{1}{n}}$$

La teoria dei radicali insegna a moltiplicare tra loro espressioni di questo tipo ed in generale ad operare su espressioni conteneti radicali.

Nella storia del mondo matematico si sono spesso presentate situazioni di questo tipo specie in relazione a particolari operazioni che escono decisamente dal mondo razionale delle quattro operazioni. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1. In primo luogo presentiamo una successione di cifre chiaramente non periodiche e costruibili secondo una regola precisa :

$$N = 0,12345678910111213141516171819202122232425 \dots$$

(nel quale i numeri dopo la virgola sono la successione dei naturali).

Esempio 2. Una seconda successione di cifre, banalmente non periodiche, certamente interessanti, sono quelle del numero:

$$q = 0,101001000100001 \dots$$

la cui regola di formazione è evidente.

ESEMPIO 3. UN ALTRO ESEMPIO ESEMPIO È LA LUNGHEZZA DELLA DIAGONALE DEL QUADRATO UNITARIO DENOTATA CON $\sqrt{2}$. ABBIAMO OSSERVATO COME $\sqrt{2}$, NON ESSENDO UNA FRAZIONE – ALTRIMENTI SAREBBE $M^2 = 2N^2$ – NON PUÒ ESSERE ESPRESSA DA UNA RAPPRESENTAZIONE PERIODICA. QUESTO A PRIORI NON DISSE AL TEMPO CHE $\sqrt{2}$, POSSEDESSE UNA RAPPRESENTAZIONE APERIODICA, LA COSA VENNE SCOPERTA CON L’ALGORITMO DI ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA.

Nel I secolo venne scoperto un algoritmo di estrazione di radice quadrata, con un procedimento che non ha termine, e che non dà luogo a periodicità. Mediante questo algoritmo si hanno le prime 15 cifre decimali aperiodiche del numero irrazionale:

$$\sqrt{2} = 1,41421 \ 35623 \ 73095 \ 04880 \ 16887 \ 24209 \ 69807 \ 85697 \dots$$

È interessante la regola di Teone di Smirne (125 a.C.) asserente che se $\frac{a}{b}$ è un'approssimazione di $\sqrt{2}$ allora $\frac{a+2b}{a+b}$ è un'approssimazione migliore. Così una buona sequenza di frazioni che approssimano è la seguente:

$$\frac{1}{1}=1; \frac{3}{2}=1,5; \frac{14}{10}=\frac{7}{5}=1,4; \frac{34}{24}=\frac{17}{12}=1,41(6); \frac{82}{58}=\frac{41}{29}=1,41379;$$

$$\frac{99}{70}=1,4142857 \dots; \frac{239}{169}=1,4142011; \frac{577}{408}=1,4142156 \dots$$

Nota storica. Le prime tracce dell'algoritmo di estrazione si trovano in un commento (del I secolo) del *Chiu-chang suanshu* (ovvero: nove capitoli sull'arte matematica. Il , risale al 250 a.C.) forse la più influente fra le opere matematiche cinesi, assieme al *Chou Pei Suan Ching* (1200 a.C.), che si occupa di corpi celesti e misura del tempo.

Per tornare al discorso generale, ogni scrittura del tipo

$$a, a_1 a_2 a_3 \dots$$

si chiamerà *numero reale*. Se poi la sequenza dopo la virgola è **periodica** il numero reale si dirà **razionale** e – seguendo le note regole – potrà essere scritto utilizzando anche la sua frazione generatrice. Se invece, come nel caso dei due esempi precedenti e in quelli subito che seguono, la sequenza dopo la virgola è **aperiodica**, allora il numero reale si dirà **irrazionale**. Questo è il caso del numero q dell'esempio 1, chiaramente irrazionale ma anche del numero simbolicamente indicato con $\sqrt{2}$.

L'insieme dei numeri reali (ovvero degli allineamenti decimali pensati come oggetti) si denota con $\mathbb{R}$.

Nota storica. L'espressione "numerus irrationalis" è stata introdotta da Gerardo da Cremona (1114–1187); altri contributi nel lento progredire della teoria relativa agli irrazionali si hanno da parte di Luca Pacioli (sec. XV), M. Stiefel, Cardano e Stevin (XVI). Le classi contigue sono state introdotte da Capelli (1897) e la sistemazione rigorosa è dovuta a Weierstrass, Dedekind e Peano in pubblicazioni più o meno contemporanee e più o meno equivalenti. Nel linguaggio comune la parola *irrazionale* fa pensare a qualcosa oltre la ragione e questo termine allora, imposto dalla storia e dall'uso, sta ad indicare la meraviglia dei Greci all'atto della loro scoperta.

Continuiamo ora l'esame di questi oggetti presentando alcuni numeri irrazionali che presentano un interesse notevole in tutto il corso dell'evoluzione della matematica: il numero π , il numero e (base dei logaritmi naturali), il numero Φ legato alla sezione aurea.

Esempio 4. In questo esempio trattiamo il numero π , del quale indichiamo le prime 30 cifre decimali,

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 33846\ 26433\ 83279 \dots$$

Questo numero, geometricamente, esprime ... *il rapporto della lunghezza di una circonferenza al suo diametro* ... La lettera π è l'iniziale sia della parola *περιφέρεια* (periferia) che della parola *περιμετρος* (perimetro) collegate idealmente con la lunghezza della circonferenza.

La seguente tabella prova come il miglioramento delle approssimazione di questo oggetto irrazionale vada più o meno di pari passo con la storia del mondo.

$\pi = 3$ (Bibbia, Talmud, tradizione antica)

$\pi = \frac{49}{16} = 3,0625$ (Bodhaiana, India, 200 a.C.)

$\pi = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \mathbf{3,1\ 604}$ (Egiziani, *Amhes* – in *Paphirus Rind* –1650 a.C.)

(Henry Rind è lo scopritore del papiro (30cm. per 5,46m.) nel 1858 e Amhes l'esecutore della trascrizione nel 1650 a.C. – *London, British Museum*)

$\pi = \sqrt{10} = \mathbf{3,162277}$ folclore

$\pi = \frac{92}{29} = 3,17$ folclore

$\pi = \frac{142}{45} = 3,155555$ folclore

$\pi = \frac{157}{50} = \frac{314}{100} = 3,14$ (Cinesi, desunto da opere arabe)

$\pi = \frac{377}{120} = 3\left(\frac{17}{20}\right) = \mathbf{3,141\ 666}$ Valore tolemaico (Tolomeo, 200 d.C., 250 a.C.)

$\pi = \frac{22}{7} = \mathbf{3,142}$ valore di Archimede (250 a.C.) e dei cinesi

π tra $3 + \frac{10}{71} = \mathbf{3,140845}$ e $3 + \frac{10}{70} = \mathbf{3,1428571}$ (limitazioni di Archimede)

$\pi = \frac{142}{45} = \mathbf{3,1555}$ (Wang Fan, Cina, 256 d.C.)

$\pi = 3,14$ da un poligono di 96 lati (Cina, Liu Hui, Cina, 300 d.C.)

$\pi = 3,14159$ da un poligono di 3072 lati (Cina, Liu Hui, Cina, 300 d.C.)

$\pi = \frac{355}{113} = \frac{377 - 22}{120 - 7} = \mathbf{3,14159292}$ (Tsu Ch'ung-Chih 470 d.C.)

si sottrae membro a membro il valore tolemaico dall'archimedeo

$\pi = \mathbf{3,1415927}$ (ancora Tsu Ch'ung-Chih, Cina, 472 d.C.) ...calcoli

$\pi = \frac{3227}{1250} = \mathbf{3,1416}$ (Bhaskara, India, 1150)

$\pi = \mathbf{3,14159265\ 589793}$ (Al Kashi, 1400) ... calcoli

π con 100 cifre decimali (Shanks, 1871) ... calcoli

π con 707 cifre decimali (Shanks, 1873) ... calcoli

Il famoso matematico indiano Srinivasa Ramanujan (India, 1900), diede varie approssimazioni di π quali ad esempio le seguenti:

$$\pi = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = \mathbf{3,14159265 \underline{58}} \text{ (Snivasta Ramanujan, India, 1900)}$$

$$2\pi\sqrt{2} = \frac{99^2}{1103} \text{ (fornisce } \pi \text{ con nove decimali esatti)}$$

π con 100265 cifre decimali è stato calcolato al centro IBM di New York nel 1961, utilizzando IBM 70900 (8 ore e un minuto).

Nota storica. L'uso della lettera π sembra risalire al XVII secolo in *William Oughtred, The Key of Mathematics*, London 1647 e *Isaac Barrow, Mathematicae lectiones in scholis publicis*, Accademiae Cantabrigiensis, Londini, 1684. La usava W. Jones nel 1706, mentre Bernouilli usava la c, Eulero nel 1734 la lettera p e nel 1736 la c, ancora Cr. Goldbach nel 1732 usava di nuovo π che divenne simbolo universale dopo la pubblicazione dell'Analisi di Eulero.

Esempio 5. Il numero

$$e = \mathbf{2,7 \ 1828 \ 1828 \ 45904 \ 52353 \ 60287 \ 47135 \ 26624 \ 77572 \ 47093 \ 699 \dots}$$

è utilizzato come base dei logaritmi di Nepero. Un'approssimazione per le prime cifre è data da $\frac{878}{323} = 2,71826 \dots$

Facciamo un esperimento e calcoliamo i numeri del tipo (si possono collegare con la nozione di interesse composto):

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

con $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ Si ottiene:

$$e_1 = 2; e_2 = 2,25; e_3 = 2,369; e_4 = 2,441; e_5 = 2,48; \dots$$

continuando appare un numero che cresce verso il numero di prime cifre 2,71 ...
Possono essere trattate varie questioni tra cui, ad esempio, la catenaria.

Esempio 6. La sezione aurea: il numero

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09179\ 80576 \dots$$

Il numero, del quale sopra sono date le prime 50 cifre decimali, si chiama sezione aurea dell'unità e si indica con Φ , in omaggio allo scultore Fidia. Le proprietà di tale rapporto, come esempio per il lettore, vanno ricercate in una Enciclopedia, anche tenendo in conto le relazioni con l'Arte e l'estetica.

Esempi.

Alcuni radicali che sono numeri irrazionali sono i seguenti:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 69807\ 85697 \dots \\ \sqrt{3} &= 1,73205\ 08075\ 68877\ 29352\ 74463\ 41505\ 87236\ 6942 \dots \\ \Phi &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09179\ 80576 \dots \\ \sqrt{5} &= 2,23607\ 01708\ 49731\ 02419\ 14621\ 36995\ 06251\ 36663\ 04466\ 95796 \dots\end{aligned}$$

NUMERI PER I QUALI SI HANNO INDICAZIONI PARTICOLARI

Nel 1900 David Hilbert (1862-1943) al Congresso dei Matematici di quell'anno pose 23 famosi problemi rimasti irrisolti. Tra questi vi era il provare se

$$2^{\sqrt{2}} = 2,665144 \dots \text{ e } e^{\pi} = 23,14069\ 26327\ 79269\ 00572\ 9086 \dots \text{ risultavano o no trascendenti}$$

Lo studio della loro trascendenza (cioè soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti interi) proposta da David Hilbert (1862-1943) al Congresso dei Matematici del 1900, come settimo dei suoi famosi 23 problemi. Per il secondo la trascendenza fu provata nel 1929, per il primo nel 1930).

Il numero $e^{\frac{\pi}{2}} = 0,20787\ 95763\ 50761\ 90854\ 6955 \dots$ è irrazionale.

Il numero $\pi^e = 22,45915\ 77183\ 61045\ 47342\ 7152 \dots$ non si sa se è razionale o irrazionale.

Il primo dei due numeri sopra indicati eguaglia il numero i^i , dove i è l'unità immaginaria. La prova si fa facendo ricorso alla famosa :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

esprimente un bel legame tra e , π , l'unità immaginaria i , l'unità moltiplicativa 1 e lo zero!

Il simbolo γ denota il numero a cui tende la quantità $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ quando n tende a crescere indefinitamente. Fu introdotto nel 1781 proprio da Eulero – che ne calcolò pure le prime sedici cifre decimali – e studiato anche da Mascheroni. Talvolta γ viene detta costante di Eulero– Mascheroni. Una sua approssimazione è data da:

$$\gamma = 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 402431\ \dots$$

Allo stato attuale delle conoscenze non si sa se γ sia un numero razionale oppure irrazionale. Si sa solo che se fosse $\gamma = \frac{a}{b}$, allora sarebbe $b > 10^{10000}$!

Un'ultima questione è la seguente: come si fanno i calcoli con i numeri reali?

La risposta è semplice: di fatto non si fanno!

Immaginiamo di avere una espressione del tipo:

$$\frac{\pi - e + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cong \frac{3,14 - 2,71 + 1,41}{2,41} = 0,76$$

si pongono varie questioni:

- a) Il valore trovato è approssimato!
- b) Di quanto è approssimato: è maggiore o minore dell'espressione?
- c) Come si valuta l'errore commesso?

La teoria dei calcoli approssimati insegna a valutare gli errori che sull'espressione quando si approssimano le parti che la compongono.

Tuttavia spesso occorre prima delle elaborazioni lavorare sulle espressioni nelle quali i numeri che intervengono sono espressi o tramite radicali o tramite lettere che li indicano.

Questa parte di calcolo si effettua conoscendo due tipi di calcolo e precisamente:

- la teoria dei radicali
- il calcolo letterale

e di queste parti ci impadroniremo nei prossimi capitoli.

Appendice 1. – Alternativa mediante le classi contigue. –

Denotiamo con $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali.

Siano A e B due parti o classi di $\mathbb{Q}$ entrambe non vuote. La coppia (A, B) costituisce una coppia di classi *contigue* se:

(1) Proprietà di separazione. Comunque presi $a \in A$ e $b \in B$ risulta $a < b$.

(2) Proprietà di apertura. A non ha massimo, B non ha minimo.

(3) Proprietà di avvicinamento. Comunque preso un numero razionale $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Un numero razionale c è *elemento separatore* della coppia di classe contigue (A, B) se

- esso non appartiene ad alcuna delle due classi, cioè $c \notin A, c \notin B$;
- VALE LA SEGUENTE LIMITAZIONE:

$$\forall a \in A, \forall b \in B \quad \Rightarrow \quad a < c < b$$

L'elemento separatore di una coppia di classi contigue è **unico**.

Esempio 1.

Si consideri un qualsiasi numero razionale, ad esempio $\frac{4}{3}$. Quindi siano:

$$A = \left\{ x : x \in \mathbb{Q}, x < \frac{4}{3} \right\}$$

$$B = \left\{ y : y \in \mathbb{Q}, y > \frac{4}{3} \right\}$$

Per le classi A e B le proprietà (1) e (2) sono banalmente verificate. Per la (3) è sufficiente osservare che, se $\varepsilon > 0$ è un razionale arbitrario, è sempre possibile trovare un elemento di A appartenente all'intervallo $\left(\frac{4}{3} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{4}{3} \right)$ ed un elemento

di B appartenente all'intervallo $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3} + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ tali che la loro differenza sia minore di ε .

Quindi (A, B) è una coppia di classi contigue che ammette $\frac{4}{3}$ come **elemento separatore**.

Esempio 2.

Siano due classi così definite:

$$A = \{x : x \in \mathbb{Q}, x < 2\}$$

$$B = \{y : y \in \mathbb{Q}, y > 2\}$$

La proprietà (1) è verificata; infatti da $x \in A$ ed $y \in B$ segue $x < 2 < y$, cioè $x < y$.
 Le proprietà (2) e (3) si possono provare ma non sono immediate. Vale invece la pena osservare che, supposto che esista un elemento separatore c , non potrà mai risultare $c < 2$ oppure $c > 2$; quindi dovrebbe essere $c = 2$ con c razionale: assurdo!
 Di conseguenza la coppia (A, B) è una coppia di classi contigue che non ammette elemento separatore.

Dicesi **numero reale** una qualsiasi coppia di classi contigue.

Se la coppia di classi contigue (A, B) ammette un elemento separatore c (razionale) allora il numero reale (A, B) si dice **razionale** e si identifica con l'elemento separatore della classe stessa, ponendo:

$$c = (A, B)$$

Se la coppia di classi contigue (A, B) non ammette elemento separatore, allora il numero reale (A, B) si pensa come un nuovo oggetto, che amplia il campo razionale e viene detto numero **irrazionale**.

Ora è facile convincersi che tra l'idea di numero razionale/irrazionale introdotto come allineamento decimale e l'idea di numero razionale/irrazionale introdotto come coppia di classi contigue vi è un profondo legame come provato dal ragionamento che segue e dai successivi esempi.

Sia dato un numero reale rappresentato da:

$$a, a_1 a_2 a_3 \dots$$

dove a è un intero e $a_1, a_2, a_3, \dots$ sono cifre tra 0 e 9. Si suppone inoltre esclusa una rappresentazione eventuale con infiniti 9 sostituita da quella corrispondente con infiniti zeri.

Se si considera l'insieme A dei razionali del tipo:

$$a; a, a_1; a, a_1 a_2; a, a_1 a_2 a_3; \dots$$

e l'insieme B dei razionali del tipo:

$$a + 1; a, (a_1 + 1); a, a_1 (a_2 + 1); a, a_1 a_2 (a_3 + 1); \dots$$

la coppia (A, B) costituisce una coppia di classi contigue che definisce un numero irrazionale.

Considerato, come esempio,

$$q = 0,101001000100001 \dots$$

chiaramente non periodico, esso definisce un **numero irrazionale** che può ritenersi individuato dalle classi:

$$\begin{array}{lcl}
& 0; 0,1; 0,10; 0,101; 0,1010; \dots\dots\dots \\
\mathbf{A:} & 0; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{101}{1000}; \frac{1010}{10000}; \dots\dots\dots \\
\\
& 1; 0,2; 0,11; 0,102; 0,1011; \dots\dots\dots \\
\mathbf{B:} & 1; \frac{2}{10}; \frac{11}{100}; \frac{102}{1000}; \frac{1011}{10000}; \dots\dots\dots
\end{array}$$

Si può dimostrare che le classi (A, B) sono contigue.

Nota storica. L'espressione "numerus irrationalis" è stata introdotta da Gerardo da Cremona (1114-1187); altri contributi nel lento progredire della teoria relativa agli irrazionali si hanno da parte di Luca Pacioli (sec. XV), M. Stiefel, Cardano e Stevin (XVI). Le classi contigue sono state introdotte da Capelli (1897) e la sistemazione rigorosa è dovuta a Weierstrass, Dedekind e Peano in pubblicazioni più o meno contemporanee e più o meno equivalenti. Nel linguaggio comune la parola *irrazionale* fa pensare a qualcosa oltre la ragione e questo termine allora, imposto dalla storia e dall'uso, sta ad indicare la meraviglia dei Greci all'atto della loro scoperta.

Appendice 2.

Comunque le regole usate per giungere a tali relazioni sono strettamente connesse alla *serie geometrica*.

Se x è un numero razionale (o anche reale) tale che $0 < x < 1$, allora vale la seguente relazione, che noi non proviamo, richiedendo la prova delle conoscenze più avanzate di quelle possedute al momento attuale:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Mediante la formula sopra riportata si ha immediatamente:

$$\begin{aligned}
0,(9) &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{(10)^2} + \frac{9}{(10)^3} + \dots = \frac{9}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) = \\
&= \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1
\end{aligned}$$

La relazione " $0,(9) = 1$ " porta di fatto ad identificare $0,(9)$ con $1,(0)$ e quindi ad abolire quella scrittura che può essere chiamata "*scrittura degli infiniti nove ...*".

Come conseguenza, ad esempio, è immediato verificare che risulta:

$$12,31(9) = 12,32$$

Infatti:

$$12,31(9) = 12,31 + 0,00(9) = 12,31 + 0,01 = 12,32(0)$$

essendo appunto:

$$0,(9) = 1$$

$$0,09 = \frac{1}{10} 0,(9) = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$0,009 = \frac{1}{100} 0,(9) = \frac{1}{100} = 0,01$$

.....

Appendice 3. – Quanto sono infiniti i numeri irrazionali? –

Un insieme si dice numerabile quando non lo si può porre in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali. Proviamo che i numeri reali – anzi solo quelli tra 0 ed 1 – non si possono numerare!

Supponiamo, per assurdo di averlo fatto, allora avremo l'elenco che segue:

0, 77158964110

0, 3411080076

0, 561108065 ...

.....

il numero 0,abcd ... dove a diverso da 7, b diverso da 4, c diverso da 1, ... non è compreso tra quelli indicati nell'elenco. Un assurdo! Dunque i reali non sono numerabili!

Esercizi.

1. – (svolto) – Calcolare, con l'uso della serie geometrica, la frazione generatrice di $12,1(2)$. Si ha:

$$12,1(2) = 12,1 + 0,02 + 0,002 + \dots = \frac{121}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots = \frac{121}{10} + \frac{2}{100} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) =$$

$$= \frac{121}{10} + \frac{2}{100} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = \frac{121}{10} + \frac{2}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{121}{10} + \frac{2}{90} = \frac{121 \cdot 9 + 2}{90} = \frac{1091}{90} = \frac{1212 - 121}{90}$$

2. – Osservazione – Utilizzando l'appendice 2 si possono desumere le regole seguenti:

a) parte intera, $\text{antiperiodo}(0) = \text{parte intera} \cdot \text{antiperiodo} / 1$ seguito da tanti 0 quanto periodo;

- b) parte intera, antiperiodo(periodo) =

$$= \frac{\text{parte intera} \cdot \text{antiperiodo} \cdot \text{periodo}}{\text{periodo} \cdot \text{antiperiodo}} - \frac{\text{parte intera} \cdot \text{antiperiodo}}{\text{antiperiodo}} \cdot 9 \text{ quanto periodo}$$

 c) parte intera, (periodo) = $\frac{\text{parte intera} \cdot \text{periodo}}{\text{periodo}} - \frac{\text{parte intera}}{\text{antiperiodo}} \cdot 9 \text{ quanto periodo}$

3. – Applicare le regole 2 ai tre casi seguenti –

$$1,34; \quad 12,1(2); \quad 12,31(9)$$

4. – Verificare i calcoli nel seguente ragionamento – Dato il numero decimale come ad esempio 1,34 la sua frazione generatrice può essere calcolata in due modi.

Uno semplice è quello di scrivere $\frac{134}{100}$! (Regola a)).

Un secondo modo, più complicato, è quello di leggere $1,34 = 1,34(0)$ come un numero dotato di antiperiodo 34 e periodo zero. Occorre allora calcolare:

$$\frac{1340 - 134}{900}$$
 (Regola b)).

5. – Verificare le seguenti eguaglianze –

Si noti che se nel numeratore compaiono solo 2 ovvero 5 o entrambi il numero è decimale, se non compare 2 e nemmeno 5 allora è periodico semplice altrimenti periodico misto!

$$\frac{1}{2} = 0,5; \quad \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 0,015625;$$

$$\frac{1}{3} = 0,7; \quad \frac{1}{7} = 0,(142857); \quad \frac{1}{9} = 0,(1); \quad \frac{1}{11} = 0,(09);$$

$$\frac{1}{17} = 0,(0588235294117647): \text{ si osservi che, in tal caso, il periodo è lungo 16!};$$

$$\frac{1}{81} = 0,(012345679): \text{ si osservi che, in tal caso, tutte le cifre, ad eccezione del numero 8, sono nel periodo!};$$

$$\frac{1}{6} = 0,1(6); \quad \frac{1}{14} = 0,0(714285)$$

6. – Nota – La lunghezza massima del periodo del numero $\frac{1}{N}$ è data da $N - 1$

cifre, come si può vedere per $\frac{1}{7}$ che ha 6 cifre di periodo e per $\frac{1}{17}$ che presenta 16 cifre (cfr. Esercizio 5). Si sa ad esempio che :

$$\frac{1}{97} \text{ ha un periodo di 96 cifre, le cui prime sono: } \frac{1}{97} = 0,(010309278350515...)$$

$\frac{1}{1861} = 0,0005373\dots$ ha 1860 cifre decimali mentre $\frac{1}{17389}$ ne ha 17388.

Calcolare ora altre cifre di $\frac{1}{97}$ e $\frac{1}{1861}$!

(si noti che 97 e 1861 sono primi, per cui le due frazioni hanno periodicità semplice!)

7. – Verificare le seguenti eguaglianze scritte nel Papiro Rhind:

(nell'antichità vi era la tendenza ad usare solo frazioni dell'unità con l'unica eccezione di $\frac{2}{3}$, utilizzata dagli Egiziani)

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}; \quad \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}; \quad \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

7. – Verificare le identità seguenti –

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \dots$$

8. – Esercizio Facoltativo – Sapendo che, per definizione, valgono le seguenti relazioni:

$$0! = 1! = 1, \quad 2! = 2 \times 1; \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6; \quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \dots$$

$$N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

(il simbolo $N!$ fu introdotto nel 1808 dal tedesco Cristian Kramp in segno di stupore per la rapidità di crescita)

eseguire qualcuno dei calcoli seguenti:

$N! + 1$ è un quadrato per $N = 4, 5, 7$.

Per $N = 22, 23, 24$, $N!$ ha N cifre.

$$10! = 6! \times 7!; \quad 145 = 1! + 4! + 5!.$$

$$40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!.$$

9. – Rispondere seguendo il consiglio – Con quali numeri può terminare il quadrato di un numero intero?

(si considerino i quadrati delle 10 cifre: 0, 1, 2, ..., 9 cioè 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81).

10. – Un numero che termina con 2, 3, 7, 8 può essere un quadrato perfetto? Ed un numero che termina con 21?

11. – Tra due interi cade almeno un razionale? (Dove cade la media della somma, il terzo della somma, il quarto della somma e così via ...?)

12. – Tra due numeri razionali cade sempre almeno un irrazionale! Leggere almeno l'esempio che segue!

Tra $0,(1234) \dots$ e $0,(123513)$ cade ad esempio $0,\underline{1234}567891011\dots$ (tutti i numeri a partire da 5) che è certamente minore del secondo!

13. – Tra due irrazionali cade almeno un razionale (semplice!).

14. – Può accadere che la radice quadrata di un numero sia maggiore del numero dato? Se sì, fare un esempio.

15. – Dovendo estrarre la radice quadrata di 2500 si può estrarre la radice di 25 e poi aggiungere uno zero?

16. – Risulta $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$ Quanto vale il quadrato di 1,414213562? Perché è meno di 2?

17. – Dire tra quali interi sono comprese le radici quadrate di 21, 42, 73, 109? E le radici cubiche?

18. – Portare fuori dal segno di radice uno o più fattori:

$$\text{Esempio: } \sqrt{147} = \sqrt{3 \cdot 49} = \sqrt{3 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}$$

Applicare l'idea alle seguenti radici e ad altre simili:

$$\sqrt{28}; \quad \sqrt[3]{192}; \quad \sqrt[4]{162}$$

19. – Calcolare il prodotto: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$! Può dirsi che i due numeri sono uno l'inverso dell'altro?

CURIOSITÀ ED OSSERVAZIONI

1. – Il lettore si convinca che le relazioni sono giuste nonostante le semplificazioni errate!

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \text{ (ma non perché si semplifica il 6!!!);}$$

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5}; \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}; \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}; \quad \frac{16666}{66664} = \frac{1}{4}; \quad \frac{3544}{7531} = \frac{344}{731};$$

$$\frac{143185}{17018560} = \frac{1435}{170560}$$

2. – Il numero irrazionale $\log_2 2$, le cui prime cifre sono $\log_2 2 = 0,30102\ 99956\ 63981\ \dots$, moltiplicato per una potenza del 2 ne fornisce, in parte intera per eccesso, il numero di cifre decimali.

2^{127} ha 39 cifre decimali perché $127 \times 0,301 = 38,227!$

3. – Il 27^{mo} numero di Mersenne, scoperto da Gillies presso l'Università dell'Illinois nel 1963, fu celebrato con un famoso annullo postale con la scritta " $2^{11213} - 1$ is a prime", ...

4. – Il numero $2^{11213} - 1$ ha 3376 cifre decimali poiché $11213 \times 0,301 = 3375,773!$

(oggi il primato del mondo dei numeri di Mersenne è un numero con circa 4 milioni di cifre!)

5. – La sezione aurea può ottenersi da somme infinite

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Lambda}}}}$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \Lambda}}}}$$

le cui somme parziali sono : $1 - 2 - \frac{3}{2} = 1,5$; $\frac{5}{3} = 1,6$.

6. – I numeri π ed e possono ottenersi da :

$$\pi = 2 \times \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times L \times \frac{2a}{2a-1} \times \frac{2a}{2a+1} \times L L \right) = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right)$$

$$2 + e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + L L}}}}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} + \dots$$

7. – $\frac{878}{323} = 2,7182\bar{6}$ è la migliore approssimazione di e con un rapporto di tre cifre

(entrambi palindromici e di differenza 555), mentre $\frac{87}{32} = 2,718\bar{7}87/32 = 2,718\bar{7}$ è la migliore approssimazione di e con un rapporto di due cifre.

8. – Il numero $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ cresce molto rapidamente:

$$20! = 243290200817664000$$

e con buona approssimazione è dato da:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

9. – Secondo varie teorie gli atomi dell'universo sono tra 10^{80} e 10^{87} .

10. – Le miriadi secondo Archimede sono numeri dell'ordine di 10^4 .

11. – Tutte le volte che $\frac{1}{N}$ ha periodo massimo $N-1$ le cifre decimali dei numeri

dopo la virgola possono essere ordinate in un quadrato $(N-1) \times (N-1)$ che scritto interamente costituisce un quadrato semi-magico, nel senso che la somma

delle righe e delle colonne è una costante. L'esempio di $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}$ seguente è

ben chiaro. La somma delle righe e delle colonne è sempre 27. La somma della diagonale principale è 31 e quella della diagonale secondaria è 23.

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{7} = 0,(142857) \\
 \frac{2}{7} = 0,(285714) \\
 \frac{3}{7} = 0,(428571) \\
 \frac{4}{7} = 0,(571428) \\
 \frac{5}{7} = 0,(714285) \\
 \frac{6}{7} = 0,(857142)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{6}{7} \end{array}} \right\} \text{costante } 27$$

Se scriviamo i numeri che vanno da $\frac{1}{19}$ a $\frac{18}{19}$, ciascuno di essi ha periodo massimo lungo 18. Le cifre dopo la virgola possono essere ordinate in un quadrato 18×18 (del quale riportiamo le prime 7 righe) che scritto interamente costituisce un quadrato magico proprio. La proprietà è che la somma delle righe, quella delle colonne e delle due diagonali è una costante, che in questo caso vale esattamente 81.

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{19} = 0,(052631578947368421) \quad \mathbf{18 \text{ cifre!!!}} \\
 \frac{2}{19} = 0,(105263157894736842) \\
 \frac{3}{19} = 0,(157894736842105263) \\
 \frac{4}{19} = 0,(210526315789473684) \\
 \frac{5}{19} = 0,(263157894736842105) \\
 \frac{6}{19} = 0,(315789473684210526) \\
 \frac{7}{19} = 0,(368421052631578947)
 \end{array}$$

.....

.... e così via fino a $\frac{18}{19}$.

F.EUGENI-D.TONDINI-A.VICECONTE

www.eiris.it

Una presentazione dei Quaternioni

Franco EUGENI, Daniela TONDINI, Annamaria VICECONTE

Department of Communication Science, University of Teramo.

e-mail : {eugeni, dtondini}@unite.it

Sia $\mathbb{I}$ il campo ordinato dei numeri reali e $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale 3–dimensionale reale.

Denotiamo con

$$\mathbb{Q} := \mathbb{I} + \mathbb{V} = \mathbb{I} \times \mathbb{V}$$

L'INSIEME DELLE “SOMME FINALI” DI UN NUMERO REALE CON UN VETTORE,
OVVERO UN'ESPRESSIONE FORMALE DEL TIPO

$$a + \overset{\mathbb{V}}{u} \quad \text{con } a \in \mathbb{I}, \overset{\mathbb{V}}{u} \in \mathbb{V}$$

ovvero una “coppia ordinata” $(a, \overset{\mathbb{V}}{u})$ del prodotto cartesiano $\mathbb{I} \times \mathbb{V}$.

Se, per ogni coppia ordinata $a + \overset{\mathbb{V}}{u}, b + \overset{\mathbb{V}}{v} \in \mathbb{Q}$, definiamo un'operazione (+) in $\mathbb{Q}$ ponendo:

$$(a + \overset{\mathbb{V}}{u}) + (b + \overset{\mathbb{V}}{v}) := (a + b) + (\overset{\mathbb{V}}{u} + \overset{\mathbb{V}}{v})$$

la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, +)$ risulta essere un gruppo abeliano.

Una seconda operazione (*) può essere definita $\forall a + \overset{\mathbb{V}}{u}, b + \overset{\mathbb{V}}{v} \in \mathbb{Q}$ ponendo:

$$(a + \overset{\mathbb{V}}{u}) * (b + \overset{\mathbb{V}}{v}) := ab + b\overset{\mathbb{V}}{u} + a\overset{\mathbb{V}}{v} + (\overset{\mathbb{V}}{u} \wedge \overset{\mathbb{V}}{v} - \overset{\mathbb{V}}{u} \cdot \overset{\mathbb{V}}{v})$$

Si prova con facilità che la struttura $(\mathbb{Q}, +, *)$ è un corpo, non valendo la proprietà commutativa della seconda operazione.

Gli elementi di $\mathbb{Q}$, nella sopraindicata struttura algebrica, si dicono quaternioni ed il corpo costruito si dice corpo dei quaternioni. Se introduciamo ancora l'operazione “esterna” definita ponendo:

$$k \cdot (a + \overset{\text{r}}{u}) := k \cdot a + k \cdot \overset{\text{r}}{u} = ka + k\overset{\text{r}}{u} \quad \forall k \in \mathbb{I}, \forall a + \overset{\text{p}}{u} \in \mathbb{Q}$$

la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, +, *, \cdot)$ prende il nome di algebra dei quaternioni.

È IMPORTANTE INTRODURRE ORA LA NOZIONE DI NORMA.

Quale che sia $a + \overset{\text{p}}{u} \in \mathbb{Q}$, si chiama norma l'applicazione

$$\| \quad \| : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{I}$$

definita ponendo:

$$\|a + \overset{\text{r}}{u}\|^2 = a^2 + u^2$$

essendo u la norma di $\overset{\text{p}}{u}$ in $\mathbb{I}$.

Si chiama inoltre quaternione coniugato di $a + \overset{\text{p}}{u}$ il quaternione

$$\overline{a + \overset{\text{r}}{u}} := a - \overset{\text{r}}{u}$$

È IMMEDIATO PROVARE CHE:

$$(1) \quad (a + \overset{\text{r}}{u}) * (a - \overset{\text{r}}{u}) = (a - \overset{\text{r}}{u}) * (a + \overset{\text{r}}{u}) = \|a^2 + u^2\|$$

$$(2) \quad (a + \overset{\text{p}}{u})^{-1} = \frac{1}{a^2 + u^2} (a - \overset{\text{p}}{u})$$

Spesso è utile scrivere

$$a + \overset{\text{p}}{u} = a + b\overset{\text{p}}{r}$$

essendo $\overset{\text{p}}{r}$ un versore parallelo ad $\overset{\text{p}}{u}$, ed anche:

$$a + \overset{\text{r}}{u} = a + u_x \overset{\text{r}}{i} + u_y \overset{\text{r}}{j} + u_z \overset{\text{r}}{k}$$

essendo $\{\overset{\text{r}}{i}, \overset{\text{r}}{j}, \overset{\text{r}}{k}\}$ una base di versori di $\mathbb{I}$.

SI PROVA FACILMENTE CHE:

$$(3) \quad i^2 = j^2 = k^2 = r^2 = -1$$

$$(4) \quad ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j$$

Si prova inoltre il seguente ovvio

TEOREMA 1. Sia $\hat{r} \in \mathcal{F}$ un fissato versore. Allora risulta $(\{a + b\hat{r}\}, +, *) \cong \mathcal{F}$.

TEOREMA 2. Sia $q = a + b\hat{r} = \rho(\cos\vartheta + \hat{r} \sin\vartheta)$ un quaternione. La trasformazione

$$\hat{y} = q * \hat{x} * q^{-1}$$

è una rotazione di asse $\hat{F}$ ed ampiezza 2ϑ .

Dimostrazione.

Si ha

$$\hat{y} = q * \hat{x} * q^{-1} = \cos 2\vartheta \hat{x} - \sin 2\vartheta (\hat{x} \wedge \hat{r}) + 2 \sin^2 \vartheta (\hat{x} \cdot \hat{r}) \hat{r}$$

La trasformazione è lineare; infatti

$$q * (\lambda \hat{x}_1 + \mu \hat{x}_2) * q^{-1} = \lambda (q * \hat{x}_1 * q^{-1}) + \mu (q * \hat{x}_2 * q^{-1})$$

ed è tale che

$$\|\hat{y}\| = \|q * \hat{x} * q^{-1}\| = \|q\| \|\hat{x}\| \|q\|^{-1} = \|\hat{x}\|$$

Per $\hat{x} = \hat{F}$ risulta $\hat{y} = \hat{F}$ cioè $\hat{F}$ è un vettore unitario.

Sia $a + b\hat{r} = \cos\vartheta + \hat{r} \sin\vartheta$ un quaternione unitario.

CONSIDERIAMO:

$$\begin{aligned} (a + b\hat{r}) * \hat{x} * (a - b\hat{r}) &= [a\hat{x} + b(\hat{r} \wedge \hat{x} - \hat{r} \cdot \hat{x})] * (a - b\hat{r}) = \\ &= \{-b(\hat{r} \cdot \hat{x}) + [a\hat{x} + b(\hat{r} \wedge \hat{x})]\} * (a - b\hat{r}) = \\ &= -ab(\hat{x} \cdot \hat{r}) + b^2(\hat{x} \cdot \hat{r})\hat{r} + a^2\hat{x} + ab(\hat{r} \wedge \hat{x}) + [a\hat{x} + b(\hat{r} \wedge \hat{x})] \wedge (-b\hat{r}) - [a\hat{x} + b(\hat{r} \wedge \hat{x})] \cdot (-b\hat{r}) = \\ &= -ab(\hat{x} \cdot \hat{r}) + b^2(\hat{x} \cdot \hat{r})\hat{r} + a^2\hat{x} + ab(\hat{r} \wedge \hat{x}) - ab(\hat{x} \wedge \hat{r}) - b^2(\hat{r} \wedge \hat{x}) \wedge \hat{r} + ab(\hat{x} \cdot \hat{r}) + b^2(\hat{r} \wedge \hat{x} \cdot \hat{r}) = \\ &= b^2(\hat{x} \cdot \hat{r})\hat{r} + a^2\hat{x} - 2ab(\hat{x} \wedge \hat{r}) - b^2[\hat{x} - (\hat{x} \cdot \hat{r})\hat{r}] = \\ &= (a^2 - b^2)\hat{x} - 2ab(\hat{x} \wedge \hat{r}) + 2b^2(\hat{x} \cdot \hat{r})\hat{r} = \hat{y} \end{aligned}$$

essendo, in generale:

$$(a \wedge b) \wedge c = (ac)b - (bc)a$$

Supponiamo ora che $\vec{x}_1$ sia ortogonale ad $\vec{r}$, cioè che sia:

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{r} = 0.$$

Risulta allora:

$$\vec{y}_1 = \cos 2\vartheta \vec{x}_1 + \sin 2\vartheta (\vec{x}_1 \wedge \vec{r})$$

e quindi:

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{r} = \cos 2\vartheta (\vec{x}_1 \cdot \vec{r}) = 0$$

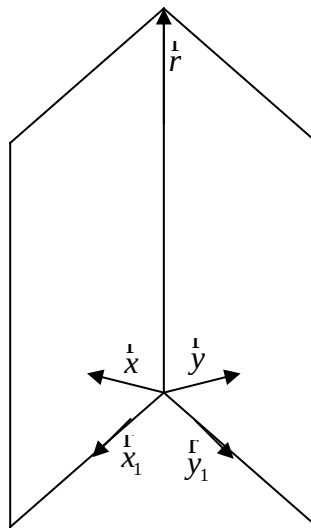
Segue allora che l'angolo dei due piani $(\vec{x}, \vec{r})$ ed $(\vec{y}, \vec{r})$ è dato dall'angolo dei due vettori $\vec{x}_1$ ed $\vec{y}_1$.

Si ha:

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_1 = \cos 2\vartheta \|\vec{x}_1\|^2$$

e quindi

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 = \cos 2\vartheta$$



Poiché la trasformazione $\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1}$ è lineare, deve esistere una matrice $A = A(q)$ tale che:

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = A \vec{x}$$

Essendo, inoltre:

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = \cos 2\vartheta \vec{x} - \sin 2\vartheta (\vec{x} \wedge \vec{r}) + 2 \sin^2 \vartheta (\vec{x} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

passando alle componenti, risulta:

$$y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k} =$$

$$= \cos 2\theta (x_1 \overset{\mathbf{r}}{i} + x_2 \overset{\mathbf{r}}{j} + x_3 \overset{\mathbf{r}}{k}) - \sin 2\theta \begin{vmatrix} \overset{\mathbf{r}}{i} & \overset{\mathbf{r}}{j} & \overset{\mathbf{r}}{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} + 2\sin^2\theta (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3) \cdot (r_1 \overset{\mathbf{r}}{i} + r_2 \overset{\mathbf{r}}{j} + r_3 \overset{\mathbf{r}}{k})$$

da cui:

$$y_1 = \cos 2\theta x_1 - \sin 2\theta (x_2 r_3 - r_2 x_3) + 2\sin^2\theta r_1 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

$$y_2 = \cos 2\theta x_2 + \sin 2\theta (x_1 r_3 - r_1 x_3) + 2\sin^2\theta r_2 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

$$y_3 = \cos 2\theta x_3 - \sin 2\theta (x_1 r_2 - r_1 x_2) + 2\sin^2\theta r_3 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

ed ordinando:

$$y_1 = (\cos 2\theta + 2r_1^2 \sin^2\theta) x_1 + (-r_3 \sin 2\theta + 2r_1 r_2 \sin^2\theta) x_2 + (r_2 \sin 2\theta + 2r_1 r_3 \sin^2\theta) x_3$$

$$y_2 = (r_3 \sin 2\theta + 2r_1 r_2 \sin^2\theta) x_1 + (\cos 2\theta + 2r_2^2 \sin^2\theta) x_2 + (-r_1 \sin 2\theta + 2r_2 r_3 \sin^2\theta) x_3$$

$$y_3 = (-r_2 \sin 2\theta + 2r_1 r_3 \sin^2\theta) x_1 + (r_1 \sin 2\theta + 2r_2 r_3 \sin^2\theta) x_2 + (\cos 2\theta + 2r_3^2 \sin^2\theta) x_3$$

Se ora poniamo:

$$a = \cos\theta$$

$$b = \sin\theta$$

in maniera analoga otteniamo:

$$y_1 \overset{\mathbf{r}}{i} + y_2 \overset{\mathbf{r}}{j} + y_3 \overset{\mathbf{r}}{k} = (a^2 - b^2) (x_1 \overset{\mathbf{r}}{i} + x_2 \overset{\mathbf{r}}{j} + x_3 \overset{\mathbf{r}}{k}) - 2ab \begin{vmatrix} \overset{\mathbf{r}}{i} & \overset{\mathbf{r}}{j} & \overset{\mathbf{r}}{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} + 2b^2 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3) \cdot (r_1 \overset{\mathbf{r}}{i} + r_2 \overset{\mathbf{r}}{j} + r_3 \overset{\mathbf{r}}{k})$$

da cui, passando alle componenti:

$$y_1 = (a^2 - b^2) x_1 - 2ab (x_2 r_3 - r_2 x_3) + 2b^2 r_1 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

$$y_2 = (a^2 - b^2) x_2 + 2ab (x_1 r_3 - r_1 x_3) + 2b^2 r_2 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

$$y_3 = (a^2 - b^2) x_3 - 2ab (x_1 r_2 - r_1 x_2) + 2b^2 r_3 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

ovvero:

$$y_1 = (a^2 - b^2 + 2b^2 r_1^2) x_1 + (-2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) x_2 + (2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3) x_3$$

$$y_2 = (2abr_3 + 2b^2 r_2 r_1) x_1 + (a^2 - b^2 + 2b^2 r_2^2) x_2 + (-2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3) x_3$$

$$y_3 = (-2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3) x_1 + (2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3) x_2 + (a^2 - b^2 + 2b^2 r_3^2) x_3$$

Se ora poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 + 2b^2 r_1^2 & -2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2 & 2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3 \\ 2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2 & a^2 - b^2 + 2b^2 r_2^2 & -2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3 \\ -2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3 & 2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3 & a^2 - b^2 + 2b^2 r_3^2 \end{pmatrix}$$

risulta proprio $\overset{\mathbf{r}}{y} = A \overset{\mathbf{r}}{x}$.

Dobbiamo provare che questa matrice è ortogonale. Si osservi che è funzione di 2ϑ (angolo di rotazione) e di $\vec{r}$.

$$\begin{aligned}
 & (a^2 - b^2 + 2b^2 r_1^2)(2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) + (-2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2)(a^2 - b^2 + 2b^2 r_2^2) + \\
 & + (2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3)(-2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3) = (a^2 - b^2)(2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2 - 2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) = \\
 & = (a^2 - b^2)4b^2 r_1 r_2 + 2b^2 r_1^2 (2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) + 2b^2 r_2^2 (-2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) = \\
 & = (a^2 - b^2)4b^2 r_1 r_2 + 2b^2 (r_1^2 2abr_3 + r_1^2 2b^2 r_1 r_2 - r_2^2 2abr_3 + r_2^2 2b^2 r_1 r_2)
 \end{aligned}$$

$$A = (a^2 - b^2)I_3 + 2ab \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\det = 0} + 2b^2 r_1 r_2 r_3 \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}}_{\det = 0}$$

F.EUGENI-D.TONDINI-A.VICECONTE

www.eiris.it

LA FILOSOFIA DEI LABIRINTI: DAL MITO ALL'INTELLIGENZA ARTIFICIALE

Raffaele Mascella
Dipartimento di Scienze della Comunicazione,
Università degli Studi di Teramo
rmascella@unite.it

1. Dal mito alla matematica ricreativa

In una prima grossolana indicazione possiamo affermare che un labirinto è una struttura, per solito di vaste dimensioni, costruita con un ingresso, una uscita, una serie intricata di vie in modo tale che una volta entrati ci sia difficile trovare l'uscita. Nel linguaggio comune è anche un sinonimo di rompicapo.

Il labirinto più famoso e leggendario appare nelle opere mitologiche come Labirinto di Cnosso, giunto a noi sul verso di monete cretesi di epoca minoica. Di questo labirinto si disse che una struttura così ingannatrice così ingegnosamente concepita non fu mai vista al mondo allora ed in epoche successive.* Labirinti architettonici di questo tipo non erano rari nel mondo antico.

In alcune iscrizioni rupestri della Val Camonica, circa 1500 a.C., fra immancabili immagini rituali di dischi solari e segni geometrici, guerrieri e scene di danze, appare spesso la raffigurazione schematica e simbolica del labirinto. Spesso rappresentato in forma circolare, il labirinto camuno coincide fin troppo con l'immagine simbolica del labirinto di Cnosso. E la stessa immagine, unita spesso all'onnipresente spirale cosmica, simboleggiante l'eternità, si ritrova non solo nell'area mediterranea e microasiatica ma anche nel nordeuropa, nelle tracce lasciate dalle civiltà megalitiche della fascia atlantica e dalle popolazioni celtiche in Irlanda e Scandinavia meridionale. Anche in Egitto lo schema labirintico non è sconosciuto. Erodoto parla di un labirinto, in parte da lui stesso visitato, con circa 3000 camere, sviluppato su due piani con edifici collegati ed un muro esterno che li racchiude.

* Si narra che esso venne fatto costruire dal Re Minosse nell'isola di Creta per rinchiodarvi il mostruoso Minotauro, nato da una irreale unione tra la moglie del re e un toro. Questo labirinto era un complesso intrico di strade contornate da alti muri, stanze con molte porte, cunicoli e gallerie. Il mitico architetto ideatore fu un tale Dedalo, che a costruzione ultimata venne fatto rinchiodare, dal Re Minosse, assieme al figlio Icaro, perché non potessero rivelarne i segreti costruttivi. Il geniale Dedalo costruì delle ali, che applicò con la cera alle spalle sue e di suo figlio. Entrambi allora uscirono volando, unico modo di uscire nell'immaginario collettivo di allora, ma il figlio Icaro colpito da orgoglio volò troppo vicino al Sole, la cera che teneva le ali si sciolse ed Icaro precipitò miseramente verso il basso. Minosse impose che ogni anno sette giovani e sette fanciulle di Atene, fossero date in pasto al Minotauro. Fu l'eroe Teseo che aiutato da un lungo filo, donatogli da una tale Arianna, filo che aveva lasciato scorrere lungo il percorso, riuscì ad orientarsi e a muoversi nel labirinto, trovare il mostro e ucciderlo.

Nel Cristianesimo i fedeli si ritrovano spesso a dover costruire e frequentare veri e propri labirinti sotterranei dal disegno intricato e dagli accessi oscuri e pericolosi: le catacombe, rifugio e nascondiglio oltre che luogo di culto e di sepoltura dei defunti. Ma fin dai primi secoli d.C. si realizza una interessante fusione del pensiero classico con quello cristiano, ovvero, il trascorrere tortuoso e faticoso della vita, dalla nascita fino alla conclusione, che da una parte era semplicemente nel regno dei morti, dall'altra era nel paradiso celeste. La cultura cristiana, infatti, già nel IV secolo affianca gli eroi classici con il simbolismo cristiano; e così la Chiesa, così come Arianna, indica la strada per raggiungere la meta finale al centro della schema, ovvero la Gerusalemme celeste, il Regno dei cieli.

Molte cattedrali cristiane edificate in tempo medievale avevano così schemi labirintici incastonati nei loro pavimenti, in realtà nell'iconografia tradizionale semplici schemi unicursali, ovvero "falsi labirinti" (una sola strada tortuosamente aggrovigliata su se stessa ma del tutto priva di biforcazioni od incroci), successivamente quasi tutti distrutti da canonici scandalizzati, tra il XVII e il XVIII secolo, perché sembra che le persone, invece di seguire le funzioni, iniziavano a camminarci sopra, seguendone le giravolte e cercandone la soluzione. E questo pareva inaccettabile. Ma il loro significato simbolico, prima di essere smarrito, era comunque profondo, ad indicare il percorso dei fedeli, impegnati in un cammino terreno ascetico e mistico.

Per altri versi il labirinto ha rappresentato anche il lungo e tortuoso cammino iniziatico che l'eroe affronta per poter incontrare il mostro, cammino che può essere abbreviato e semplificato solo dal consiglio e dalla saggezza di chi è già iniziato. Così come Dedalo, artefice e creatore del labirinto nonché co-responsabile della nascita del Minotauro, che suggerisce ad Arianna il famoso stratagemma del filo.

Dunque il labirinto nella storia rappresenta e concentra in sé una serie di miti e simboli, da quelli profondamente radicati nella nostra coscienza a quelli ottenuti con rielaborazioni successive sia dal punto di vista architettonico che simbolico, avvenute in un ampio intervallo di tempo e di spazio. Perciò si passa dal "viaggio iniziatico" dei popoli primitivi al "cammino della salvezza" dei cristiani, dalla "discesa degli inferi" alla "peregrinazione impedita" ed alla "ricerca della conoscenza".

E anche la letteratura ne ha tenuto conto. Lo scrittore inglese Joseph Addison scrisse un'interessante opera su Rosamunda dalla quale Algernon Charles Swiburne trasse il poema drammatico "Rosamunda" il cui tema centrale è un labirinto.[†] Lo stesso Shakespeare cita questi curiosi labirinti fra il selvatico e il verde che ornavano i prati davanti le Chiese. E poi esempi più diretti, come quello di James Joyce, la cui intera opera, non a caso, è un gioco labirintico con il lettore. O Umberto Eco che incarna in modo spettacolare il concetto labirintico della conoscenza, attraverso la biblioteca-labirinto de *Il nome della rosa*, anche se questa immagine, in realtà, è presa a prestito dalla labirintica *Biblioteca di Babele* di Borges.

Anche nell'arte barocca vi è interesse per il labirinto come ornamento o passatempo, anche se scevro di qualsiasi connotazione mistica o religiosa. I grandi palazzi patrizi vedono il sorgere di giardini ornati da siepi che formano percorsi labirintici, ad uso dei giochi di società dei loro nobili ed annoiati signori. Famoso il labirinto tardo-rinascimentale

[†] Nel XII secolo il Re d'Inghilterra Enrico II fece costruire, in un parco a Woodstock, il cosiddetto Rosamunda's Bower (rifugio di Rosamunda), ai fini di nascondere la sua amante Rosamunda alla moglie Eleonora d'Aquitania. Il rifugio era al centro di un intricato labirinto. Tuttavia la moglie Eleonora ricorrendo alla tecnica del filo di Arianna arrivò al centro del labirinto e costrinse la bella rivale a bere un potente veleno e quindi a tornare con il suo filo nei suoi regali appartamenti.

creato nel 1690 per il Palazzo di Hampton Court, residenza di Guglielmo d'Orange. Nei primi anni del '900 nell'Indiana (USA) precisamente ad Harmony una setta di emigrati tedeschi edificò un labirinto di siepi che fu preso come simbolo della tortuosità del peccato e sulla difficoltà a trovare la retta via. Il labirinto fu distrutto e poi riedificato nel 1942 su disegni forse non originali.

Il labirinto viene studiato dal punto di vista geometrico e matematico, perfino da Leonardo. Da allora in poi, e fino ad oggi, esso si insinua spesso inconsapevolmente nell'arte, nella musica, nella pittura in mille e mille modi che è difficile descriverli tutti.

Ma apparentemente oggi cosa ci rimane dei labirinti? Ad una prima occhiata profana la loro conoscenza sembra legata esclusivamente al gioco, come capitolo della matematica ricreativa. Ed infatti i "matematici" si sono occupati dei labirinti, in particolare di quelli classici, cioè senza incroci.

Con un po' di formalismo, un (e,u) -labirinto può essere definito come un grafo nel quale sono dati un certo numero e di vertici detti entrate ed un certo numero u di vertici detti uscite con le condizioni seguenti:

1. esistono nel grafo cammini che da ogni entrata conducano ad almeno una uscita,
2. il numero v dei vertici è molto grande rispetto ad e ed u ,
3. il numero dei cammini entrata-uscita è molto piccolo rispetto a v ,
4. il numero di archi (link) è elevato.

Limitandoci agli $(1,1)$ -labirinti, detti semplicemente labirinti, ci si può chiedere: quanti ne esistono? Per meglio dire: è possibile classificare tutti i labirinti?

Numerando in modo progressivo dall'esterno verso l'interno del labirinto le circonvoluzioni che lo compongono, ad ogni labirinto si può associare la sequenza numerica con cui vengono percorse le circonvoluzioni; chiamando "livello del labirinto" il numero massimo di circonvoluzioni che lo compongono (con il cerchio esterno indicato convenzionalmente dal numero zero), Phillips ha classificato i labirinti fino al livello 22. E fino a questo livello, il loro numero risulta essere di 73.424.650.

I matematici (e gli informatici) hanno cercato anche delle regole che permettessero di trovare in modo efficiente la via da percorrere. Se di un labirinto si possiede la pianta si può procedere con un metodo tipicamente esaustivo, cioè percorrendo tutti i cammini, magari in maniera ordinata (tanto per semplificarsi la vita...) annerendo tutti i cammini che ad un certo punto si chiudono. Alla fine si trova necessariamente il cammino che porta all'uscita.

Diverso è il problema dell'individuo che percorre un labirinto di cui non ha la pianta. Potremmo pensare, con un piccolo sforzo di immaginazione, che sarebbe come trovarsi nel fiabesco mondo piatto di Abbott, in cui le figure geometriche piane si muovono in condizioni visuali ridotte, ovvero senza l'uso della tridimensionalità. E qui, senza voler approfondire troppo la questione, qualunque tipo di ricerca di una via, un monumento, un edificio, è approssimabile, stavolta non in senso matematico, alla ricerca di una soluzione labirintica. Una regola pragmatica, in questo caso, è quella della mano destra. Se percorro un $(1,1)$ -labirinto in cui tutti muri sono tra loro collegati (cioè è "semplicemente connesso") tenendo la mano destra sempre a contatto del muro prima o troverò l'uscita. Ma se si tratta di un labirinto "moltepiamente connesso" ritornerò all'entrata. E lo stesso problema nasce quando vi è invece un centro da raggiungere poiché eventuali cammini che girano attorno al centro (pensate ad un cerchio con un buco) portano al punto di partenza. La mancanza di tali cammini circolari chiusi corrisponde alla semplice connessione delle figure piane. Problemi analoghi nascono nel caso di labirinti con un numero maggiore di entrate. Dunque abbiamo a che fare con una questione matematico-informatica, modellizzabile come problema di visite in un grafo, in cui la topologia dello schema non è secondaria rispetto alla ricerca di soluzioni "semplici".

Ma esiste un algoritmo che possa risolvere un labirinto? La risposta è positiva e un algoritmo può essere dedotto da alcune regole dovute ai matematici francesi G. Tarry e M. Trémaux, alla fine del XIX secolo. Esse sono riportate nel libro di Edouard Lucas, *Récréations Mathématiques* (vol. I, 1882), e sarà nostra cura preparare la traduzione integrale commentata di quest'opera.

Di questo algoritmo, conosciuto come algoritmo di Trémaux, o meglio di una sua versione semplificata, si avvale anche il padre della teoria dell'informazione C. Shannon, e qui siamo infine giunti alla connessione con il nostro discorso che si diramerà nei prossimi paragrafi, ovvero alla connessione tra labirinti e calcolatori. All'ottava "Cybernetics Conference" del 1952, Shannon presentò un piccolo robot semovente, una specie di topolino denominato "Teseo", in grado di imparare ad uscire da un labirinto sconosciuto, proprio come un topo di laboratorio. Il labirinto era articolato su un quadrato 5x5, che poteva essere modificato disponendo diversamente i muretti divisorii, e anche l'obiettivo da raggiungere poteva essere così cambiato a piacimento.

Nella versione semplificata, l'algoritmo eliminava dal percorso trovato i rami inutili ed i giri viziosi per potere successivamente ripercorrere lo stesso labirinto lungo un tragitto più breve (anche se non precisamente ottimale). Tutto ciò, grazie ad una duplice strategia. Da un lato, quella di tipo esplorativo, per muoversi nel labirinto, dall'altro quella relativa all'obiettivo da raggiungere.

Molte furono già le prime evoluzioni del topo "Teseo-Trémaux". Il robot solutore di Jariosh Deutsch di Oxford utilizza scorciatoie e ripropone le strategie anche su un labirinto topologicamente equivalente ad uno dato e da lui conosciuto. Questi furono i rudimenti iniziali di questi robot allo stato embrionale.

Nel 1951, quando era ancora studente, lo stesso M. Minsky nella costruzione dello Snarc (Stochastic Neural-Analog Reinforcement Computer), la prima rete neurale artificiale del mondo, modellò il processo di apprendimento di cui un topo si avvale quando cerca di uscire da un labirinto.

Tutto ciò avveniva alle soglie di un nuovo movimento culturale prima che informatico-teorico inteso a studiare il comportamento intelligente degli uomini e degli animali e a riprodurlo sulle macchine. In altre parole, l'intelligenza artificiale.

2. I labirinti degli ipertesti

Da tempo sono comparsi nel mondo letterario i cosiddetti "ipertesti", che sono di fatto nuovi oggetti testuali. Essi sono caratterizzati dal fatto di essere registrati su di una memoria magnetica/ottica/elettronica invece che su carta, ovvero per dirla in altri termini, basati su dispositivi di memoria ad accesso casuale, che permettono di raggiungere direttamente ogni singola unità, e ciò diversamente da quanto accade nei dispositivi ad accesso seriale, nei quali si devono scorrere tutti i dati prima di giungere a quello desiderato.

Questa loro caratteristica ne consente modalità di lettura e principalmente d'uso ben diverse da quelle del tradizionale libro a stampa. Si aprono così una serie di interrogativi che toccano da vicino i mutui rapporti tra i concetti di autore, opera, lettore, sequenzialità.

Per definire un ipertesto, o se vogliamo di ipermedia, accettando anche un compromesso attualizzante con la multimedialità, possiamo asserire che esso è un grafo i cui vertici o nodi sono oggetti di varia natura (file, immagini, filmati, musica, informazioni codificate) e i cui lati o archi sono i link tra i nodi colleganti le varie informazioni. Forse vi sono molti ingressi, teoricamente anche tutti i vertici sono ingressi, e molte uscite, forse tutti i vertici

ancora. I numeri non sono sempre quelli di pochi cammini e molti vertici, gli obiettivi appaiono pure differenti: nel procedere in un cammino vogliamo impadronirci di molti vertici-informazioni, ma le strutture matematiche sottese sono le medesime ed anche le metodologie per andare da un ingresso, quale che sia, ad una uscita, quale che sia.

Gli ipertesti più semplici sono, in prima analisi, files di testo registrati su memoria magnetica in cui le singole sotto-unità (che possono essere indifferentemente pagine, capitoli, paragrafi, frasi, brani, ecc.) non sono disposte, e quindi leggibili, secondo un ordine sequenziale (come le pagine, o i paragrafi, o i capitoli, all'interno di un libro), bensì secondo un grafo ovvero secondo un ordinamento reticolare. Ne consegue che da ogni sotto-unità di un ipertesto, che è di per se un nodo (vertice del grafo) si può accedere direttamente a qualsiasi altra sotto-unità/nodo ad essa collegata. I collegamenti tra le sotto-unità sono chiamati *links*, e sono legami arbitrari che l'amministratore dell'ipertesto crea liberamente, e che può modificare secondo le successive esigenze. L'ipertesto dunque per sua iniziale costruzione non è mai definitivo.

Oggi nessuno si meraviglia più del fatto che è possibile parlare con chiunque in qualunque parte del mondo, usando il telefono; allo stesso modo è ormai quasi-possibile - sempre via telefono - leggere e scrivere testi in qualunque angolo del mondo.

Si profila nell'ipertesto una dimensione molto più ampia, che non era così ovvia quando fin dal 1990 cominciarono a girare le affermazioni, definite utopiche e visionarie di Vannevar Bush e Ted Nelson, che concepirono l'idea di un macrosistema di relazioni tra nodi testuali, che potesse permettere all'utente di andare (navigare) fra testi sparsi ai quattro angoli dell'universo, e non solo tra testi, purché collegati per via telematica. L'Ipertesto, in questo senso, non sarebbe solamente un testo più complesso, denso di collegamenti interni; sarebbe l'insieme di tutti i testi esistenti, e di tutte le loro relazioni.

A titolo di esempio vediamo cosa succede leggendo un ipertesto. Sullo schermo del computer appare una schermata iniziale con varie indicazioni (frecce, rimandi, parole azzurre sottolineate, o altro), che stanno ad indicare come da quel punto con un semplice click su una parola si può "saltare" verso un altro nodo dell'ipertesto, e cioè verso un'altra unità testuale. Scegliendo una di queste opzioni con il sistema di puntamento, mouse o frecce di direzione, ci si trova in automatico in un altro elemento testuale, che a sua volta presenta un'altra serie di links verso altri nodi, tra i quali è possibile scegliere di nuovo; e così via.

L'atteggiamento è identico a quello di Teseo che si muove nel labirinto. Ad ogni passo vanno fatte delle scelte. Il leggere su uno schermo e non su carta, almeno dal punto di vista teorico dovrebbe essere irrilevante, ma chiaramente non è così se non ci si abitua e appare invece chiaro come molte siano le differenze rispetto ad un testo "normale". In più, proprio perché abbiamo consapevolezza della difficoltà di orientamento nella navigazione tra i meandri testuali, l'ausilio tecnologico, il browser, ne conserva memoria, passaggio dopo passaggio, liberandoci da uno sforzo cognitivo paragonabile a quello effettivamente utilizzato nei concetti testualizzati.

Vediamo un rapido elenco degli aspetti principali, presentandoli così come compaiono all'osservazione empirica:

- 1) *Mancanza di sequenzialità.* È la caratteristica che più colpisce il lettore di un ipertesto, già la prima volta che vi si accosta. Il lettore "naviga" da un nodo testuale ad un altro in totale libertà, senza dover rispettare nessun ordine e scegliendo liberamente tra i links disponibili. Il limite a questa libertà è dato esclusivamente da quanti nodi l'autore ha inserito nell'ipertesto, e dai collegamenti che ha istituito tra di essi.

- 2) *Possibilità di letture multiple.* Il lettore si accorge facilmente che in un ipertesto non c'è una lettura unica ma la lettura o l'ascolto o la visione dipendono dalla scelta della sequenza dei link determinata esclusivamente dalle scelte che si compiono volta per volta, durante il percorso di lettura, non prima. Del resto per "lettura" intendiamo l'ordine con cui i singoli elementi costituenti i nodi scelti appaiono alla nostra attenzione. Questo ordine, nel caso del libro, dipende dalla successione delle pagine così come sono state rilegate, secondo la volontà dell'autore.
- 3) *Multimedialità.* Da un testo è possibile aprire collegamenti ad altri files, di genere non testuale, quindi è possibile incorporare brani musicali, immagini fisse e filmati. Il concetto di nodo è quindi estremamente largo e può comprendere oggetti testuali di varia natura, aprendo notevoli possibilità in campo didattico e saggistico. Si potrebbe dire che tutto questo si può fare anche mettendo insieme un libro, un registratore audio e un registratore video; ma così facendo andrebbe indubbiamente persa quell'unità testuale che invece nell'ipertesto multimediale è racchiusa in un solo apparecchio che - nel caso di un computer portatile - non è ormai più grande di un libro.
- 4) *Organizzazione reticolare delle unità testuali.* L'utente di un ipertesto si rende conto facilmente che ogni nodo è connesso contemporaneamente con molti altri. Non hanno senso i concetti assoluti di "pagina precedente", "pagina seguente" ed ogni nodo può essere il successivo di molti altri, ed essere a sua volta il punto di partenza per diversi altri.
- 5) *Espandibilità del testo e non distinzione autore/lettore.* Il testo su memoria magnetica non è mai definitivo. Si incrina il concetto di testo come qualcosa di definito, di delimitato. In parte perché è impossibile controllare i bordi dell'ipertesto. Ad un ipertesto l'autore/lettore può aggiungere in qualsiasi momento nuovi elementi, con i soli limiti del sistema *hardware* di cui dispone: può aggiungere la traduzione del testo, o diverse traduzioni in più lingue; può aggiungere commenti, note, annotazioni; può aggiornare la bibliografia, può aprire nuovi collegamenti, ecc. L'utente può inoltre passare da "autore" a "lettore" essendo queste in un testo interattivo di due "modalità" che si possono scambiare a piacimento.
- 6) *Cooperazione.* Un ipertesto può essere costruito da autori fisicamente lontani ma intellettualmente vicini essendo le distanze annullate dal potersi muovere nel cosiddetto cyberspazio.

Ampliamo l'idea di labirinto verso altri aspetti. La moltiplicazione delle possibilità di scelta, l'ansia dello smarrimento, il gusto dell'esplorazione, la convinzione di trovare un significato nascosto sotto il groviglio dei percorsi, sono tutti elementi che abbiamo visto caratterizzare gli ipertesti, e che d'altra parte rimandano direttamente anche alla simbologia del labirinto e alle varie forme con cui questa figura archetipica riaffiora costantemente nelle arti e nella letteratura.

Il più grande ipertesto conosciuto è Internet. In esso ogni vertice è ingresso ed uscita. La ricerca di un filo d'Arianna è ugualmente importante anche se per scopi differenti. Il sapere sostituisce il trovare l'uscita, ma forse l'uscita è un'uscita da un problema intricato, è un procurarsi informazioni corrette, e così via. L'accostamento ipertesto-labirinto è estremamente ovvio, ed è tra le prime cose che vengono in mente usando un ipertesto; d'altra parte evocare il labirinto semplicemente come generico richiamo figurale lascia in

ombra l'interesse epistemologico che, in vari campi del sapere, si è sollevato intorno ai concetti - connessi con il labirinto - di rete, di molteplicità, di *complessità*.

Circa la complessità, secondo noi operativa, questa sembrerebbe essere data dalla qualità. Internet secondo molti è un enorme immondezzaio all'interno del quale poche e rare perle del sapere potranno essere un domani evidenziate da brillanti algoritmi intelligenti, creati dall'uomo ma capaci di operare in proprio.

E proprio la figura del labirinto è stata sottoposta ad un intenso lavoro di rielaborazione teorica e di classificazione tipologica, secondo la quale per Rosenstiehl anche i labirinti si possono suddividere in tre grandi categorie: unicursali, arborescenti e ciclomatici.

- a) Il *labirinto unicursale* lo si può immaginare come un serpente arrotolato, oppure una fune avvolta su se stessa. L'impressione di groviglio inestricabile è in realtà un'illusione, in quanto chi segue il corpo del serpente non corre il rischio di sbagliare, lo percorre tutto dall'inizio alla fine, curva dopo curva. Il labirinto unicursale dunque è un labirinto in cui non ci si perde, ma che anzi, attraverso una notevole complessità figurale, riesce a dare alla fine un senso di sollievo e di soddisfazione per la prova superata.
- b) Il *labirinto arborescente*, è quella avente come grafo di base un albero: quindi una struttura ramificata, dicotomica, che si manifesta in una successione di bivi. A differenza dei labirinti del primo tipo, dove l'esploratore va sempre avanti qui ci troviamo in uno schema di percorso che consente di andare avanti fino alla fine di un ramo; poi di nuovo indietro fino al bivio; poi di nuovo avanti fino alla fine di un altro ramo, e così via.
- c) Il *labirinto ciclomatico* è di fatto una struttura del tutto generale con la presenza di passaggi trasversali da un ramo all'altro. In questa struttura sono presenti isole (o zone centrali o buchi) attorno alle quali si possono creare dei loop (cicli) di nodi-link che ritornano al punto di partenza. In questo tipo di labirinto è possibile perdersi, e l'esploratore rischia di restare intrappolato; a meno che non riesca a tenere sotto controllo il proprio itinerario.

Come si può facilmente notare, la classificazione dei labirinti (unicursale, arborescente, ciclomatico) ricalca perfettamente quella delle strutture di dati (lineare, ad albero, a rete): e forse a questo punto abbiamo la possibilità di saldare completamente i due oggetti ipertesto e labirinto.

Rimane da vedere se le caratteristiche tecniche della memoria dei computer, la suggestione archetipica dei labirinti e se si vuole le antiche tecniche dell'arte della Memoria possano convergere verso una teoria generale e creare sinergie tra gli ambienti.

3. I labirinti dell'intelligenza artificiale

L'idea della macchina pensante e dell'uomo artificiale (non solo meccanico) è molto antica. A questa idea si aggancia la parallela idea dell'uomo che, nelle sue splendide autopoiesi, crea e progetta mutazioni di se stesso anche e specialmente mediante protesi di vario genere e varia natura. Si tratta di antiche aspirazioni umane, cantate al tempo della comunicazione attraverso una oralità mimetica poetica, scritta al tempo della carta imperante e diffusa per mezzo della letteratura anche popolare che ricorrendo ad immaginarie e possibili fantasie pseudoscientifiche ha proceduto e procede all'invenzione e fabbricazione dei miti moderni, eredi della sana mitologia. La personificazione di questa vecchia idea è il mostro, idea

difficile da definire, parola che al di là della sua radice latina, personifica un insieme di forze che provengono dal nostro immaginario collettivo ma si intrecciano con forze sociali e spirituali, che non sono nette esprimendo in realtà solo tendenze e che comunque non appaiono controllate all'interno di un ordinamento razionale e ancor meno in un nuovo chiaro paradigma.

Il mostro è dunque l'incognita del futuro, attualmente è il nostro io proiettato in una accoppiata con una macchina, è il nostro io modificato geneticamente, è un nostro possibile clone come la pecora Dolly, e il nostro discendente che forse vive fino a 150 anni e sostituisce con protesi intelligenti gran parte dei suoi organi danneggiati. Ieri il mostro era altro ma sempre un quid che irrompe dall'esterno, che produce una *alterità* nell'ordine umano, e che si presenta al mondo con fattezze ultraumane o forse post-umane.

Il mostro è comunque vissuto come una minaccia, un sovvertimento come sostanzialmente il Minotauro che divora i giovani in un luogo non sicuro, celato da forze arcane come i percorsi non comprensibili del labirinto. Il mostro opera in uno spazio simbolico che possiede una dimensione interiore che è incontrollabile, speculare in un mondo rovesciato, nel quale il terrore convive con una sorta di attrazione onirica prodotta dal vuoto del mostro. E il mostro rappresenta anche l'invasione di quello spazio intermedio che separa l'umano dal divino per i credenti, dall'ultraterreno per gli occultisti, dall'irrazionalità per lo scienziato: il mostro è il superamento, l'accostamento di questi due confini. Occorre un eroe, un Teseo e un metodo come il filo d'Arianna ovvero la forza, la scienza, la fede, la ragione, la conoscenza, l'intuito per abbatterlo e ristabilire la supremazia dell'uomo. Nella tradizione orale, letteraria ed oggi anche filmica, non sempre il mostro è connotato negativamente ma in ogni caso rappresenta sempre una rottura dell'ordinamento supposto *naturale*, quello stabilmente dato e perciò in qualche modo conoscibile e controllabile. Sono le anime innocenti e forse incoscienti ad accettare Frankenstein, Dracula ed E.T.†.

L'uomo comune davanti al mostro prova angoscia, terrore e ribrezzo giusta reazione alla rottura di equilibrio, assieme tuttavia all'attrazione per il mostro e persino al subire o cercare una forte seduzione estetica per il diverso. Ciò che unifica la serie delle mostruosità immaginate e sedimentate nella nostra fantasia nel corso dei secoli da queste proiezioni psicologiche è insomma il mondo dell'inconscio che reagisce all'eterna paura dell'*altro*, alla paura del non conosciuto. Tradizionalmente il mostruoso riguarda l'informe, il deforme, l'ibrido e la chimera.

A partire dagli anni Cinquanta, l'iniziativa di costruire forme artificiali di intelligenza ha preso piede in modo deciso. Ed il primo, naturale obiettivo, tuttora ancora il cardine di tutto il progetto, è rappresentato dalla comprensione e dalla riproduzione dei nostri meccanismi cerebrali. Il nostro cervello, proprio per la struttura così come oggi la conosciamo, fatta di neuroni, i nodi, e di connessioni sinaptiche, gli archi, è la rete più complessa su cui oggi esiste un obiettivo preciso di schematizzazione. In altre parole esisteranno anche reti più complesse, ma queste sono aldilà del muro, inaccessibili o poco interessanti in rapporto all'obiettivo-cervello.

Una delle prime visioni ed il primo serio approccio, per molti da ricollegare al pensiero hobbesiano, hanno considerato che la nostra struttura cerebrale non sia né più né meno che

† In un vecchio film della Walt Disney dal titolo "Il pianeta proibito" interpretato da un magistrale Walter Pidgeon (nella parte del Prof. Morbius) degli ingenui astronauti "stile anni '50" raggiungono un pianeta ove il suddetto professore ha scoperto i resti di una razza antica che aveva raggiunto vette tecnologiche elevatissime ma che non aveva tenuto in conto i "mostri dell'ID", vere proiezioni esterne del loro io interno e della personificazione di quanto proviamo anche nei confronti dell'altro, pensato come il mostro che si oppone a noi

una sorta di calcolatore e che tutto il nostro pensiero non sia altro che fare calcoli, più complessi di somma e sottrazione, ma pur sempre semplicemente calcoli. Anni di ricerca computazionalistica hanno però portato dapprima a far evolvere l'idea, a favore della visione connessionistica, in cui il calcolo parallelo gioca un ruolo di primo piano e poi, a superarlo del tutto. In molti, oggi, sono convinti che la metafora del calcolatore non sia più appropriata, non risponde efficacemente alle istanze strutturali dello stato di coscienza e delle emozioni. Ed in fondo il problema della demarcazione tra mente e corpo, monistica o dualistica, è ancora aperto e tale è destinato a restare a lungo.

Ma se per un attimo, utilizzando ancora la metafora del calcolatore solo in termini di approccio schematico esterno, e volendo pensare al nostro apparato del pensiero come una macchina molto complessa, che reagisce in risposta ad un input ambientale e fornisce un output comportamentale, è abbastanza immediato identificare la scatola al centro, in cui i segnali elettrici compiono percorsi di attivazione dei circuiti neuronali, ovvero di cammini paralleli del pensiero, come una struttura labirintica.

E' la stessa struttura, dunque, ad avere la caratteristica che una volta entrati sia difficile uscire. Molto di più, perlomeno apparentemente, dei labirinti di pensiero in cui ci perdiamo. Così come diceva Leibniz, infatti, il nostro pensiero ha labirinti nei quali non riesce a cavarsela, ed i più famosi, per lui, erano: "l'uno riguarda la questione del libero e del necessario, soprattutto nella produzione e nell'origine del male; l'altro consiste nella discussione circa la continuità e gli indivisibili, che risultano esserne gli elementi, e in cui deve entrare la considerazione dell'infinito".

Ed anche Bacone, pensando a tutto il nostro universo conoscitivo, osservava:

[...] l'edificio di questo universo appare nella sua struttura come un labirinto all'intelletto umano che lo contempla; e sembra tutto occupato da vie ambigue, da somiglianze ingannevoli di segni e di cose, dai giri contorti e dai nodi intricati delle nature. Il cammino poi deve esser percorso sempre sotto l'incerta luce del senso, ora accecante ora opaca, e bisogna aprirsi continuamente la strada attraverso le selve dell'esperienza e dei fatti particolari. Anche coloro che si offrono (come si è detto) come guide nel cammino, vi sono essi stessi implicati e accrescono con simile guida il numero degli errori e degli erranti." E conclude: "In mezzo a tante difficoltà, bisogna per forza dubitare della esattezza del giudizio umano, sia quanto alla sua propria forza, sia quanto a un successo fortuito: non c'è eccellenza d'ingegno, per quanto grande essa sia, né probabilità di esperimento, per quanto spesso ripetuto, che possa vincere quelle difficoltà. Ci occorre un filo conduttore per guidare i nostri passi, e tracciare la via fin dalle prime percezioni dei sensi.

Sempre a questo proposito, lo psicologo G. Mantovani osserva che il cervello, così come l'ipertesto, è organizzato per strutture labirintiche: *"gli ipertesti e gli ipermedia, in quanto adottano il paradigma non sequenziale, si propongono come più aderenti e fedeli alle caratteristiche dei processi del pensiero"*, pertanto essi consentono *"di superare la frattura, propria del funzionamento cognitivo umano, tra processi di pensiero, non sequenziali, e modalità di trasmissione dell'informazione, sequenziali e vincolate da un ordine"*.

E' proprio la molteplicità delle connessioni, o la potenzialità di connessione, che generano uno stato di smarrimento, tanto nella comprensione del cervello, quanto nella navigazione ipertestuale.

Ci si muove infatti, infatti, in una giungla neuronale e sinaptica di una complessità assolutamente strabiliante. Ci sono 100 miliardi di neuroni nel cervello e ogni neurone è capace di 10.000 contatti con altre cellule nervose per un saldo di 500 milioni di contatti a

millimetro cubo. Ed in questo microuniverso sconfinato le neuroscienze avanzano in mille modi differenti, procedendo dal semplice al complesso ma anche viceversa e separano, distinguono, sfaldano funzioni psicologiche articolate così da stabilire, tra neuronale e psicologico, corrispondenze verosimili.

Uno dei problemi centrali è comunque quello delle rappresentazioni, tanto per lo studio del comportamento animale, tanto per la progettazione di robot “autonomi”. Ad esempio la codifica di configurazioni spaziali è molto importante nel filone della nuova robotica. Qui vi è interesse ai compiti che si svolgono nell’ambiente reale.

Da questa angolazione sono state mosse una serie di critiche alla robotica classica, che si riassumono nel rifiuto del cosiddetto paradigma simbolico, per il quale la conoscenza del mondo non è possibile se non attraverso la mediazione di rappresentazioni, intese come strutture linguistiche manipolate attraverso una serie di regole esplicite. Questo paradigma viene solitamente riferito all’*Ipotesi del Sistema Fisico dei Simboli*, originariamente formulata da Newell e Simon nel 1976.

Da un lato c’è l’approccio cosiddetto “dall’alto”, che prende in esame i problemi più complessi, ad esempio come noi facciamo a fare un ragionamento astratto; dall’altro, un approccio che potremmo definire “dal basso”, vuole essere l’opposto, ovvero mettere al centro dell’attenzione i problemi di interazione senso-motoria dell’agente con l’ambiente. In altre parole più che pensare agli esseri umani ed ai compiti complessi, la fonte di ispirazione è il comportamento degli animali, anche semplici, comunque ritenuti intelligenti, perché mostrano adattamento all’ambiente ed apprendimento in ambienti reali. Un’efficace battuta è quella di R. Brooks che a questo proposito disse: “*gli elefanti non giocano a scacchi*”.

L’architettura proposta da Brooks si chiama “della sussunzione” in cui l’agente è composto da più livelli funzionalmente distinti, che nell’interazione con l’ambiente agiscono in relativa indipendenza l’uno dall’altro, senza la supervisione di un unico sistema centrale di controllo. Questo approccio ha permesso di costruire robot mobili, per esempio testati nella ricerca di un obiettivo distante, ma che nello stesso tempo continuano ad evitare gli ostacoli che incontrano lungo la via.

Dunque alcuni risultati si sono ottenuti rispetto all’approccio classico, tanto che alcuni psicologi e filosofi hanno prontamente concluso che questa nuova robotica, di tipo *behaviour-based*, ha accantonato la *disembodied mind* dell’AI classica, in cui mente e corpo, così come sosteneva ad esempio Cartesio, sono due cose ben distinte.

Dopo questa fase euforica, intorno agli anni ‘70, il panorama delle ricerche si è evoluto, ed ormai esistono robot “ibridi”, che usano buone caratteristiche di robustezza e azione in tempo reale e, nello stesso tempo, usano classici sistemi di pianificazione e rappresentazione della conoscenza.

Però questo approccio, integrato con quello dall’alto, è stato e continua ad essere decisivo.

La connessione con i labirinti è dunque evidente. In questi studi si pone l’accento sulla capacità di svolgere un compito, e l’esempio classico è la ricerca di un cammino, caratterizzato da una sequenza stimolo-azione che dovrebbe permettere di decidere in tempi brevi, e da una certa capacità di memorizzazione come forma specializzata di apprendimento. E una forma tra le più complesse, si è visto, è quella che richiede una navigazione verso un punto che è al di fuori della scena visiva, o comunque non a portata dell’apparato sensoriale. In questo caso vi è una rappresentazione topologica che ad un livello basso non permette di capire, ad esempio quando un cammino viene seguito più volte e ci diviene familiare, la presenza di eventuali scorciatoie. Per fare questo abbiamo bisogno di un tipo di informazione in più che consiste in quella metrica, ovvero

l'informazione sulle distanze percorse. Le relazioni metriche spaziali sono fondamentali, sia per noi che per riprodurre artificialmente intelligenza.

Dunque ci sono due quadri complessivi di rappresentazione, una in cui l'agente è in interazione diretta con l'ambiente, ed un'altra che permette di creare un quadro di riferimento più globale. E qui, a questo secondo livello, oggi abbiamo ancora qualche problema. Mentre modelli che manifestano capacità accettabili al primo livello ormai abbondano, modelli che consentono di rispondere efficacemente al secondo livello, ovvero con delle prestazioni anche solo modestamente cognitive, scarseggiano. Per inciso, la loro prestazione varia a seconda di cosa devono fare e del tipo di rappresentazione che implementano, e quindi si creano problemi ancora difficili da risolvere per i progettisti.

Questa ricerca è fondamentale per comprendere il comportamento degli animali. Basti pensare agli uccelli che tornano al nido, le api che tornano all'alveare e le formiche che tornano al formicaio, pur essendosi allontanate di decine o centinaia di metri. Uno degli esseri viventi che più è stato studiato è la formica del deserto sahariano, *Cataglyphis*. Gli studi dicono che in questo caso la questione metrica sia risolta da una specie di bussola solare. Inoltre, sembra che questa formica abbia in aiuto anche una capacità di memorizzazione, non di tutto l'ambiente ma solo di scenari, di *snapshot*. Di fronte ad una scena visiva, insomma, *Cataglyphis* fa dei confronti con scenari che ha già in memoria, e questo gli consente di orientarsi.

Alcuni agenti-robot sono stati costruiti a questo proposito, per comprendere e verificare le ipotesi via via sul tappeto. Tra questi, uno dei più noti è il robot di Wieth e Browning, che consiste in un topo robot solutore di labirinti, che permette una rappresentazione non solo di basso livello, ma anche di alto livello. In questo caso il labirinto ha dimensioni 16x16, variamente configurabile. Wieth e Browning prevedevano tre diversi schemi o livelli di importanza:

1. il primo relativo alla reazione con l'ambiente, quindi per evitare ostacoli, girare, e così via, ma senza accedere alla memoria. Dunque un vero e proprio schema percettivo;
2. il secondo, invece, fa uso della mappa del labirinto per pianificare l'azione; quindi sulla base degli schemi del livello inferiore, decide l'azione da compiere. Dunque uno schema per la rappresentazione del mondo;
3. il terzo, che è un livello motivazionale, genera le mete e dispone di una serie di valori da usare per valutare le strategie più appropriate.

Oggi, da questa e da altre esperienze, si pensa che possano coesistere forme di rappresentazione dello spazio diverse, alla base di diverse strategie di esplorazione dell'ambiente, e quindi una concezione di modelli multipli, così come indicato da Prescott. Proprio come fa *Cataglyphis*.

4. Conclusioni

Vi sono campi scientifici nei quali l'interesse per i labirinti è elevato. Nel campo della psicologia i labirinti forniscono ottimi test per il comportamento di uomini ed animali nei confronti dell'apprendimento. Così anche un lombrico o una formica può percorrere un labirinto ed "imparare" a muoversi. I programmi, anche loro, sono qualcosa di analogo a forme di vita primordiale e anche essi possono imparare a muoversi nei labirinti.

Interessante l'analisi di Bolter (1984) riguardo al cosiddetto "uomo di Turing", l'uomo abituato a convivere con lo spazio del computer. Uno spazio limitato, caratterizzato da una infinita riscrivibilità, entro cui si perde il senso di cosa significa una scelta definitiva: *"All'uomo di Turing manca l'intensità emotiva dei suoi predecessori. Egli, nei suoi giochi, non investe tutto se stesso precisamente perché i giochi che fa non sono irrevocabili."* E' il carattere finito dello spazio del computer ad innescare questa dimensione ludica, questo senso di chiusura che deriva anche dalla pratica della programmazione, intesa come sequenza da sperimentare, modificare e rielaborare all'infinito.

E ritornando al topolino "Teseo-Tremaux" di Shannon, quando questo giunge ad un incrocio e deve fare una scelta, non la fa a caso, come faremmo noi, ma la fa usando un criterio preciso esistente nella sua programmazione. L'accoppiata di un algoritmo e di un piccolo Robot che lo usa è molto più efficiente di quella umana ovvero animale. A riguardo ebbe a dire Shannon: *"E' piuttosto difficile trovare guasti in una macchina che opera su elementi casuali. E' difficile pure dire se una macchina del genere sta funzionando male quando in effetti non è possibile prevedere ciò che deve fare"*.

Il topo "Teseo-Trémaux" una volta trovato un cammino per uscire su un labirinto lo ripercorre a gran velocità una seconda volta avendo memorizzato tutte le scelte. Un topo reale invece dovrebbe fare scelte veramente casuali impiegando più tempo.

E allora, possiamo concludere con un'immagine storico-evolutiva. I labirinti, da strumento utilizzato per mettere in difficoltà l'essere umano, salvo poi ricompensarlo a compito eseguito, è infine divenuto strumento per mettere in difficoltà le macchine. E la ricompensa, stavolta, assegnando in un impeto una valenza emotiva alle macchine che costruiamo, è l'avvicinamento all'uomo.

Bibliografia

- Barthes R., *La mort de l'auteur*, in *Le bruissement de la langue*, Seuil, Paris, 1984. Trad. it. *La morte dell'autore*, in ID., *Il brusio della lingua*, Einaudi, Torino, 1988.
- Bolter J.D., *Turing's Man. Western Culture in the Computer Age*, The University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1984. Trad. it. *L'uomo di Turing. La cultura occidentale nell'età del computer*, Pratiche, Parma, 1985.
- Bolter J.D., *Writing Space. The Computer, Hypertext, and the History of Writing*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale (N.J.), 1991.
- Borges J.L., *El jardín de los senderos que se bifurcan*, 1941. Trad. it. *Il giardino dei sentieri che si biforcano*, in ID. *Tutte le opere*, I, Mondadori, Milano, 1984.
- Borges J.L., *El Aleph*, 1949. Trad. it. *L'Aleph*, in ID. *Tutte le opere*, I, Mondadori, Milano, 1984.
- Brooks R.A., "Intelligence without representation", in *Artificial Intelligence*, n. 47, 1991, pp. 139-159.
- Brooks R.A., "How to build complete creatures rather than isolated cognitive simulators", in VanLehn, *Architecture for Intelligence*, Erlbaum, Hillsdale (NJ), 1991, pp. 225-239.
- Buongiorno T. e Ziliotto D., *Facciamo i conti con il libro-game*, "Italiano e oltre", vol. IV, n. 2, 1989, pp. 57-61.
- Burattini E. e Cordeschi R., *Intelligenza Artificiale*, Carocci, Roma, 2001.
- Butti G., *Lavorare con gli ipertesti*, Tecniche nuove, Milano, 1991.
- Calvino I., *Il castello dei destini incrociati*, Einaudi, Torino, 1973.
- Calvino I., *Lezioni americane*, Garzanti, Milano, 1988.
- Capucci P. L., *Realtà del virtuale*, CLUEB, Bologna, 1993.
- Carlini F., *Lo stile web. Parole e immagini nella comunicazione in rete*, Einaudi, Torino, 1999.
- Cordeschi R., "Vecchi problemi filosofici per la nuova intelligenza artificiale", in *'Networks, rivista di filosofia dell'intelligenza artificiale e scienze cognitive'*, n. 1, giugno 2003.

- De Mas E. (a cura di), *Opere filosofiche*, I, Laterza, Bari, 1965.
- Eco U., *Do your movie yourself*, 1972, in ID., *Diario minimo*, Milano: Bompiani, 1992.
- Eco U., *Lector in fabula. La cooperazione interpretativa nei testi narrativi*, Bompiani, Milano, 1979.
- Eco U., *Il nome della rosa*, Bompiani, Milano, 1980.
- Eco U., *I limiti dell'interpretazione*, Bompiani, Milano, 1990.
- Geymonat L., *Storia del pensiero filosofico e scientifico. Il Novecento*, vol. 8, t. 3, a cura di E. Bellone e C. Mangione, Garzanti, Milano, 1996.
- Gigliozzi G., *Modellizzazione delle strutture narrative*, in *Calcolatori e scienze umane*, 1992.
- Giustozzi C., "I labirinti", *MCMicrocomputer*, n. 82, febbraio 1989.
- Holland O. e McFarland D., *Artificial Ethology*, Oxford University Press, Oxford, 2001.
- Joyce J., *Ulysses*, Shakespeare and Company, Paris, 1922. Tr. it. Giulio de Angelis, *Ulisse*, Mondadori, Milano, 1988.
- Lévy P., *Les technologies de l'intelligence*, La Découverte, Paris, 1990. Tr. it. Franco Berardi, *Le tecnologie dell'intelligenza*, Synergon, Bologna 1992.
- Lughi G., *Ipertesti letterari e labirinti narrativi*, su <http://www.univ.trieste.it>, 1993.
- Mantovani G., *L'interazione uomo-computer*, Il Mulino, Bologna, 1995.
- Morcellini M. e Sorice M. (a cura di), *Futuri immaginari*, Logica University Press, Roma, 1998.
- Newell A., "Physical Symbol Systems", in *Cognitive Science*, n. 4, 1980, pp. 135-183.
- Newell A. e Simon H.A., "Computer Science as empirical enquiry: symbols and search", in *Communications of the ACM*, n. 19, 1976, pp. 113-126.
- Odifreddi P., *Jorge Luis Borges. I labirinti dello spirito*, reperibile su www.vialattea.net, 1992.
- Prescott T.J., *From Animals to Animats 3*, Mit Press, Cambridge (MA), 1994.
- Queneau R., *Conte à votre façon*, 1967. Trad. it. *Un racconto a modo vostro*, in ID., *Segni, cifre e lettere*, Einaudi, Torino, 1981.
- Rosenstiehl P., "Labirinto", in *Enciclopedia*, s.v., Einaudi, Torino, 1979.
- VanLehn K., *Architecture for Intelligence*, Erlbaum, Hillsdale (NJ), 1991.
- Vera A.H. e Simon H.A., "Situating action: a symbolic interpretation", in *Cognitive Science*, n. 17, 1993, pp.7-48.

Osservazioni su una enciclopedia di fine Settecento

Fernando Di Gennaro

Franco Eugeni

Roberto Parroni

SUNTO - Si esamina un modello matematico per divinazioni che è molto simile *in filosofia* a modelli usati dai Sacerdoti di Apollo. Il modello che è riletto su probabile reinterpretazione di De Fontanelle e Van Dale, è stato anche rielaborato per essere utilizzato su computer. Il modello è naturalmente un *imbroglio* ma la struttura matematica per ottenerlo potrebbe essere utile per la costruzione di codici opportuni.

INTRODUZIONE

Nel Novembre 1993 uno degli Autori del presente scritto, il Prof. Maiorani, in una delle sue spedizioni atte a scovare libri matematici di Antiquariato, reperiva due volumi che dovevano rivelarsi di contenuto quantomeno *curioso*.

I due volumi reperiti risultavano:

- a) IL PRIMO APPARTENENTE ALLA *ENCYCLOPEDIE METHODIQUE* EDITO A PADOVA NEL 1788;
- b) IL SECONDO APPARTENENTE AL DIZIONARIO *AMUSEMES DE SCIENCES* EDITO A PADOVA (1790?)

E' ben noto che nel periodo illuminista era di gran voga l'Encyclopedie o Dizionario ragionato delle scienze, delle arti e dei mestieri di DIDEROT e D'ALAMBERT. Il primo volume di detta Enciclopedia apparve, edito a Parigi da A.F. BRETON, nel mese di Luglio del 1751 e dopo numerose interruzioni, specialmente dovute agli attacchi di vari oppositori, in linea di massima conservatori, fu infine completata (33 volumi in totale) nel 1777.

L'Encyclopedie presenta un esame critico dello stato delle conoscenze umane intorno alla metà del Settecento ed i suoi lettori possono prendere coscienza dei progressi fatti nel campo sia delle scienze esatte che di quelle sperimentali. Così potevano essere lette e divulgate le concezioni rivoluzionarie del mondo che, alla luce delle nuove scoperte, sono catalogate e messe alla portata del pubblico più raffinato e colto.

L'opera diviene, come il futuro ci ha insegnato in circostanze del genere, facile preda di numerose contraffazioni. Ne nascono in Svizzera, in Inghilterra ed altrove, ma con esse nascono anche preziose se non prestigiose imitazioni.

In Italia sono note le bellissime enciclopedie di Lucca (1758-1771) e di Livorno (1770) come riportato nella *Storia e civiltà dei popoli* vol. XI pag. 64 ed. U.T.E.T. 1975.

I due volumi in nostro possesso e in esame fanno entrambi parte di una Enciclopedia, delle serie delle prestigiose imitazioni, edita a Padova nel 1788 e presentata sotto forma di *Encyclopedie Methodique*.

L'opera è dedicata alla "Serenissima" Repubblica di Venezia. Il frontespizio presenta una incisione in acquaforte di P.Scataglia e mancano i nomi sia dell'autore che dell'editore. Questa circostanza è facilmente spiegabile.

Il Diderot e il D'Alambert ebbero l'approvazione del re per poter iniziare la pubblicazione e firmarono l'opera all'uscita dei volumi ma visti gli esiti, l'interesse destati nel pubblico i potenti dell'epoca (in verità solo i più conservatori) iniziarono le pressioni e le censure miranti ad impedire il diffondersi delle *nuove idee*. Diderot e D'Alambert entrambi affiliati alla Massoneria, che era allora sorgente in Europa, propugnavano quelle idee di Libertà-Eguaglianza-Fraternità, idee rivoluzionarie che sembravano minare dalle fondamenta i vari regni in tutta l'Europa. Così molte di queste opere nascevano quasi clandestine, e di sicuro ben gradite ai Massoni d'Europa. Questa tesi sembra avvalorata dal fatto che l'edizione di Lucca datata 1758, e quindi precedente il tempo che cominciò a considerare pericolose le nuove idee, riporta il nome dello stampatore e addirittura del signore (un certo Ottaviano Diodati) che, da buon illuminista, dedicava l'opera al popolo come dono alla crescita politica e culturale.

Così quando i primi effetti della divulgazione dell'Enciclopedia e dei vo-

lumi ad essa ispirati si fecero evidenti ecco che i volumi non vengono più firmati dagli autori e perfino lo stampatore diviene anonimo, come nell'edizione di Livorno, datata 1770, ed in quella in nostro possesso che risale al 1788.

L'opera è scritta in francese, lingua che in quel periodo raggiunge in Europa la massima espansione sia negli ambienti accademici che in campo diplomatico. A conferma basti ricordare che nel 1784 l'Accademia di Berlino mette a concorso la seguente questione: "*Perché la lingua francese è universale?*".

Nel volume a) esaminato si fa il punto delle conoscenze scientifiche di quel fine '700 (le voci riportate vanno dalla lettera C alla lettera E). Sono particolarmente approfonditi i temi riguardanti la Matematica e la Fisica. Nel volume b) si evidenzia maggiormente lo spirito e la volontà insita in queste pubblicazioni ai fini di dare un contributo fattivo al lettore per smitizzare alcune credenze. In questo periodo, come è noto, si mescola abilmente lo scientifico con l'esoterico.

Scopo del lavoro è il riportare, con le dovute interpretazioni, un metodo indicato nel volume b) che era usato essenzialmente per divinare. Sembra che il modello matematico fosse molto più antico, addirittura romano, perché ripreso da antiche tavole di marmo. Naturalmente l'Enciclopedista tende ad evidenziare più l'imbroglio che il metodo combinatorio. Noi nel nostro lavoro siamo disposti a perdonare l'imbroglio ai fini di un buon esame del modello, della costruzione di un modello più ampio in cui non si opererà più manualmente ma per il quale occorrerà un programma di calcolo automatico per *divinare*.

IL METODO "ROMANO" PER DIVINARE

Il metodo la cui rivisitazione è attribuita ad un matematico sconosciuto del '700, era utilizzato in epoca romana dalle sacerdotesse d'Apollo le quali attraverso due tavole, di cui una numerica ed una letterale ed entrambe scolpite su pietra, davano le risposte alle domande poste dalla gente.

Tale matematico rinvenne dette tavole in uno scantinato in occasione di un suo soggiorno nei pressi di Roma come riportato a pag. 277 del volume *Admusemens des Sciences - prime partie* - voci dalla A alla C.

"Vers produits par le calcul numerique."

L'auteur du petit ouvrage intitulé "manufacture e fabrique de vers latins au petit metier", dit qu'en se promenant dans les environs de Rome, il trouva dans un souterrain une planche de cuivre, sur laquelle etoient gravees deux tables composees de chiffres e de lettres; qu'ayant supconé que ces tables pouvoient avoir servi autrefois au pretres d'Apollon pour rendre leurs oracles il s'est applique a en connoitre l'usage e qu'il aheureusement qu'à l'aide de ces table, on peut, par le simple calcul e sans savoir le latin, repondre en un vers latin à une question quelconque proposée sur l'avenir;

d'ou il conclud que cette table est precisement la moyene proportionelle entre l'histoire de M. de Fontenelle e celle de Van Dale, sur la maniere dont les anciens rendoient les oracle..... etc..

Traduzione:

"Versi composti con calcolo numerico"

L'autore della piccola opera intitolata "Manifattura e fabbrica di versi latini su piccolo telaio" dice che passeggiando nei dintorni di Roma, in un sotterraneo trovò una lastra di rame, sulla quale erano incise due tavole composte di cifre e lettere, avendo supposto che queste tavole potessero essere servite ai sacerdoti di Apollo per emettere il responso degli oracoli, si è applicato a conoscerne l'uso e che ha felicemente concluso che per mezzo di queste tavole, si può, con il semplice calcolo e senza sapere il latino, rispondere con un verso latino a una qualsiasi domanda sull'avvenire: da ciò conclude che questa tavola è il medio proporzionale fra la storia di M. De Fontanelle e quella di Van Dale sul modo con cui gli antichi interpretavano gli oracoli..... ecc..

Essendo impossibile descrivere il metodo in forma astratta, passiamo a spiegarlo partendo dall'ipotetica domanda posta all'oracolo dall'occasionale curioso.

Domanda:

"Come si presenta il mio futuro?"

Attraverso la seguente tabella

A = 1	B = 2	C = 3	D = 4	E = 5	F = 6	G = 7
H = 8	I = 9	L = 10	M = 11	N = 12	O = 13	P = 14
Q = 15	R = 16	S = 17	T = 18	U = 19	V = 20	Z = 21

dopo aver diviso arbitrariamente la frase in nove sillabe, si ricavano altrettanti numeri, sommando quelli corrispondenti ad ogni singola lettera. Nel nostro caso si ha:

COME	SI	PRE	SEN	TA	IL	MIO	FUTU	RO
32	26	35	34	19	19	33	62	29

Si passa al resto mod. 9 di ognuno, con l'avvertenza di sostituire 9 quando il resto risulta zero, così facendo nel nostro esempio si ha:

5	8	8	7	1	1	6	8	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Si considerano poi le prime due cifre se ne esegue la somma e si passa ancora al resto mod 9 (ricordando di sostituire 9 al resto 0), si continua allo stesso modo considerando alla seconda e la terza cifra e così di seguito similmente alla costruzione del triangolo di Tartaglia.

La situazione nell'esempio in esame risulta:

```

5 8 8 7 1 1 6 8 2
4 7 6 8 2 7 5 1
2 4 5 1 9 3 8
6 9 6 1 3 2
6 6 7 4 5
3 4 2 9
7 6 2
4 8
3

```

per comodità la si può riportare nel modo seguente:

```

5 8 8 7 1 1 6 8 2
4 7 6 8 2 7 5 1
2 4 5 1 9 3 8
6 9 6 1 3 2
6 6 7 4 5
3 4 2 9
7 6 2
4 8
3

```

Considerando i numeri secondo l'ordine delle colonne nel senso evidenziato in figura:

```

5 8 8 7 1 1 6 8 2
4 7 6 8 2 7 5 1
2 4 5 1 9 3 8
6 9 6 1 3 2
6 6 7 4 5
3 4 2 9
7 6 2
4 8
3

```

si costruisce la seguente tabella, in cui le singole colonne sono denominate, per comodità di riferimento, con le prime lettere dell'alfabeto.

a	b	c	d	e	f	g
3	8	4	4	3	6	4
8	1	3	7	6	9	6
2	2	3	1	6	5	7
9	4	5	9	1	8	2
5	6	8	7	2	1	7
2	2	7	6	1	6	8

Si consideri, inoltre, la matrice tridimensionale i cui elementi $z(i,j,1)$ sono quelli della tabella precedente in cui sono state soppresse la prima riga e la prima colonna. La prima colonna contiene gli elementi $a(i)$ che andiamo a riportare a fianco di ogni tabella per facilitare la costruzione di ognuna di esse.

a(i)						
3	8	4	4	3	6	4
8	1	3	7	6	9	6
2	2	3	1	6	5	7
9	4	5	9	1	8	2
5	6	8	7	2	1	7
2	2	7	6	1	6	8

Gli elementi sono definiti da:

$$z(i,j,2) = [3*b(i,j,1) + a(i)] \bmod 9$$

e che riportiamo nella seguente tabella:

9	6	6	3	3	6
2	8	2	8	8	8
8	2	5	2	8	5
3	6	9	3	6	6
5	2	8	2	8	8
8	5	2	5	2	8

mentre gli elementi ulteriori si ottengono da:

$$z(i,j,3) = b(i,j,2) + a(i) + 9*j$$

La situazione finale che ci interessa è quella relativa agli elementi della matrice di terzo indice Z3 che riportiamo qui sotto:

21	27	36	42	50	63
19	34	37	52	61	70
19	22	34	40	55	61
21	33	45	48	60	69
19	25	40	43	58	67
19	25	31	43	49	64

A questo punto è necessario prendere in considerazione le tavole allegate al volume in esame e che riportiamo di seguito:

TAVOLA NUMERICA

a	b			c			d			e			f			g		
1	11	14	17	56	59	62	20	23	26	47	50	53	29	32	35	38	41	44
2	22	25	28	13	16	19	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64
3	60	63	66	51	54	57	42	45	48	33	36	39	24	27	30	15	18	21
4	14	17	20	59	62	65	23	26	29	50	53	56	32	35	38	41	44	47
5	25	28	31	16	19	22	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67
6	63	66	69	54	57	60	45	48	51	36	39	42	27	30	33	18	21	24
7	17	20	23	62	65	68	26	29	32	53	56	59	35	38	41	44	47	50
8	28	31	34	19	22	25	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70
9	66	69	72	57	60	63	48	51	54	39	42	45	30	33	36	21	24	27

DOPPIA TAVOLA LETTERALE

a	B						C						D					
1	d	e	f	ru	+	f	o	m	o	bi	ra	m	i	te	a	m	f	a
2	f	e	u	m	+	a	ju	p	c	co	t	c	+	+	p	p	a	+
3	e	s	te	t	+	n	+	a	i	de	ra	e	c	+	+	n	pe	m
4	t	n	d	so	c	fy	a	s	e	bi	da	s	+	j	u	l	o	+
5	o	u	o	ro	a	c	f	l	v	p	g	hi	r	b	+	mi	u	a
6	+	s	o	t	a	a	e	i	t	ci	l	m	+	t	+	di	j	+
7	m	+	do	v	f	c	e	s	s	bi	a	n	j	m	mi	o	o	a
8	o	p	u	n	ro	e	m	o	j	no	p	u	n	+	s	re	e	m
9	o	m	o	t	a	a	d	e	t	+	t	u	+	d	j	j	j	l

a	E					F					G							
1	+	i	t	ti	de	u	+	n	u	pe	oc	t	c	+	f	t	+	+
2	t	t	i	le	l	s	+	j	d	bi	i	u	a	s	o	t	a	s
3	c	j	c	i	s	u	+	c	i	n	ro	+	c	s	l	no	p	n
4	t	+	j	ti	o	u	a	m	+	ve	m	d	n	i	b	t	m	+
5	+	e	t	t	d	n	t	n	j	ti	j	nu	c	s	s	t	a	s
6	r	+	r	e	b	e	u	a	e	ra	u	h	j	s	c	p	j	t
7	l	i	n	ti	l	e	+	a	u	ve	e	r	l	g	mia	t	cu	m
8	+	t	t	d	m	p	n	a	+	de	j	u	c	s	c	t	a	s
9	e	j	r	b	b	e	r	qu	c	na	e	o	c	c	m	do	d	c

Confrontando gli elementi della matrice Z3 calcolati a partire dalla domanda formulata all'oracolo) con i numeri presenti nella tavola numerica allegata al volume ci si accorge tutti gli elementi della prima si ritrovano nella seconda.

Per poter arrivare alla risposta bisogna considerare ulteriormente la tabella formata dalla colonna di indice 1 che è quella formata dagli elementi ai mentre le rimanenti colonne sono quelle di Z3. Per comodità di lettura le singole colonne sono nuovamente individuate a partire dalla prima con le prime lettere dell'alfabeto come in figura Z4:

a	b	c	d	e	f	g
3	21	27	36	42	50	63
8	19	34	37	52	61	70
2	19	22	34	40	55	61
9	21	33	45	48	60	69
5	19	25	40	43	58	67
2	19	25	31	43	49	64

Finalmente possiamo ricavare la risposta operando nell'ordine seguente:

- 1) Si legge il valore a1 di Z4 che rappresenta l'indice di riga, sia della tavola numerica che letterale, su cui andare ad individuare la prima parola della risposta.
- 2) Si considera il valore b1, sempre su Z4.
- 3) Si cerca nella tavola numerica N il valore determinato nel punto 2 di b1 ed in corrispondenza si trova il nome della colonna a cui appartiene.
- 4) Si passa, infine, alla riga a1 della tavola letterale ed in corrispondenza della colonna di nome individuato nel punto 3 si ottiene nella prima delle 6 sottocolonne la prima sillaba che compone la prima parola della risposta.
- 5) La seconda sillaba della risposta la si ottiene considerando l'elemento c1 di Z4 ed operando poi come nei punti 3 e 4.

- 6) La prima parola viene completata quando si è determinata la sillaba corrispondente a g1.
- 7) La seconda parola della risposta la si trova partendo dal valore a2 ed operando secondo i precedenti punti.

La frase viene ultimata una volta che siano stati considerati tutti i valori della colonna *a* di Z4.

Nell'esempio da noi trattato si ottiene la seguente risposta:

ECCE OPTAS CUPIDO DONABIT GAUDIA CASUS

CONSIDERAZIONI SULL'ALGORITMO

Colui che ha costruito le tavole è partito da nove frasi in esametro (ognuna di senso compiuto) e una di esse poteva risultare la risposta generica alle questioni che più spesso venivano poste all'oracolo.

Risulta però interessante notare che combinando la prima parola di una qualsiasi delle nove frasi con una qualsiasi seconda parola dei nove esametri si ottiene comunque una risposta plausibile con il tema proposto.

Le frasi originarie erano le seguenti:

Dico	etenim	fausto	rumpet-tibi	foedera	fatum
Justa	petis	cupido	romplebit	talìa	casus
Ecce	scias	licite	non-indet	prospera	numen
Tanta	nimis	dubie	solvat-tibi	commoda	fydus
Forte	lubens	votis	promittit	gaudia	hic-annus
Jure	satis	certe	praedicat	jubila	thema
Mille	magis	dominans	vovet-tibi	saccula	carmen
Nonne	optas	juste	non-reddat	proemia	tempus
Credo	equidem	merito	donabit	debita	coelum

In questo modo si possono ottenere 9^6 risposte diverse in quanto una qualsiasi prima parola delle nove frasi può abbinarsi ad una qualsiasi delle seconde parole e così di seguito con le successive fino a formare una frase di

sei parole che rappresenta la risposta ad un quesito qualsiasi ma di tema generico.

L'oracolo che ovviamente doveva operare in presenza del *cliente*, doveva far porre ad esso il quesito e ricavarne la risposta, per cui era necessario mascherare l'algoritmo.

Le tavole si dovevano presentare illegibili ecco che quindi ogni parola di ogni frase viene scomposta secondo un codice prefissato come nel nostro caso la prima parola della prima frase *Dico* la si trova sulla prima riga della tavola letterale scomposta secondo il codice B-D-F-G-E-C, infatti la lettera d è posta nella prima delle sei caselle della colonna B, mentre la lettera i si trova sempre nella prima casella della colonna D, la terza lettera, la c, dovrebbe trovarsi nella prima casella della colonna F ma essendo la parola di solo quattro lettere l'autore ha preferito lasciarla vuota mettendo un simbolo convenzionale. E' ora chiaro che una volta che sono state riportate tutte le parole della prima frase, la prima riga della tavola risulta completa. La seconda frase viene allo stesso modo scritta nella seconda riga seguendo lo stesso codice o uno diverso. Riportiamo ora i vari codici relativi alle singole righe utilizzati nella costruzione delle tavole rinvenute.

- 1) B - D - F - G - E - C
- 2) C - B - D - E - F - G
- 3) G - F - E - D - C - B
- 4) B - D - F - G - E - C
- 5) C - B - D - E - F - G
- 6) G - F - E - D - C - B
- 7) B - D - F - G - E - C
- 8) C - B - D - E - F - G
- 9) G - F - E - D - C - B

E' interessante ora vedere come dalla domanda posta si riesca ad ottenere una risposta che abbia senso.

Ricordiamo brevemente che dalle singole lettere componenti la domanda, si ricavano attraverso una lunga ed elaborata procedura gli elementi della tabella Z4.

A prima vista si rimane sorpresi nell'osservare che tutti quanti gli elementi di Z4 sono presenti nella tavola numerica e che da essi si possa ricostruire una frase in uscita. In effetti ciò si spiega considerando le pro-

prietà dell'algoritmo utilizzato per calcolare gli elementi di Z_3 che formalmente si può esprimere:

$$(3b + a) \bmod 9 + a$$

esso al variare di a e di b nel sottoinsieme di $N [1...9]$

per	a=1	genera la terna	2 - 5 - 8
	a=2		4 - 7 - 10
	a=3		6 - 9 - 12
	a=4		5 - 8 - 11
	a=5		7 - 10 - 13
	a=6		9 - 12 - 15
	a=7		8 - 11 - 14
	a=8		10 - 13 - 16
	a=9		12 - 15 - 18

siamo ora sicuri che ad ogni quesito proposto certamente corrispondono numeri appartenenti a queste terne.

Prendiamo ora in considerazione la prima terna 2-5-8; da questa se ne possono ottenere sei, aggiungendo ad ogni elemento rispettivamente i primi sei multipli di 9 ossia:

$$\begin{array}{l} 11 - 14 - 17 \quad ; \quad 20 - 23 - 26 \quad ; \quad 29 - 32 - 35 \\ 38 - 41 - 44 \quad ; \quad 47 - 50 - 53 \quad ; \quad 56 - 59 - 62 \end{array}$$

ogni terna, come si può verificare, è stata disposta nella prima riga della tavola numerica secondo i valori crescenti sotto le colonne di nome uguale a quello stabilito dal codice usato per scomporre la prima frase nella tavola letterale. Analogamente si opera con le altre terne fino a completare la tavola numerica.

In sintesi possiamo affermare che tutto il procedimento si riduce ad una subroutine che genera sei numeri in corrispondenza della domanda formulata ed in tal senso la si può considerare *random*. I numeri che effettivamente determinano la risposta sono quelli della colonna di indice 1 individuata nelle tabelle dalla lettera a .

PRESENTAZIONE DEL PROGRAMMA DIMOSTRATIVO

A completamento del lavoro abbiamo realizzato un programma scritto in Turbo Pascal ver. 4.0 che ha preso lo spunto dall'antico metodo divinatorio e che nella stesura originaria lo riproduceva fedelmente. Successivamente, come spesso accade, presi dalla originalità e spinti dalle possibilità di sviluppo che si intravedevano siamo arrivati alla versione attuale che andiamo a descrivere nelle linee essenziali.

Il programma richiede in input oltre al nome di chi propone il quesito, la questione stessa, che viene memorizzata in un vettore.

Seguendo l'algoritmo esposto nella teoria da esso si ricavano gli elementi della tavola numerica.

Per evitare una risposta generica e dare invece più spessore al lavoro abbiamo ritenuto interessante cercare di avere risposte pertinenti anche a quesiti di natura più specifica.

Pertanto, è stato necessario poter *riconoscere* il contenuto specifico del tema proposto e poi attraverso tavole letterali (ognuna riguardante un settore, per es. salute, amore, economia) avere la relativa risposta.

BIBLIOGRAFIA

1. A. SGARRO, *Codici segreti*, Mondadori, 1989.
2. GODECHOT, *L'epoca delle rivoluzioni*, U.T.E.T., 1975.

L'elaborazione statistica dei dati

Roberto Parroni

0. Introduzione

La statistica è la disciplina che studia i fenomeni collettivi allo scopo di metterne in evidenza le regolarità. Il vocabolo *Statistica* deriva dal latino «*status*» perché inizialmente questa scienza si occupava esclusivamente degli avvenimenti dello Stato. La parola *Statistica* viene usata sia al singolare che al plurale.

Usata al singolare sta a significare l'insieme dei metodi e delle teorie che permettono di studiare i fenomeni collettivi, mentre usata al plurale sta ad indicare un insieme di dati numerici relativi a gruppi di persone o fatti in senso lato.

In tutti i problemi di statistica ci si trova di fronte ad un insieme di dati che sono stati raccolti in vista di determinati scopi. Poiché questi possono presentare diversi aspetti, oggi, nella statistica si presentano due rami principali: la *Statistica descrittiva* e la *Statistica inferenziale*.

La statistica descrittiva si ha quando lo studio del fenomeno collettivo si fa osservando interamente la collettività degli individui (cioè l'intera popolazione). Storicamente questa parte corrisponde alla prima fase degli studi statistici, quando lo scopo era proprio quello di raccogliere (e commentare) certi dati relativi allo stato.

La statistica inferenziale si ha quando lo studio del fenomeno collettivo si fa osservando soltanto una sua parte (detta *campione casuale*). Ad esempio, per sapere qual è il numero dei pezzi difettosi prodotti da una certa macchina non è comodo né economico esaminare l'intera produzione. Allora dall'intera produzione si estrae un campione scelto secondo opportuni criteri. La percentuale dei pezzi difettosi presenti nel campione dà un'idea di quella che, probabilmente, è la percentuale dei pezzi difettosi dell'intera produzione. Così anche, se chiedessimo a 1000 persone per chi voteranno il giorno prima delle votazioni, avremmo la possibilità di prevedere quale partito potrebbe vincere.

Questi metodi statistici, esposti qui molto sinteticamente, vengono poi applicati allo studio dei fenomeni nei vari campi, ed per questo che sono nate le statistiche applicate.

1. Fenomeni e metodi statistici

L'indagine statistica è basata sull'osservazione dei fenomeni che, naturalmente, possono manifestarsi nelle forme più varie. Per fenomeno intendiamo tutto ciò che accade intorno a noi o che noi stessi provochiamo. Tutti i fenomeni che si presentano sempre con le stesse caratteristiche sono detti *fenomeni tipici* (un fenomeno tipico è quello che nasce dall'osservare che un corpo abbandonato ad una certa altezza cade verso il basso a causa della forza di gravità).

Vi sono però dei fenomeni che si manifestano, ogni volta, con caratteristiche diverse per i quali è quindi difficile fare delle previsioni. Questi sono definiti *fenomeni atipici* (ne sono un esempio tutti i fenomeni meteorologici).

Quando invece si prendono in esame fenomeni come le nascite, i matrimoni, i fenomeni sociali, economici, ecc. che riguardano, appunto, delle collettività (note più comunemente con il nome di *popolazioni*) vengono detti fenomeni collettivi. In questo caso se si effettuano osservazioni numerose su tali fenomeni, essi rivelano determinate caratteristiche uniformi per cui si può dire che, pur essendo fenomeni atipici, considerati collettivamente, presentano un comportamento regolare che permette di studiarne le leggi che li governano.

I metodi di ricerca delle leggi statistiche sono principalmente due: il metodo *induttivo* e quello *deduttivo*.

Si ha il metodo induttivo quando, partendo dall'osservazione di singoli fatti, generalizzando, si risale alle leggi di carattere generale relative ai fatti studiati.

Nel caso invece che si stabiliscano a priori degli assiomi che si pongono come premessa al processo logico per poi, attraverso un ragionamento logico, ricavarne le conseguenze, si fa uso del metodo deduttivo.

Possiamo quindi dire che nel primo caso si procede dal particolare al generale, nel secondo dal generale al particolare.

Ora, poiché la statistica è uno strumento della ricerca scientifica basata sull'osservazione (viene infatti applicata a fenomeni naturali, economici, fisici, ecc.) non riproducibili per via sperimentale, è conveniente usare il metodo induttivo.

2. I dati statistici e la loro natura

La statistica non è solo necessaria allo studio di quelle scienze che non esisterebbero neppure senza il ricorso ad essa (quali la demografia, la sociologia, ecc.), ma ormai la sua utilità è accertata in tutti i rami delle scienze naturali, sociali, economiche e in particolare in quelle riguardanti

l'istruzione, il commercio, l'industria, l'agricoltura, il turismo, ecc. Ed è dai dati statistici che si apprendono le condizioni di una nazione. Infatti le caratteristiche demografiche di una nazione si compiono attraverso la determinazione del numero dei suoi abitanti riportati per sesso, per età, professione, ecc. Così, ad esempio, lo studio dell'infortunistica stradale viene fatto attraverso il computo del numero degli infortuni ripartiti secondo le modalità del loro verificarsi. È chiaro quindi che per queste indagini occorrono dei metodi appropriati.

L'insieme di questi metodi costituisce la *statistica metodologica*.

Viene definita *unità statistica* ciascuna osservazione fatta sul fenomeno da indagare. Esempi di unità statistiche sono rappresentati da ogni individuo di una certa popolazione, ogni nato, ogni studente, ogni infortunio sul lavoro, ecc. Queste unità statistiche vengono poi esaminate e classificate secondo certe caratteristiche. Ad esempio, nel caso si volesse studiare il fenomeno della mortalità in una certa popolazione, i morti possono essere distribuiti in vari gruppi: o secondo l'età in cui è avvenuto il decesso, o secondo le cause che l'hanno determinato, ecc. Il numero delle unità statistiche rilevate costituisce il cosiddetto *dato statistico*. Il dato statistico, quindi, non è altro che il risultato di diverse osservazioni effettuate su più fenomeni singoli. Nel caso che il dato statistico esprima quante volte si manifestata quella modalità, esso viene detto *frequenza* di quella modalità. Se invece esprime una misura (peso, lunghezza, velocità, volume, ecc.) il dato statistico viene detto *intensità* di quella modalità.

Sono dati statistici di frequenza il numero dei nati (o dei morti) in un certo periodo, il numero delle persone colpite da influenza, il numero di transazioni commerciali in un determinato settore, eccetera.

Sono dati statistici di intensità la quantità di merci oggetto di transazioni in un certo periodo ed in un certo settore, i salari corrisposti a determinate categorie dei lavoratori, eccetera.

L'intensità di un fenomeno collettivo può essere poi *globale* o *media*. È globale quando è la somma delle intensità di diversi fenomeni individuali mentre è media quando è un valore determinato variamente (come vedremo in altro capitolo).

Le unità statistiche vengono inoltre studiate secondo uno o più caratteri comuni che rappresentano gli aspetti che si vogliono mettere in evidenza e, successivamente, sono divisi rispetto alle varie modalità con cui tale carattere si manifesta.

Le modalità secondo cui vengono classificate le unità statistiche possono essere *quantitative* o *qualitative*.

Le modalità quantitative sono espresse da numeri risultanti da misurazioni o da enumerazioni (es. la rilevazione dei redditi di una

popolazione, le altezze dei militari di leva, il numero dei vani degli alloggi in un comune, ecc.).

Le modalità qualitative sono espresse da attributi (es. la rilevazione della popolazione italiana secondo lo stato civile, il colore degli occhi della popolazione di un paese, ecc.).

Per chiarire meglio quanto detto osserviamo le seguenti tabelle:

<i>Colore degli occhi</i>	<i>Numero di studenti</i>
Celeste	12
Grigio	7
Castano	24
Nero	4
Totale	47

« *Colore degli occhi* » = carattere qualitativo

« *Celeste, grigio, ...* » = modalità

« 12, 7, 24, 4 » = dati statistici.

I numeri 12, 7, 24, 4 rappresentano anche le frequenze.

<i>Frutta</i>	<i>Quantità</i>
Mele	4000
Pere	2850
Pesche	2500
Ciliege	1050
Uva	5000
Totale	15.400

« *Frutta* » = carattere qualitativo

« *Mele, pere, pesche, ciliegie, uva* » = modalità

« 4000, 2850, 2500, 1050, 5000 » = dati statistici.

I numeri 4000, ..., 5000 rappresentano le intensità.

<i>Numero delle stanze</i>	<i>Numero delle abitazioni</i>
1	2015
2	3203
3	4506
4	5324
5	4813
6	2906
7	1341
Totale	24108

«Numero delle stanze » = carattere quantitativo

« 1,2, 3, 4, 5, 6, 7 » = modalità

«2015, , 1341 » = dati statistici (che rappresentano le frequenze).

3. Le rilevazioni statistiche

La prima operazione da compiere per analizzare un fenomeno collettivo, è quella della rilevazione, la quale consiste nella raccolta dei dati statistici riguardanti i fenomeni individuali che compongono il fenomeno collettivo oggetto dell'indagine. Una rilevazione statistica può avere caratteristiche diverse e può essere:

saltuaria o continua

pubblica o privata

parziale o totale

diretta o indiretta

preliminare o definitiva

Ad esempio un censimento è una rilevazione saltuaria, pubblica e totale. Per avere i dati dei nati in una certa popolazione (o la quotazione di alcune merci) si richiedono, invece, rilevazioni continue, pubbliche e complete.

Una rilevazione statistica richiede, innanzitutto, l'esatta definizione del fenomeno da rilevare ed occorre anche stabilire il *modo*, il *tempo*, e lo *spazio* in cui essa deve essere effettuata e quali sono gli organi ed i mezzi interessati alla rilevazione.

Il *modo* secondo cui può essere condotta la rilevazione si distingue in:

automatica quando deriva da dichiarazioni provenienti direttamente dalle persone interessate (es. le rilevazioni dell'ufficio di stato civile per le nascite, i morti, i matrimoni, ecc.);

riflessa quando i dati vengono raccolti da appositi rilevatori (es. il censimento).

Riguardo al tempo la rilevazione può essere:

continua quando le rilevazioni vengono registrate man mano che i fenomeni si verificano;

periodica quando viene effettuata ad intervalli regolari di tempo (es. il censimento);

occasionale quando viene compiuta senza alcuna periodicità (es. la rilevazione dei danni provocati da una guerra, oppure i sondaggi politici).

Gli organi che eseguono le rilevazioni statistiche possono *pubblici* o *privati*. Le rilevazioni compiute dagli organi pubblici riguardano fenomeni di interesse pubblico come, ad esempio, quelle di carattere demografico ed economico. In Italia il principale organo pubblico dedito agli studi di statistica è l'ISTAT. Le rilevazioni private sono compiute da imprese commerciali su determinati fenomeni che rivestono particolare interesse di ricerca per alcuni privati.

Per quanto riguarda i mezzi con i quali possono essere condotte le rilevazioni statistiche diciamo soltanto che per le rilevazioni automatiche si usano registri, ruoli, ecc., mentre per quelle riflesse si usano dei questionari.

4. Lo spoglio dei dati

Una volta ultimata la raccolta delle unità statistiche si riunisce tutto il materiale e si procede a controlli di natura diversa per cercare di eliminare inesattezze ed errori. Una volta eseguiti i controlli si passa allo spoglio ed alla classificazione dei risultati raggruppando gli elementi raccolti secondo i caratteri prestabiliti formando delle tabelle di spoglio. Queste sono costituite da varie colonne o righe che sono riferite ai diversi caratteri del fenomeno collettivo che sono stati oggetto della rilevazione. In ciascuna colonna (o riga) vengono riportati i rispettivi dati di frequenza che sono stati rilevati. Le tabelle statistiche si dividono in *semplici*, *complesse* e *a doppia entrata*.

Le tabelle semplici sono prospetti nei quali sono elencate le modalità qualitative o quantitative del fenomeno in esame ed a fianco le relative frequenze o intensità.

Esempio. Riportiamo una tabella semplice riguardante la distribuzione di una popolazione di 10.000 individui secondo la statura suddivisa in classi di intensità di 10cm in 10cm a partire dall'altezza di 120cm:

<i>Statura</i>	<i>Frequenza</i>
120-130	4
130-140	15
140-150	136
150-160	2324
160-170	5604
170-180	1801
180-190	98
190-200	18
TOTALE	10.000

Le tabelle complesse possono ritenersi una composizione di tabelle semplici che presentano dati statistici riguardanti più fenomeni.

<i>Osservatori</i>	<i>Pressione media</i>	<i>Umidità relativa</i>	<i>Sereno</i>	<i>Misto</i>	<i>Coperto</i>
Torino	1016,2	80	104	112	150
Milano	1017,3	77	103	101	161
Venezia	1015,5	76	112	127	127
Bologna	1016,8	72	106	109	150
Firenze	1015,6	71	97	115	154
Roma	1015,8	72	119	147	100
Pescara	1014,9	75	109	127	130
Napoli	1015,2	69	107	127	132
Palermo	1015,1	60	121	141	104
Cagliari	1016,5	69	125	144	96

Quando lo spoglio delle unità statistiche è stato effettuato secondo due caratteri (ad esempio numero di abitanti e numero di stanze per unità abitative), l'osservazione di ogni unità statistica conduce a due risultati. Allora per la rappresentazione di queste distribuzioni statistiche si fa uso delle tabelle a doppia entrata:

<i>Prof.ne padre</i>	<i>Licei Cl. e Sci.</i>	<i>Ist.Tecnici</i>	<i>Ist.Prof.</i>	<i>Totale</i>
<i>Agricoltori</i>	50	160	90	300
<i>Artigiani</i>	20	50	30	100
<i>Commercianti</i>	60	110	30	200
<i>Impiegati</i>	150	440	110	700
<i>Liberi Prof.sti</i>	90	50	10	150
<i>Operai</i>	10	60	330	400
<i>Altre Prof.ni</i>	20	30	100	150
Totale	400	900	700	2000

Le modalità del primo carattere sono rappresentate dal tipo di scuola, mentre quelle del secondo carattere sono rappresentate dalla professione del padre. In questo caso tanto le modalità del primo carattere quanto quelle del secondo sono qualitative.

5. Serie e seriazioni statistiche

Prima di procedere all'elaborazione dei dati bisogna fare una distinzione fra le distribuzioni statistiche provenienti da caratteri qualitativi da quelle provenienti da caratteri quantitativi

Orbene definiamo *serie statistica* una distribuzione statistica a carattere qualitativo. Chiameremo invece *seriazione statistica* una distribuzione avente carattere quantitativo.

Così, ad esempio, una distribuzione di dati statistici riguardanti una popolazione ripartita secondo la professione degli abitanti costituisce una serie statistica. Così è pure una serie statistica la distribuzione degli individui di una collettività secondo il colore degli occhi.

Se invece consideriamo una distribuzione di dati statistici riguardanti la ripartizione dei contribuenti secondo l'ammontare delle imposte cui sono soggetti, si ha una seriazione poiché la modalità assunta a base della ripartizione è di carattere quantitativo. Costituisce anche una seriazione la ripartizione di 1000 container di un cargo secondo classi di peso. Quindi, per distinguere una serie da una seriazione è sufficiente stabilire se il carattere è qualitativo o quantitativo.

Tra le serie statistiche rivestono particolare importanza le *serie temporali* (o *serie storiche*) e quelle di *luogo* (o *territoriali*).

Sono serie temporali quelle in cui viene esposta la distribuzione di un dato fenomeno nel tempo. Tipici esempi ne sono i dati statistici relativi alle produzioni industriali nei vari anni, quelli relativi alla natalità (o mortalità) distinti per giorni, mesi, anni, ecc. A loro volta le serie storiche possono essere *statiche* (quando non vi sono variazioni apprezzabili) e *dinamiche* (quando il fenomeno preso in considerazione tende a diminuire o ad aumentare).

Una serie è di luogo (o territoriale) quando la distribuzione del fenomeno avviene nello spazio. Ad esempio, la serie dei nati in Italia in un dato anno distinti per regione costituisce una serie territoriale.

Per concludere possiamo dire che, rispetto alla disposizione da darsi alle modalità del fenomeno preso in considerazione, le serie statistiche si distinguono in:

- a) *Serie rettilinee* che sono quelle le cui modalità vengono disposte secondo un ordine logico o naturale dal principio alla fine (es. è rettilinea la serie temporale dei nati vivi in Italia, di anno in anno, dal 1991 al 2001;
- b) *Serie cicliche* che sono quelle le cui modalità si succedono secondo un ordine logico il quale però si ripete ciclicamente. Ne costituiscono un tipico esempio quelle che espongono dati relativi alle stagioni;
- c) *Serie sconnesse* che sono quelle le cui modalità non necessitano di alcun ordine. È sconnessa, ad esempio, la serie che rappresenta la distribuzione di una data popolazione secondo la professione o la religione degli individui.

Numeri q -perfetti e q -amicabili di seconda specie e altre generalizzazioni dei numeri perfetti di seconda specie

Eugeni Franco

Università degli studi di Teramo

Ippoliti Gianluca

Dottorando dell'Università degli studi di Teramo

Nel presente lavoro si affronta, tra le curiosità matematiche, il problema dei numeri perfetti di seconda specie, riprendendo anche un lavoro del 1979 di Franco Eugeni e Bruno Rizzi, utilizzato come preambolo e spunto per le problematiche lasciate aperte su tali concetti, e le loro generalizzazioni tra le quali quella dei numeri q -perfetti di 2^a specie. Il presente file si compone infatti di:

1. *Su alcune generalizzazioni dei numeri perfetti*, tratto dal periodico di matematiche serie V Volume 56 del 1980 riguardanti i numeri 1-perfetti di 2^a specie e alcune problematiche dei numeri q -perfetti di 2^a specie. Il testo è corredato di note scritte in questa occasione.
2. Un lavoro che appare qui per la prima volta in cui è trattato, per quanto sia possibile, il caso $q > 1$ per la suddetta generalizzazione dei numeri perfetti di 2^a specie e una diversa generalizzazione dei numeri perfetti di 2^a specie insieme a risultati sul problema delle coppie di numeri amicali di seconda specie, per entrambe le generalizzazioni.

Introduzione.

Il problema dei numeri perfetti ha origini antiche, essendo dovuto ad Euclide (IV secolo a. C.). Egli definì numeri perfetti quei naturali la cui somma dei divisori inferiori eguaglia il numero stesso. Definita la funzione σ come $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ è

chiaro che il problema si può esprimere nei seguenti termini: n è perfetto se e solo se $\sigma(n) - 2n = 0$. Euclide stesso, posto il problema, caratterizzò completamente i

numeri perfetti pari, mentre ancora oggi non è stato risolto, in maniera generale, quello dei perfetti dispari. In particolare non si conosce nessun numero perfetto dispari e né se ne esistano. La cosa però veramente interessante è che intorno al problema dei numeri perfetti siano nati, nel corso dei secoli, altri concetti, generalizzazioni e problemi che riguardano tali generalizzazioni, problemi, alcuni di essi tuttora irrisolti, che hanno affascinato schiere di matematici *professionisti* e dilettanti, uomini di cultura, studiosi e un vero e proprio popolo di *curiosi*. In questo lavoro ci occupiamo, appunto, di una parte di questi problemi, con qualche risultato originale. Una di queste problematiche riguarda le coppie di numeri amichevoli che sono quelle coppie di numeri naturali per le quali la somma dei divisori inferiori dell'uno eguaglia il valore dell'altro (è facile provare che (m, n) è una coppia di numeri amichevoli se e solo se $\sigma(n) = \sigma(m) = m + n$).

Nella prima parte riportiamo anastaticamente l'articolo summenzionato, corredato, però da note a piè di pagina scritte per l'occasione, dove incontreremo una prima variazione, la più nota, sul concetto di numero perfetto (ovvero quella di numero perfetto di seconda specie) e una sua generalizzazione (ovvero quella di numero q -perfetto di seconda specie).

Nella seconda parte riprendiamo alcuni concetti/problemi della prima parte e forniamo una ulteriore generalizzazione dei numeri perfetti (ovvero quella che noi abbiamo chiamato numeri perfetti di seconda specie di ordine k) e il legame tra le due diverse generalizzazioni e risolviamo completamente i problemi collegati alle definizioni generalizzate dei numeri amichevoli di seconda specie. Si sono usate, qui, le stesse notazioni e simboli della prima parte tranne per quello che riguarda la funzione prodotto dei divisori di un numero naturale, per la quale nella seconda parte si è preferito usare $\pi(n)$ piuttosto che $p(n)$, e per l'insieme dei numeri primi che, sempre nella seconda parte, si è denotato con $\mathbb{P}$.

Franco Eugeni - Bruno Rizzi

Su alcune generalizzazioni dei numeri perfetti

1. Introduzione

E' ben noto come dai Pitagorici in avanti i numeri perfetti siano stati oggetto di osservazioni, studio, congetture. Nell'antichità si partì dalla osservazione che i numeri 6 e 28 sono eguali alla somma delle loro parti aliquote, ossia alla somma dei loro divisori inferiori al numero stesso. Risulta cioè:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

anzi la divisione tramandataci da Nicomaco (I sec. d. C.) e Teone di Smirne (III sec. d. C.) è più fine, nel senso che dividevano i numeri in *mancanti*, *perfetti*, *abbondanti* a seconda che la somma delle parti aliquote è minore, eguale o maggiore del numero stesso — così 8 è un numero mancante, 12 è un numero abbondante, risulta cioè:

$$8 > 1 + 2 + 4 \qquad 12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$$

Non si sa se esistono numeri perfetti dispari a parte il fatto che, come ha dimostrato Catalan, se ne esistono devono avere almeno 45 cifre. Abbiamo accennato ai numeri perfetti pari, questi come hanno dimostrato Euclide (III sec. a. C.) ed Eulero (1707 - 1783), sono tutti della forma

$$E_p = 2^{p-1} (2^p - 1)$$

essendo p e $2^p - 1$ numeri primi.

Non si sa attualmente se i numeri perfetti pari sono in numero finito o infinito, dipendendo ciò dalla caratterizzazione dei numeri primi di Mersenne (1588 - 1648):

$$2^p - 1.$$

Si può ben dire che lo studio di questi numeri ha condotto ad importanti risultati relativamente alla conoscenza concreta di numeri primi via via più grandi. Così ad esempio negli anni 50 il più grande numero primo conosciuto era $2^{127} - 1$, oggi $2^{44497} - 1$, numero formato da ben 13395 cifre.

Le enormi difficoltà incontrate nello studio dei numeri perfetti hanno fatto sì che i matematici affrontassero problemi che presentano varianti e analogie con gli stessi.

Così alla fine del secolo scorso sono nati i numeri perfetti di 2^a specie che presentano la variante di considerare il prodotto, anziché la somma, delle parti aliquote.

Nel nostro lavoro abbiamo ottenuto nuovi risultati su generalizzazioni dei numeri perfetti di 2^a specie.

2. Definizioni e risultati

Come si legge (1) nel Dickson, E. Lionnet (1879) chiama: *numeri perfetti di 2^a specie quei naturali n , più grandi di uno ($n \in N_2$), che sono uguali al prodotto dei divisori inferiori (cioè diversi da n stesso) di n .*

In simboli se $p(n)$ denota il prodotto di *tutti* i divisori di n , risulta se n è perfetto di 2^a specie:

$$p(n) = n^2 \quad (2.1)$$

(ad es. se $n = 8$ poichè i divisori di 8 sono 1, 2, 4, 8 il loro

(1) Cfr [2] pag. 58

prodotto è 64 perciò 8 è un numero perfetto di 2^a specie).

Sarà utile nel seguito dedurre (1) una espressione della funzione aritmetica $p(n)$.

Se f è una qualsiasi funzione *incondizionatamente additiva*, i. a. (2) e se $v(n)$ indica il numero dei divisori di n

funzione che come è noto quando $n = \prod_1^r p_i^{\alpha_i}$ si esprime tramite la

$$v(n) = \prod_1^r (1 + \alpha_i)$$

vale (3) l'*identità di Pellegrino* (caratteristica per le funzioni incondizionatamente additive):

$$\sum_{d|n} f(d) = \frac{1}{2} v(n) f(n) \quad (2.3)$$

Dalla identità (2.3) posto $f(n) = \log n^k$ ($k \in N_1$) si ha:

$$\sum_{d|n} \log d^k = \log \prod_{d|n} d^k = \log n^{k \cdot v(n)/2}$$

da cui detto $p_k(n)$ il prodotto delle potenze k -me dei divisori di n si ottiene (4):

(1) Una espressione si trova in Cipolla [1] che la deduce da considerazioni sul cosiddetto *fattoriale integrale* dicendo che è una formula nota, ma senza citarne le « introvabili » fonti.

(2) Una funzione aritmetica è i. a. se $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ Cfr. ad es. B. Rizzi [4].

(3) Cfr. F. Pellegrino [3], si tratta di una comunicazione ad un congresso U.M.I. del 1951 ove la formula è data senza dimostrazione.

(4) Si noti che come facilmente si prova $n^{k \cdot v(n)/2}$ è sempre intero, poichè se uno almeno degli esponenti di un primo che divide n è un dispari $v(n)$ è pari. Altrimenti se tutti gli esponenti dei primi che dividono n sono pari, n è un quadrato (perfetto).

$$p_k(n) = \prod_{d|n} d^k = n^{k \cdot \nu(n)/2} \quad (2.4)$$

che per $k = 1$, posto $p_1 = p$ fornisce l'espressione richiesta.

Diamo la seguente dimostrazione del:

Teorema (2.1) (di Lionnet): I numeri perfetti di 2ª specie sono tutti e soli i cubi di un numero primo e i numeri secondi (prodotto di due primi distinti).

Dim. Si vede direttamente che se $n = p^3$ oppure $n = p_1 p_2$ vale la (2.1).

Inversamente se $n \in N_2$ soddisfa la (2.1) riesce per la (2.4):

$$p(n) = n^{\nu(n)/2} = n^2$$

e quindi i numeri perfetti di 2ª specie sono tutti e soli quelli per cui:

$$\nu(n) = 4.$$

Ora se $n = \prod_1^r p_i^{\alpha_i}$ deve essere per la (2.2)

$$\prod_1^r (1 + \alpha_i) = 1.4 = 2.2$$

Dunque si può avere che $r = 1$ con $1 + \alpha = 4$, $\alpha = 3$ oppure $r = 2$ con $1 + \alpha_1 = 1 + \alpha_2 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e quindi è $n = p^3$ ovvero $n = p_1 p_2$ C.V.D.

Una prima generalizzazione potrebbe nascere chiamando *amicabili di 2ª specie una eventuale coppia (m, n) di naturali tra loro distinti, maggiori, di uno, tali che il prodotto dei divisori inferiori dell'uno eguaglia l'altro.*

Tuttavia questa definizione è una definizione vuota, in quanto come proveremo siffatti numeri non esistono. Premettiamo il

Lemma: Condizione necessaria a che $m, n \in N_2$, $m \neq n$,

¹ Diamo qui una breve dimostrazione: l'identità di *pellegrino* è equivalente a $\nu(n) \cdot f(n) = 2 \sum_{d|n} f(d)$. Indicando con $d_1, d_2, \dots, d_{\nu(n)}$ i divisori di n e con d_i' il divisore "complementare" di d_i

siano amichevoli di 2ª specie è che m e n abbiano gli stessi fattori primi.

Dim. La definizione degli « eventuali » numeri amichevoli di 2ª specie si traduce in formule nella:

$$p(n) = p(m) = m \cdot n$$
 ovvero per la (2.4) nella:

$$m^{\nu(m)/2} = n^{\nu(n)/2} = m \cdot n$$

Essendo $m, n \in N_2$ è $\nu(m) \geq 2, \nu(n) \geq 2$, segue che se $p|m$ allora necessariamente $p|n$ ed inversamente. C.D.V.

Dimostriamo poi il:

Teorema (2.2): Non esistono numeri amichevoli di 2ª specie.

Dim: Siano $m, n \in N_2$ con $m \neq n$ due eventuali numeri tra loro amichevoli di 2ª specie. Posto

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}, \quad m = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}, \quad \text{segue:}$$

$$m^{\nu(n)/2} = n^{\nu(n)/2} = m \cdot n$$

da cui si deducono le identità:

$$\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i \nu(n)/2} = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i \nu(n)/2}$$

$$\alpha_i \nu(m) = \beta_i \nu(n) = 2(\alpha_i + \beta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

Posto, come è usuale (1), $\Omega(n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, e som-

(1) La funzione $\Omega(n)$ è una funzione incondizionatamente additiva (cfr. [4]) che esprime il numero dei fattori distinti e no di n .

ovvero tale che $n = d_i d_i'$, si ha, essendo f incondizionatamente additiva, $f(n) = f(d_i) + f(d_i')$, $\forall i = 1, \dots, \nu(n)$.

Si ha, allora, che
$$\sum_{i=1}^{\nu(n)} f(n) = \sum_{i=1}^{\nu(n)} (f(d_i) + f(d_i')) \quad \text{cioè} \quad \nu(n) f(n) = 2 \sum_{d|n} f(d).$$

mando le precedenti si deduce, l'identità:

$$(*) \quad \Omega(m) \vee (m) = \Omega(n) \vee (n) = 2 \Omega(m \cdot n)$$

per la coppia (m, n) . Mostriamo che tale relazione non può sussistere per alcuna coppia di numeri. Ad esempio scrivendo:

$$\begin{cases} \Omega(m) \vee (n) = 2 \Omega(n) + 2 \Omega(m) \\ \Omega(n) \vee (n) = 2 \Omega(n) + 2 \Omega(m) \end{cases}$$

si ricava:

$$(\vee(m) - 2) \Omega(m) = 2 \Omega(n)$$

$$(\vee(n) - 2) \Omega(n) = 2 \Omega(m)$$

da cui:

$$(\vee(m) - 2) (\vee(n) - 2) = 4.$$

Da questa ultima, necessariamente vera se m, n soddisfano la ipotesi iniziale, si deducono le due alternative:

$$\begin{cases} \vee(n) = 4 \\ \vee(m) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \vee(m) = 6 \\ \vee(n) = 3 \end{cases}$$

Nel primo caso per il Lemma premesso n ed m sono o entrambi il cubo di un primo o entrambi un numero secondo e quindi tra loro eguali contro l'ipotesi.

Nel secondo caso da $\vee(n) = 3$ si deduce $n = p^4$ e quindi sempre per il Lemma: $m = p^x$ con $x + 1 = 6$.

Ma come si prova direttamente p^4 e p^7 non possono essere amichevoli di 2ª specie. C.V.D.

Non è possibile dunque per il teorema provato con-

siderare l'insieme degli amicabil di 2^a specie essendo questi vuoti.

In questo contesto si può anche inquadrare un vecchio problema posto (1) da Paul Halcke (1719):

Determinare i numeri naturali $n \in N_2 - \mathcal{P}$ per i quali esistano $q, m \in N_1$ tali che il prodotto dei divisori di n che non superano n sia m^q .

Il problema per via della (2.4) si traduce nella:

$$\frac{1}{n} \prod_{d|n} d = n^{\frac{v(n)}{2}-1} = m^q \quad (2.5)$$

Il problema di Halcke è completamente risolto dal seguente teorema che non ci risulta noto:

Teorema (2.3): Fissato comunque $n \in N_2 - \mathcal{P}$, con $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, la relazione (2.5) è soddisfatta da tutte e sole le coppie (q, m) tali che:

$$q \mid \alpha_i \left(\frac{v(n)}{2} - 1 \right) \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (2.6)$$

e con m avente gli stessi fattori primi di n , cioè del tipo:

$$m = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i} \quad \text{e con gli esponenti dati dalle:}$$

$$\beta_i = \frac{1}{q} \cdot \alpha_i \left(\frac{v(n)}{2} - 1 \right) \quad (2.7)$$

Dim. Ogni coppia (q, m) soddisfacente le (2.6) e (2.7) soddisfa (2.5).

(1) [2] pag. 158. Se $n = 1$, o $n \in \mathcal{P}$ si hanno casi così banali e non significativi che è opportuno escludere dal problema generale.

Inversamente se (m, q) è una coppia soddisfacente la (2.5) e cioè tale che:

$$n^{\frac{\nu(n)}{2} - 1} = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1 \right)} = m^q$$

per essere $\nu(n) \neq 2m$ ha necessariamente gli stessi fattori primi di n e posto $m = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$ risulta:

$$\alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1 \right) = \beta_i q \quad i = 1, 2, \dots, r$$

e quindi le (2.6) con gli esponenti β_i di m dati dalle (2.7). C.V.D.²

Un caso particolare del *problema di Halcke* è quello dei numeri (1) che chiameremo *q-perfetti di 2ª specie*.

Chiamiamo così quei naturali $n \in \mathbb{N}_2$ tali che il prodotto dei divisori inferiori eguaglia il prodotto di k numeri eguali ad n . In simboli:

$$\frac{1}{n} \prod_{d|n} d = n^{\frac{\nu(n)}{2} - 1} = n^q \quad (2.8)$$

ovvero:

$$p(n) = n^{q+1} \quad (2.9)$$

(1) Un naturale n si dice *q-perfetto di 1ª specie* quando la somma dei divisori di n , inferiori ad n , eguaglia la somma di q naturali eguali ad n . In simboli $\sigma(n) = (q+1)n$. Per $q=1$ si hanno i perfetti di 1ª specie.

Si tratta dunque del problema di Halcke, per $m = n$. Da notare che per $q = 1$ si ritrova la definizione dei numeri perfetti di 2^a specie. Il teorema (2.3) si specializza nel seguente:

Teorema (2.4): Fissato comunque $n \in \mathbb{N}_1 - \mathcal{P}$, C.N.E.S. a che n sia q -perfetto è che sia:

$$\nu(n) = 2(q + 1) \quad (2.10)$$

Dim. Segue subito dalla dimostrazione del teorema precedente ripetuta in questo caso, osservando che la relazione:

$$\alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1 \right) = \beta_i q$$

per essere $\alpha_i = \beta_i$ e per il fatto che $\frac{\nu(n)}{2} - 1$ non è in generale un intero si scrive:

$$\nu(n) - 2 = 2q.$$

Vogliamo ora pervenire, fissato q , ad una costruzione dei numeri q -perfetti. Il problema è quello di trovare tutti

gli $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ tali che:

$$\nu(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i} = 2(q + 1)$$

Siano: $m_1, m_2, \dots, m_k$ un qualsiasi sistema completo di k divisori di $2(q + 1)$, cioè tali che $\prod_{i=1}^k m_i = 2(q + 1)$ e sia $1 \leq k \leq \Omega(2(q + 1))$. Gli interi n aventi k fattori primi arbitrari $p_1, \dots, p_k$ sono q -perfetti se e solo se gli

² Naturalmente questo significa che $\forall n \in \mathbb{N}_1 - \mathcal{P}$, esiste un'opportuna scelta della coppia (m, q) in modo che l'identità (2.5) sia vera. Precisamente se n non è un quadrato perfetto (dunque $\nu(n)$ è pari ed è comunque $\nu(n) > 2$ quindi $\frac{\nu(n)}{2} - 1 \in \mathbb{N}_1$): $q = \frac{\nu(n)}{2} - 1$ e $\beta_i = \alpha_i$ (dunque $m = n$);

se n è un quadrato perfetto (dunque $\alpha_i \in 2\mathbb{N}$, $\nu(n)$ è dispari ma comunque $\nu(n) > 2$): $\beta_i = \frac{\alpha_i}{2}$
(dunque $m = \sqrt{n}$) e $q = \nu(n) - 2$.

esponenti $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ degli stessi sono dati dalle relazioni:

$$\alpha_i = m_i - 1 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

al variare, in tutti i modi possibili, del sistema completo di k divisori.

Così ad esempio se $q + 1 = p \in \mathcal{P}$ si hanno i numeri del tipo $p_1^{\alpha_1}$ e $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ essendo $k=1, 2$ con $\alpha=2$ ($q + 1$), e $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2q + 1 = p-1$ e cioè i numeri del tipo $p_1^{2(q+1)}$, $p_1 p_2^{2q+1}$ con p_1 e p_2 arbitrari sono tutti e soli i numeri q -perfetti quando $q+1$ è primo.³

comp. (1974).

BIBLIOGRAFIA

1 M. CIPOLLA

Sui principi del calcolo aritmetico-integrale.

Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali, serie 5°, vol. VIII, Catania, 1915

2 L. E. DICKSON

History of the theory of numbers vol. I, Chelsea, New Work, (1971).

3 F. PELLEGRINO

Sviluppi moderni del calcolo numerico-integrale di Michele Cipolla. Atti IV Congresso U.M.I., Taormina, 1951.

4 B. RIZZI

L'albero e il traliccio degli interi. Periodico di Matematiche; serie V, vol. 49, 1973.

³ Refuso si stampa: $\alpha = 2q + 1$ e $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = p - 1 = q$ quindi p_1^{2q+1} , $p_1 p_2^q$ con p_1 e p_2 primi arbitrari distinti sono tutti e soli i numeri q -perfetti di 2ª specie quando $q + 1$ è primo.

2.1 Le generalizzazioni dei numeri perfetti di seconda specie.

Le generalizzazioni dei numeri perfetti di seconda specie più note sono di due tipi. la prima l'abbiamo vista nella prima parte e riguarda i numeri q -perfetti di 2^a specie che qui, brevemente, richiamiamo e sulla quale puntualizziamo i risultati noti.

Definizione 2.1.1. Sia $q \in \mathbb{N}_1$, un numero $n \in \mathbb{N}_2$ è detto q -perfetto di 2^a specie se il prodotto dei suoi divisori inferiori ad n eguaglia la potenza di ordine q di n stesso.

È chiaro che per $q = 1$ si ritrovano i numeri perfetti di 2^a specie che qui chiameremo, dunque, 1-perfetti di 2^a specie. Utilizzando la funzione π , che associa ad un numero n il prodotto di tutti i suoi divisori: $\pi(n) = \prod_{d|n} d$, un numero

n è q -perfetto di 2^a specie se $\frac{\prod_{d|n} d}{n} = n^q$ ovvero se $\prod_{d|n} d = n^{q+1}$. Si ha così modo di

sfruttare l'identità $\pi_k(n) = \prod_{d|n} d^k = n^{\frac{k \nu(n)}{2}}$, (2.4) della prima parte con $k = 1$, dove

con $\nu(n)$ si è indicata la funzione numero di divisori.

Sarà appena il caso di ricordare che, se $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ è la fattorizzazione in primi di

n , l'espressione per $\nu(n)$ è data da $\nu(n) = \prod_{i=1}^r (1 + \alpha_i)$, come già visto nella prima

parte. È questa una delle più note funzioni aritmetiche insieme alla funzione σ , somma dei divisori, già incontrata con i numeri perfetti di 1^a specie, la quale è moltiplicativa⁴. Ricordiamo inoltre che $\nu(0)$ non è definita, $\nu(1) = 1^5$, $\nu(n) = 2$ se e solo se n è primo, $\nu(n)=3$ se e solo se n è il quadrato di un primo⁶, $\nu(n) \geq 4$ per tutti gli altri naturali, dove l'uguaglianza si ha solo per i numeri secondi (non quadrati) e per i cubi di un primo i quali, come abbiamo già visto nella prima parte, costituiscono tutti e soli i numeri 1-perfetti di 2^a specie. Infine ricordiamo (vedi nota 4 della prima parte) che $\nu(n)$ è pari se e solo se n non è un quadrato

perfetto e, quindi, $n^{\frac{\nu(n)}{2}}$ è una potenza intera di n (o della sua radice quadrata, se n è un quadrato perfetto).

⁴ Una funzione aritmetica f è moltiplicativa se $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n) \forall m, n \in \mathbb{N}_1$ tali che $(m, n) = 1$, ovvero relativamente primi tra loro.

⁵ Sebbene 1 soddisfi l'uguaglianza (2.1.1), per definizione esso non è q -perfetto qualunque sia il valore di q .

⁶ Questi ultimi due casi contemplano tutti numeri che, in analogia con quanto accade con i numeri perfetti di prima specie, a partire dalla definizione 2.1.2 chiameremo q -mancanti di seconda specie, qualunque sia il valore di $q \in \mathbb{N}_1$.

A questo punto possiamo continuare dicendo che un numero $n \in \mathbb{N}_2$ è q -perfetto di 2^a specie se e solo se

$$(2.1.1) \quad n^{\frac{\nu(n)}{2}} = n^{q+1},$$

ovvero, essendo $n > 1$, se e solo se $\frac{\nu(n)}{2} = q + 1$ ovvero se e solo se, infine, $\nu(n) = 2(q+1)$.

Dunque essere q -perfetto per $n \in \mathbb{N}_2$ dipende solo ed esclusivamente dal numero dei suoi divisori e dalla fattorizzazione di $2(q+1)$.

Di seguito riportiamo una prima casistica non generale di numeri q -perfetti di seconda specie al variare di q , per i quali non riportiamo le dimostrazioni.

Valori di q	Valori di $\nu(n)$	Caratterizzazione dei numeri q -perfetti di 2 ^a specie
$q = 0$	$\nu(n) = 2$	Numeri primi
$q = 1$	$\nu(n) = 4$	Numeri perfetti di 2 ^a seconda specie, ovvero numeri secondi non quadrati oppure cubi di un primo
$q = 2$	$\nu(n) = 6$	$n = p_1^5$ oppure $n = p_1^2 p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro
$q = 3$	$\nu(n) = 8$	$n = p_1^7$ oppure $n = p_1^3 p_2$ oppure $p_1 p_2 p_3$ con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro
$q = 4$	$\nu(n) = 10$	$n = p_1^9$ oppure $n = p_1^4 p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro
$q = 5$	$\nu(n) = 12$	$n = p_1^{11}$ oppure $n = p_1^5 p_2$ oppure $n = p_1^3 p_2^2$ oppure $p_1^2 p_2 p_3$ con $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro

E se estendessimo la definizione di numeri q -perfetti a valori di q non interi? In questo caso si seguirebbero ad avere numeri q -perfetti a condizione che $2q \in \mathbb{N}_1$, più precisamente $q = \frac{m}{2}$ per qualche $m \in \mathbb{N}_1 - 2\mathbb{N}_1$.

In tal caso la condizione $\nu(n) = 2(q+1)$ diventa $\nu(n) = m+2$ con m dispari e tutto dipende dalla fattorizzazione di $m+2$. Possiamo dunque affermare che i valori ammissibili per q , ovvero quei valori che rendono non vuota la definizione di numeri q -perfetti di 2^a specie sono quelli dell'insieme $Q_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ dove si

è usato l'indice 0 per distinguerlo dall'insieme $Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N}_1\}$ che

in seguito useremo. Riportiamo, di seguito una tabella con i primi valori non interi di q , anche questa senza dimostrazioni.

Valori	Valori	Caratterizzazione dei numeri q -perfetti di 2 ^a specie
--------	--------	---

di q	di $\nu(n)$	
$\frac{1}{2}$	3	$n = p_1^2$ con $p_1 \in \mathbb{P}$
$\frac{3}{2}$	5	$n = p_1^4$ con $p_1 \in \mathbb{P}$
$\frac{5}{2}$	7	$n = p_1^6$ con $p_1 \in \mathbb{P}$
$\frac{7}{2}$	9	$n = p_1^8$ oppure $n = p_1^2 p_2^2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro
$\frac{9}{2}$	11	$n = p_1^{10}$ con $p_1 \in \mathbb{P}$
$\frac{11}{2}$	13	$n = p_1^{12}$ con $p_1 \in \mathbb{P}$

Consideriamo ora qualche caso generale enunciato sotto forma di teoremi:

Teorema 2.1.1.

I numeri della forma $n = p_1^{2q+1}$ e $n = p_1^q \cdot p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, diversi tra loro, sono q -perfetti, i primi per ogni $q \in \mathbb{Q}_0$ e i secondi per ogni $q \in \mathbb{N}_0$.

Dimostrazione

Sia $n = p_1^{2q+1}$ per qualche primo $p_1 \in \mathbb{P}$, per qualche $q \in \mathbb{Q}_0$, allora $(2q + 1) \in \mathbb{N}_1$ e $n \in \mathbb{N}_2$ e si ha, per la nota identità che esprime $\nu(n)$ come $= \prod_{i=1}^r (1 + \alpha_i)$, essendo $p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la fattorizzazione in primi di n , $\nu(n) = 1 + 2q + 1 = 2(q + 1)$, dunque n è q -perfetto di 2^a specie.

Sia $n = p_1^q p_2$ per qualche coppia di primi distinti $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$, per qualche $q \in \mathbb{N}_0$, allora, sempre per l'identità summenzionata, si ha $\nu(n) = (1 + 1)(1 + q) = 2(q + 1)$ ovvero n è q -perfetto di 2^a specie.

Teorema 2.1.2.

Sia $r \in \mathbb{N}_1$, e sia $q = 2^{r-1} - 1$. I numeri q -perfetti sono tutti e soli quei numeri n del tipo

$$n = p_1^{2^{r_1}-1} \cdots p_k^{2^{r_k}-1} \text{ con } k, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_1 \text{ tali che } \sum_{i=1}^k r_i = r \text{ e } p_1,$$

$\dots, p_k \in \mathbb{P}$ diversi tra loro.

Sia $q = 2^{r-1} - 1$ per qualche $r \in \mathbb{N}_1$. n è q -perfetto di 2^a specie se e solo se $\nu(n) = 2^r$. Un sistema completo di divisori di 2^r è del tipo $2^{r_1}, \dots, 2^{r_k}$, per qualche $r_1, \dots,$

$r_k \in \mathbb{N}_1$ tali che $\sum_{i=1}^k r_i = r$ per qualche $k \in \mathbb{N}_1$ tale che $k \leq r = \Omega(n)$. Dunque n è q -perfetto di 2^a specie se e solo se $\exists k \in \mathbb{N}_1$ con $k \leq r$ tale che $n = p_1^{2^{r_1}-1} \cdot \dots \cdot p_k^{2^{r_k}-1}$ con $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_1$ tali che $\sum_{i=1}^k r_i = r$ e $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ diversi tra loro.

Al concetto di numeri q -perfetti di 2^a specie è collegato, come accade con i numeri perfetti (numeri perfetti di 1^a specie), quello dei numeri q -abbondanti e q -mancanti di 2^a specie, per i quali forniamo la seguente:

Definizione 2.1.2. Sia $n \in \mathbb{N}_2$. n è q -mancante (q -abbondante) di 2^a specie se $\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d < n^q$ ($\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d > n^q$).

Naturalmente, come accade per i numeri perfetti di 1^a specie, anche qui l'insieme dei numeri q -perfetti, q -mancanti e q -abbondanti costituisce una partizione di $\mathbb{N}_2$. Tale definizione ci conduce, inoltre, alla dimostrazione di due lemmi, a noi non noti in letteratura, che risulteranno utili in seguito.

Lemma 2.1.1. Sia n q -perfetto di 2^a specie o q -mancante di 2^a specie allora ogni sottomultiplo proprio di n è q -mancante.

Sia $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, se n è q -perfetto o q -mancante allora $\nu(n) \leq 2 \cdot (q + 1)$ ma $\nu(n) = \prod_{i=1}^r (1 + \alpha_i)$. Sia m un sottomultiplo proprio di n , allora $m = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$ con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \forall i = 1, \dots, r$ e, inoltre, esiste almeno un indice $k \leq r$ tale che $\beta_k < \alpha_k$.
Dunque $\nu(m) = \prod_{i=1}^r (1 + \beta_i) < \prod_{i=1}^r (1 + \alpha_i) = \nu(n) \leq 2 \cdot (q + 1)$ essendo $(1 + \beta_i) \leq (1 + \alpha_i)$ e $(1 + \beta_k) < (1 + \alpha_k)$ ovvero m è q -mancante di 2^a specie. C.V.D.

Lemma 2.1.2. (duale). Sia n q -perfetto o q -abbondante di 2^a specie allora ogni multiplo proprio di n è q -abbondante.

Supponiamo che esista un numero n q -perfetto o q -abbondante con un multiplo proprio m q -perfetto o q -mancante allora tale multiplo m avrebbe n come sottomultiplo proprio ma n è q -perfetto di 2^a specie o q -abbondante di 2^a specie e ciò è assurdo per il lemma precedente. C.V.D.

La seconda generalizzazione dei numeri perfetti di 2^a specie è quella collegata al già citato problema di Halcke, ed è illustrata dalla seguente:

Definizione 2.1.3. Sia $n \in \mathbb{N}_1$, n è perfetto di 2^a specie di ordine $k \in \mathbb{N}_1$ se

$$\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d^k = n.$$

È immediato provare che tale definizione è equivalente a $\pi_k(n) = n^{k+1}$ dove si è utilizzata la funzione $\pi_k(n)$ (prodotto delle potenze k -esime di tutti i divisori di n) per la quale abbiamo già visto nella prima parte essere vera l'identità $\pi_k(n) = n^{\frac{\nu(n)}{2}}$.

Dunque, se si eccettua 1 che risulta, analogamente al caso precedente, perfetto di 2^a specie di ordine k per ogni $k \in \mathbb{N}_1$, i numeri n perfetti di 2^a specie di ordine k risultano completamente caratterizzati dalla seguente identità $k \frac{\nu(n)}{2} - (k+1) = 0$

cioè $k = \frac{2}{\nu(n)-2}$.

Dunque esistono perfetti di 2^a specie di ordine $k \in \mathbb{N}_1$ solo per $k = 1$ o $k = 2$. Precisamente n è perfetto di 2^a specie di ordine 1 se e solo se $\nu(n) = 4$ ovvero se e solo se è 1-perfetto di 2^a specie, le cui caratterizzazioni abbiamo già visto (infatti in tal caso le due diverse generalizzazioni coincidono entrambe con i numeri perfetti di 2^a specie). Nell'altro caso n è perfetto di seconda specie di ordine 2 se e solo se $\nu(n) = 3$ ovvero se e solo se è 1-perfetto di 2^a specie.

Ricordando che $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{ \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{N}_1 \}$, riportiamo ora un teorema che non ci risulta noto in letteratura e che rappresenta un risultato che lega tra loro le due generalizzazioni dei numeri perfetti di 2^a specie e:

Teorema 2.1.4. Sia K l'insieme costituito dagli inversi degli elementi dell'insieme Q . n è perfetto di 2^a specie di ordine $k \in K$ se e solo se n è q -perfetto di 2^a specie con $q = \frac{1}{k}$.

Dimostrazione

Sia n perfetto di 2^a specie di ordine k allora $k = \frac{2}{\nu(n)-2}$ ovvero $\nu(n) = \frac{2(1+k)}{k} = 2\left(\frac{1}{k}+1\right) = 2(q+1)$ ponendo $q = \frac{1}{k}$ dunque n è q -perfetto di 2^a specie con $q = \frac{1}{k}$. Analogamente per il viceversa. C.V.D.

Di conseguenza restano caratterizzati tutti i numeri di 2^a specie di ordine k come i numeri $\frac{1}{k}$ -perfetti e tutti i risultati validi per i secondi si possono vedere come risultati sui primi a patto di invertire l'indice.

Definizione 2.1.4. Sia $n \in \mathbb{N}_2$, n è mancante (abbondante) di 2^a specie di ordine k se $\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d^k < n$ ($\prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d^k > n$).

2.2 Le generalizzazioni delle coppie di numeri amicabili di seconda specie.

Consideriamo ora le generalizzazioni delle coppie di numeri amicabili di seconda specie, illustrate con le seguenti definizioni che dimostreremo essere entrambe vuote.

Definizione 2.2.1. Sia $q \in \mathbb{Q}$ ⁷ e siano $m, n \in \mathbb{N}_2$ distinti. m, n sono q -amicabili di 2^a specie se:

$$\begin{cases} \frac{\pi(n)}{n} = m^q \\ \frac{\pi(m)}{m} = n^q \end{cases}.$$

Definizione 2.2.2. Sia $k \in \mathbb{K}$ e siano $m, n \in \mathbb{N}_2$ distinti. m, n sono amicabili di 2^a specie di ordine k se:

$$\begin{cases} \frac{\pi_k(n)}{n^k} = m \\ \frac{\pi_k(m)}{m^k} = n \end{cases}.$$

Teorema 2.2.1.

Non esistono q -amicabili di 2^a specie per ogni $q \in \mathbb{Q}$.

Dimostrazione

Sia $q \in \mathbb{Q}$ e siano $m, n \in \mathbb{N}_2$ tali che

$$\begin{cases} \frac{\pi(n)}{n} = m^q \\ \frac{\pi(m)}{m} = n^q \end{cases}$$

(1)
o, equivalentemente

⁷ Non consideriamo il caso $q = 0$, poco significativo e che, come è facile verificare, condurrebbe a definire ogni coppia di primi distinti una coppia di numeri amicabili.

$$\begin{cases} n^{\frac{\nu(n)}{2}-1} = m^q \\ m^{\frac{\nu(m)}{2}-1} = n^q \end{cases}$$

(2)

allora m ed n hanno gli stessi divisori primi.

Siano dunque $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ ed $m = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$, con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_1$, le fattorizzazioni in primi di n ed m .

Le (1) sono equivalenti a (3)
$$\begin{cases} \alpha_i \left(\frac{\nu(n)}{2} - 1 \right) = q\beta_i \\ \beta_i \left(\frac{\nu(m)}{2} - 1 \right) = q\alpha_i \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

Dalla (1) segue, moltiplicando membro a membro le due equazioni, che

$$\frac{\pi(n)}{n^{q+1}} \cdot \frac{\pi(m)}{m^{q+1}} = 1. \text{ Possiamo considerare due casi:}$$

primo caso: $\frac{\pi(n)}{n^{q+1}} = 1 = \frac{\pi(m)}{m^{q+1}}$ ovvero m ed n sono q -perfetti di 2^a specie; ma dalla (2) segue che $n^q = m^q$ ovvero $m = n$;

secondo caso: $\frac{\pi(n)}{n^{q+1}} < 1$ e $\frac{\pi(m)}{m^{q+1}} > 1$ (o viceversa) ovvero n è q -mancante ed m è

q -abbondante di 2^a specie. In questo caso la (1) implica $\begin{cases} m^q n < n^{q+1} \\ n^q m > m^{q+1} \end{cases}$ ovvero m

$< n$;

avendo m ed n hanno gli stessi fattori primi questo implica che m è un sottomultiplo proprio di n , ma, come abbiamo già dimostrato nel lemma 2.1.1 ciò implica m è q -mancante contro la posizione iniziale. C.V.D.

Teorema 2.2.1.

Non esistono coppie di numeri amicali di seconda specie di ordine k per ogni $k \in \mathbb{N}_1$.

⁸ Al solito si è utilizzata l'identità (2.4) della prima parte con $k = 1$: $\pi(n)^{\frac{\nu(n)}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$.

Dimostrazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d^k = m \\ \prod_{\substack{d|m \\ d \neq m}} d^k = n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \prod_{\substack{d|n \\ d \neq n}} d^k = m \cdot n^k \\ \prod_{\substack{d|m \\ d \neq m}} d^k = n \cdot m^k \end{array} \right. \quad m \neq n, m, n \in \mathbb{N}_2, k \in \mathbb{N}_2.$$

$$\pi_k(n) \cdot \pi_k(m) = (m \cdot n)^{k+1} \text{ e } p|m \Rightarrow p|n \text{ e viceversa.}$$

$$n^{\frac{k \cdot v(n)}{2}} \cdot m^{\frac{k \cdot v(m)}{2}} = m^{k+1} \cdot n^{k+1}$$

$$m^{\frac{k+1-k \cdot \frac{v(m)}{2}}{2}} \cdot n^{\frac{k+1-k \cdot \frac{v(n)}{2}}{2}} = 1$$

$$v(m) = \frac{2(k+1)}{k} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$v(n) = \frac{2(k+1)}{k} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$\text{Se } k = 2 \Rightarrow v(m) = 3 \text{ e } v(n) = 3 \Rightarrow m = p^2 \text{ e } n = p^2.$$

Bibliografia

(0) Emilio Ambirsi, *Numeri Amici, Mirabili e Perfetti*, Periodico di matematiche, Serie VI, Volume 67, 1991.

(1) P. HOFFMAN, *La vendetta di Archimede*, Bompiani, 1990, p. 31.

(²) H. STEINHAUS, *Cento problemi di matematica elementare*, Boringhieri. 1987.

(³) D. R. HOFSTADTER: *Godel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Adelphi 1984, pag. 434.

(⁴) M. GARDNER, *Enigmi e Giochi Matematici*, vol. 5, Sansoni, 1976, pag. 106.