

Numero 11 - 1996

RATIO MATHEMATICA

Rivista di
applicazioni della matematica

a cura di

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo

Comitato Scientifico

Albrecht Beutelspacher, *Giessen*

Emilio Ambrisi, *Napoli*

Piergiulio Corsini, *Udine*

Bal K. Dass, *Delhi*

Franco Eugeni, *Roma*

Mario Gionfriddo, *Catania*

Antonio Maturo, *Pescara*

Aldo Morelli, *Napoli*

Nicola Rotondale, *L'Aquila*

Aniello Russo Spena, *L'Aquila*

Maria Tallini Scafati, *Roma*

Numero 11 - 1996

RATIO MATHEMATICA

Rivista di
applicazioni della matematica

a cura di

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo

Comitato Scientifico

Albrecht Beutelspacher, *Giessen*

Emilio Ambrisi, *Napoli*

Piergiulio Corsini, *Udine*

Bal K. Dass, *Delhi*

Franco Eugeni, *Roma*

Mario Gionfriddo, *Catania*

Antonio Maturo, *Pescara*

Aldo Morelli, *Napoli*

Nicola Rotondale, *L'Aquila*

Aniello Russo Spina, *L'Aquila*

Maria Tallini Scafati, *Roma*

RATIO MATHEMATICA

INDICE

V. ISASTIA, S. MEO, M. SCARANO, <i>A new mathematical approach oriented to friendly computer evaluation of air-gap functions of induction machines</i>	pag.	3
F. CASOLARO, F. EUGENI, G. MATALONI, <i>Sulle trasformazioni geometriche che conservano la norma iperbolica e i settori iperbolici</i>	pag.	23
E. BALLONE, V. COLAGRANDE, <i>La diagnostica differenziale mediante l'analisi discriminante</i>	pag.	35
L. TIBILETTI, E. VOLPE DI PRIGNANO, <i>Higher order moments of a sum of random variables: remarks and applications</i>	pag.	47
S. FERRI, <i>Una caratterizzazione delle coniche di $PG(2,q)$</i>	pag.	59
C. ANTONELLI, E. BALLONE, <i>Attuali sviluppi nello studio dell'associazione tra variabili di tipo qualitativo</i>	pag.	63
E. GELSOMINI, <i>Un esempio di ipergruppo ottenuto mediante combinazioni lineari</i>	pag.	75
A. GALLO, A.M. PICCIRILLO, <i>On a first order unilateral evolutive periodic problem</i>	pag.	81
V. DI MARCELLO, F. EUGENI, G. MATALONI, <i>Funzioni iperboliche e circolari: un confronto</i>	pag.	105
F. MERCANTI, L. CERRITELLI, <i>Sul concetto di lateralizzazione nelle iperstrutture</i>	pag.	115
O. FERRI, R. IAFISCO, <i>Sulle curve che contengono tutti i punti di un piano di Fano</i>	pag.	121

A NEW MATHEMATICAL APPROACH ORIENTED TO FRIENDLY COMPUTER EVALUATION OF AIR-GAP FUNCTIONS OF INDUCTION MACHINES

Vittorio Isastia^{*}, Santolo Meo^{**}, Maurizio Scarano^{***}

SUNTO - In questo lavoro si illustra un metodo di analisi delle macchine elettriche che affronta e risolve nel dominio del tempo, il problema della determinazione delle grandezze elettriche e magnetiche di macchina e dell'analisi del loro funzionamento a regime stazionario e in transitorio. Questo metodo trae spunto dalla teoria matematica delle Distribuzioni per introdurre una serie di funzioni, ricorrenti nell'analisi dei fenomeni elettromagnetici di macchina, e particolarizzare per esse delle operazioni algebriche ed integro differenziali. Si perviene ad un nuovo approccio di studio delle macchine elettriche che fornisce una serie di algoritmi di immediata implementazione numerica e di semplice interpretazione fisica.

ABSTRACT - In the paper a method, for the evaluation of the main electric and magnetic quantities in electrical machines, is proposed. This technique, approaches and solves any problem directly in the time domain.

^{*} Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Università "Federico II" di Napoli.

^{**} Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Università "Federico II" di Napoli.

^{***} Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Cassino

INTRODUCTION

The field of research of electrical machines, especially with respect to the induction motors, is particularly interested, in the last years, in the searching of suitable mathematical models oriented to different expectations and requests of the specialists. In fact the great development of the power electronics and the signal electronics, together with the availability of advanced technological microprocessors has given a strong impulse towards the fulfilment of very sophisticated and complex control algorithms in order to exploit the great dynamic possibilities of such a machine, suitable in different field of applications (industrial tools, electrical traction, actuators and so on). An efficient control system cannot avoid, especially when status observers are adopted, a full analysis of the electromagnetic interactions in the machine in order to achieve the expected accuracy of the regulation and control. On the contrary, after this extended analysis of the fundamental relationships, a simplification phase must be developed in order to limit the complexity of the calculus of the microprocessors. For these reasons, usually, the starting point of the modelling phase of induction machine, is represented by a Fourier's analysis of air-gap flux density, by the consideration of the only fundamental space harmonic and by the manipulation of the resultant relationships by means of different techniques concerning the vectorial analysis (mono-axis development on Gauss plan or two-axis approach according to Park theory) [1,2,3,4]. These approaches, often, far the modellisation of the induction machine by the basic relationships of classical electrodynamics concepts producing an analysis structure for specialist only. This one should not be a problem if the only specialist are interested in this approach. Unfortunately, many schools of electrical machines use the final Fourier's approach as starting one in the standard courses developing, many often, a limited vision of the problem towards the students. Starting from this approach many of the characteristics of the windings are loosen, unbalanced configurations cannot be analysed and the behaviour of the machine outside of the symmetrical and standard conditions becomes an un-proposable question for a lot of student. For these reasons in this paper a new analysis approach is suggested. This approach develops the basic electromagnetic relationships by the analysis of the windings and the geometric parameters by means of the known rules of the classic electrodynamics and by introducing simple functions that are combinations of canonical distributions (impulses, steps, and superior order functions) [5]. This approach is not new in the initial definition of the quantities. In fact the analysis of electrical machines by means of Riemann's transform, in the initial phase, is the same. But the Riemann approach brings the formulation in an analysis space very far from the starting electromagnetic structure. The anti-transforming operations are usually

laborious and complex and therefore this method does not find a full adoption in the standard courses of electrical machine and this approach too becomes a specialist only approach.

These ones are educational questions about the teaching of electrical machines.

Another question is the opportunity and the possibility to set up a general purpose computing code in order to solve, the induction machines outside the standard balance and symmetrical situations. This problem has been already solved by considering a full Fourier's approach with all the significant space harmonics. This method often becomes complex and laborious because the significant order harmonics depends on the considered un-symmetry and at the first time only a specialist might find them.

The method in this note presented allows a friendly computer evaluation of the air-gap distributions when the rotor speed is constant; the code can be implemented in a very original technique and used by non-specialist too [6].

In this way the Authors hope to near the study of the induction motors to the electromagnetic machine structures allowing a general mathematical formalization suitable, especially, for a computer analysis of the non-symmetrical and unbalanced configurations [7,8,9].

GENERALITIES ABOUT THE MATHEMATICAL TOOLS

The canonical functions will be defined in the following forms:

impulsive function:

$$A\delta(x - x_0) \quad (A \text{ is a constant}) \quad (1)$$

step function:

$$A u(x - x_0) = \int_{-\infty}^x A\delta(\chi - x_0) d\chi \quad (2)$$

linear function:

$$A l(x - x_0) = \int_{-\infty}^x A u(\chi - x_0) d\chi = A(x - x_0) u(x - x_0) \quad (3)$$

and the linear combination functions:

$$A D(\chi, X, x) = A \delta\left(x - \chi + \frac{X}{2}\right) - A \delta\left(x - \chi - \frac{X}{2}\right) \quad (4)$$

$$A W(\chi, X, x) = A u\left(x - \chi + \frac{X}{2}\right) - A u\left(x - \chi - \frac{X}{2}\right) \quad (5)$$

$$A L(\chi, X, x) = A l\left(x - \chi + \frac{X}{2}\right) W(\chi, X, x) \quad (6)$$

The consideration of these last three functions are suitable for the characteristic structure of standard induction machines.

The function W will be called unitary window function and a lot of electrical and magnetical functions in the considered machine will be expressed by means of this one. For this reason in the following some particular mathematical properties of this window function will be presented and discussed.

Translation rule:

$$W(\chi - z, X, x) = W(\chi, X, x + z) \quad (7)$$

Product rule:

$$\begin{aligned} f(x) &= W(\chi_f, X_f, x) \\ g(x) &= W(\chi_g, X_g, x) \end{aligned} \quad (8)$$

$$p(x) = f(x)g(x) = W\left(\frac{h+k}{2}, (k-h)u(k-h), x\right)$$

$$k = \min\left(\chi_f + \frac{X_f}{2}, \chi_g + \frac{X_g}{2}\right)$$

$$h = \max\left(\chi_f - \frac{X_f}{2}, \chi_g - \frac{X_g}{2}\right)$$

Integration rule:

$$\begin{aligned} \int_a^b W(\chi, X, x) dx &= (k-h)u(k-h) \\ k &= \min(b, \chi + X/2) \\ h &= \max(a, \chi - X/2) \end{aligned} \quad (9)$$

A particular property is suitable according to the derivative of a particular integral expression:

(where ω is a constant)

$$\Phi(t) = \int_{c_0 + \omega t}^{d_0 + \omega t} \beta(t) W(\chi, X, x) dx \quad (10)$$

and the derivative is evaluated with respect to the variable t so that:

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (11)$$

and by considering previous relationships

$$\varepsilon = - \frac{d}{dt} [\beta(t) \varphi(t) u(\varphi(t))] \quad (12)$$

where :

$$\varphi(t) = \left[\min \left(d_0 + \omega t; \chi + \frac{X}{2} \right) - \max \left(c_0 + \omega t; \chi - \frac{X}{2} \right) \right] \quad (13)$$

The real field of the variable t is divided into two different domains: the first is characterised by the negative value of φ ; the second is characterised by no negative values of φ . For the first values the function u is zero and the product too; for the second set of values u is unitary and therefore it will be:

$$\varepsilon = - \frac{d}{dt} [\beta(t) \varphi(t)] \quad (14)$$

$$\varepsilon = -\beta(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} - \varphi(t) \frac{d\beta(t)}{dt} \quad (15)$$

The function $\varphi(t)$, for the second set of values of t , will be represented by:

$$\varphi(t) = \omega L \left(\frac{t_1 + t_2}{2}, t_2 - t_1, t \right) + h W \left(\frac{t_2 + t_3}{2}, t_3 - t_2, t \right) - \omega L \left(\frac{t_3 + t_4}{2}, t_4 - t_3, t \right) \quad (16)$$

where the parameters depend on the values of X and $d_0 - c_0$; in fact when $X > d_0 - c_0$ it will be:

$$h = d_0 - c_0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} t_1 \rightarrow d_0 + \omega t_1 &= \chi - \frac{X}{2} \\ t_2 \rightarrow c_0 + \omega t_2 &= \chi - \frac{X}{2} \\ t_3 \rightarrow d_0 + \omega t_3 &= \chi + \frac{X}{2} \\ t_4 \rightarrow c_0 + \omega t_4 &= \chi + \frac{X}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

and when $X < d_0 - c_0$ it will be:

$$\begin{aligned} h &= X \\ t_1 \rightarrow d_0 + \omega t_1 &= \chi - \frac{X}{2} \\ t_2 \rightarrow d_0 + \omega t_2 &= \chi + \frac{X}{2} \\ t_3 \rightarrow c_0 + \omega t_3 &= \chi - \frac{X}{2} \\ t_4 \rightarrow c_0 + \omega t_4 &= \chi + \frac{X}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

when $X = d_0 - c_0$ then $t_2 = t_3$.

The value of the derivative will be:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega W\left(\frac{t_1+t_2}{2}, t_2-t_1, t\right) + \omega(t-t_1)[\delta(t-t_1) - \delta(t-t_2)] + \\ &+ h D\left(\frac{t_2+t_3}{2}, t_3-t_2, t\right) - \omega W\left(\frac{t_3+t_4}{2}, t_4-t_3, t\right) - \omega(t-t_4)[\delta(t-t_3) - \delta(t-t_4)] \end{aligned} \quad (20)$$

and for the previous relationships:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \left[W\left(\frac{t_1+t_2}{2}, t_2-t_1, t\right) - W\left(\frac{t_3+t_4}{2}, t_4-t_3, t\right) \right] \quad (21)$$

where the values of the parameters must be evaluated according to defined constraints.

MATHEMATICAL APPROACH

Let's consider a typical configuration of standard electrical machines as represented in fig. 1 with the following assumptions :

- the permeability of the iron is infinite with respect to the air;
- the linear currents densities are represented by impulsive functions;
- the significant values of B in the air-gap will be the values evaluated over the internal surface of stator;
- for sake of simplicity only a machine with one slot for pole and for phase will be considered and with only one pole pair.

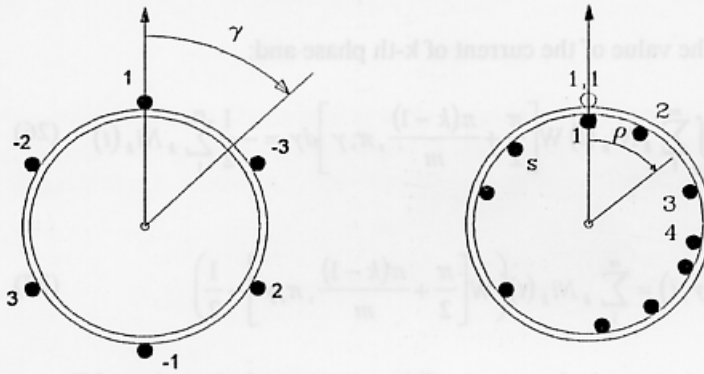


Fig.1 The considered structure of stator and rotor conductors.

These last restrictions don't deprive the method of its wide generality. By considering the function that expresses the value of B on the internal surface of stator with respect to the angular abscissa γ only, it is convenient the adoption and the computation of the air-gap function Λ as:

$$\Lambda(\gamma, t) = \frac{\mu_0 B(\gamma, t)}{\int_H^K \underline{B}(x, y, z, t) \bullet \underline{dl}} \quad (22)$$

H and K represent, respectively, the point of stator on the abscissa and the point on the rotor where a field line, starting from H , falls.

With the same assumption about t the significance of γ , it is suitable the consideration of the function Γ :

$$\Gamma(\gamma, t) = \frac{1}{\mu_0} \int_H^K \underline{B}(x, y, z, t) \bullet \underline{dl} \quad (23)$$

so that:

$$B(\gamma, t) = \Lambda(\gamma, t) \Gamma(\gamma, t) \quad (24)$$

For a squirrel cage induction motor the value of Λ is constant and Γ is the superimposition of the stator Γ_s and rotor Γ_r functions.

For an m-phases symmetrical stator winding, with N conductor for slot, by introducing the function W, it is possible to evaluate Γ_s as:

$$\Gamma_s(\gamma, t) = \Gamma_0(t) + \sum_{k=1}^m N i_k(t) W\left[\frac{\pi}{2} + (k-1)\frac{\pi}{m}, \pi, \gamma\right] \quad (25)$$

where $i_k(t)$ is the value of the current of k-th phase and:

$$\Gamma_0(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^m N i_k(t) W\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(k-1)}{m}, \pi, \gamma\right] d\gamma = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m N i_k(t) \quad (26)$$

and, therefore:

$$\Gamma_s(\gamma, t) = \sum_{k=1}^m N i_k(t) \left(W\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(k-1)}{m}, \pi, \gamma\right] - \frac{1}{2} \right) \quad (27)$$

In the case of asymmetrical stator condition, in general, the value of Γ_s can be evaluated as:

$$\Gamma_s(\gamma, t) = \Gamma_0(t) + \sum_{k=1}^m N_k i_k(t) W[\chi_k, X_k, \gamma] \quad (28)$$

where:

$$\Gamma_0(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^m N_k i_k(t) W[\chi_k, X_k, \gamma] d\gamma = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m N_k i_k(t) X_k \quad (29)$$

and therefore:

$$\Gamma_s(\gamma, t) = \sum_{k=1}^m N_k i_k(t) \left\{ W[\chi_k, X_k, \gamma] - \frac{X_k}{2\pi} \right\} \quad (30)$$

Both for symmetrical condition and in non-symmetrical condition the stator flux density in the air-gap can be evaluated as the product of Λ_0 ($\Lambda_0 = \mu_0 / \delta_c$) for a characteristic sum of a W function and a constant value:

$$B_s(\gamma, t) = \Lambda_0 \sum_{k=1}^m N_k i_k(t) \left\{ W[\chi_k, X_k, \gamma] - \frac{X_k}{2\pi} \right\} \quad (31)$$

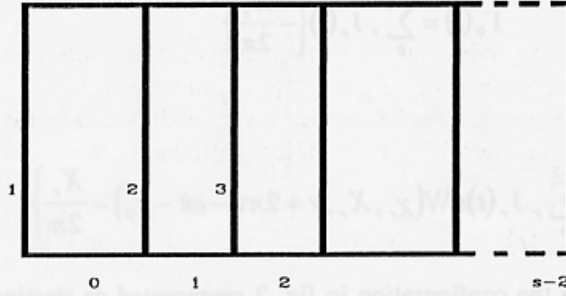


Fig.2 Rotor cage

By considering an asymmetrical rotor cage as represented in fig. 2 and the external rings as equipotential sides, it is possible to associate to each mesh (from 0 to $s-2$) a current J . The bar current can be evaluated as:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= J_0(t) \\ I_2(t) &= J_1(t) - J_0(t) \\ &\dots\dots\dots \\ I_{s-1}(t) &= J_{s-2}(t) - J_{s-3}(t) \\ I_s(t) &= -J_{s-2}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

and, by considering a rotor reference the function Γ_r as:

$$\Gamma_r(\rho, t) = \sum_{r=0}^{s-2} J_r(t) W(\chi_r, X_r, \rho) + \Gamma_0 \quad (33)$$

where χ_r and X_r represent the centre and the amplitude of the r -th mesh (for $r=0$ to $s-2$).

For an angular speed ω the same function can be evaluated with respect to a stator reference as:

$$\Gamma_v(\gamma, t) = \sum_{r=0}^{s-2} J_r(t) W(\chi_r, X_r, \gamma + 2\pi v - \omega t - \gamma_0) + \Gamma_0 \quad (34)$$

where the index v represents the number of full turns of the rotor after $t=0$:

$$v = \text{integer}(t/T) \quad \text{with } T = 2\pi/\omega$$

By imposing the null value of the flux of B all around the rotor surface the value of Γ_0 will be:

$$\Gamma_0(t) = \sum_0^{s-2} J_r(t) \left\{ -\frac{X_r}{2\pi} \right\} \quad (35)$$

and, therefore

$$\Gamma_{vr}(\gamma, t) = \sum_0^{s-2} J_r(t) \left\{ W(\chi_r, X_r, \gamma + 2\pi v - \omega t - \gamma_0) - \frac{X_r}{2\pi} \right\} \quad (36)$$

By considering the configuration in fig. 2 represented as starting condition will be $\gamma_0=0$.

In conclusion it will be:

$$B_{vr}(\gamma, t) = \Lambda_0 \sum_0^{s-2} J_r(t) \left\{ W(\chi_r, X_r, \gamma + 2\pi v - \omega t - \gamma_0) - \frac{X_r}{2\pi} \right\} \quad (37)$$

For a most suitable utilisation of previous relationships it is convenient to express the function $B(\rho, t)$ as the superimposition of window function by evaluating the amplitude of the flux density B_ζ between two consecutive bars:

$$B_r(\rho, t) = \sum_0^{s-1} B_\zeta(t) W(\chi_\zeta, X_\zeta, \rho) \quad (38)$$

with

$$B_\zeta(t) = \Lambda_0 \left(J_\zeta(t) \left(1 - \frac{X_r}{2\pi} \right) - \sum_0^{s-2} J_r(t) \frac{X_r}{2\pi} \right) \quad (39)$$

and $J_{s-1} = 0$

The computation of the e.m.f. can be operated by considering previous expressions. The static e.m.f. produced by the no-constant field between two consecutive bars can be evaluated as:

$$e_\zeta^{(R,R)} = -X_v l \frac{D}{2} \frac{d}{dt} (B_\zeta(t)) \quad (40)$$

where l is the machine length and D is the diameter and $0 \leq \zeta \leq s-2$.

The e.m.f. produced by the ζ -th "slice" of rotor field in the k -th stator phase, when the rotor speed is ω , can be computed by adopting the shown property of the derivative of integral expression as a succession of time-varying functions as:

$$e_{\zeta,k}^{(R,\gamma)} = -N \frac{D}{2} \left\{ \frac{dB_{\zeta}(t)}{dt} \left[\omega I \left(\frac{t_{1(\zeta,k)} + t_{2(\zeta,k)}}{2}, t_{2(\zeta,k)} - t_{1(\zeta,k)}, t \right) + X_{r\zeta} W \left(\frac{t_{2(\zeta,k)} + t_{3(\zeta,k)}}{2}, t_{3(\zeta,k)} - t_{2(\zeta,k)}, t \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - \omega I \left(\frac{t_{3(\zeta,k)} + t_{4(\zeta,k)}}{2}, t_{4(\zeta,k)} - t_{3(\zeta,k)}, t \right) \right] + \right. \\ \left. \left. \frac{dB_{\zeta}(t)}{dt} \left[W \left(\frac{t_{1(\zeta,k)} + t_{2(\zeta,k)}}{2}, t_{2(\zeta,k)} - t_{1(\zeta,k)}, t \right) - W \left(\frac{t_{3(\zeta,k)} + t_{4(\zeta,k)}}{2}, t_{4(\zeta,k)} - t_{3(\zeta,k)}, t \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{dB_{\zeta}(t)}{dt} \left[W \left(\frac{t_{1(\zeta,k)} + t_{2(\zeta,k)}}{2}, t_{2(\zeta,k)} - t_{1(\zeta,k)}, t \right) + X_{r\zeta} W \left(\frac{t_{2(\zeta,k)} + t_{3(\zeta,k)}}{2}, t_{3(\zeta,k)} - t_{2(\zeta,k)}, t \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \omega I \left(\frac{t_{3(\zeta,k)} + t_{4(\zeta,k)}}{2}, t_{4(\zeta,k)} - t_{3(\zeta,k)}, t \right) \right] \right\} \quad (41)$$

The induced e.m.f. in the h -th stator phase by the k -th current can be evaluated by means the following notation:

$$e_{k,h}^{(S,S)} = -N^2 \frac{D}{2} l \Lambda_0 \mu(\lambda_{k,h}) \frac{d}{dt} i_k(t) \quad (42)$$

where $\mu(\lambda_{k,h})$ is the measure of the following interval $\lambda_{k,h}$:

$$\mu(\lambda_{k,h}) = \left[\chi_k - \frac{X_k}{2}, \chi_k + \frac{X_k}{2} \right] \cap \left[\chi_h - \frac{X_h}{2}, \chi_h + \frac{X_h}{2} \right] \quad (43)$$

(in the case of symmetrical three-phase machine this value is a generic element of the following matrix:

$$\mu(\lambda_{\kappa,\eta}) = \pi \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

The evaluation of the e.m.f. in the ζ -th rotor mesh by the k -th stator phase can be developed by considering that the stator flux density has been expressed as sum of two different terms. The contribute of the first one $\{W\}$ in the e.m.f. can be evaluated by considering the previous property of the derivative of integral expression so that:

$$e_{k,\zeta}^{(s,R)\{w\}} = -\Lambda_\zeta \frac{D}{2} \left\{ \frac{\omega_k(t)}{d_k(t)} \left[W\left(\frac{t_{k,\zeta} + t_{2(k,\zeta)}}{2}, t_{2(k,\zeta)} - t_{k,\zeta}, t\right) - W\left(\frac{t_{k,\zeta} + t_{4(k,\zeta)}}{2}, t_{4(k,\zeta)} - t_{k,\zeta}, t\right) \right] + \right. \\ \left. - \omega_k(t) \left[W\left(\frac{t_{k,\zeta} + t_{2(k,\zeta)}}{2}, t_{2(k,\zeta)} - t_{k,\zeta}, t\right) + X_{\pi} W\left(\frac{t_{k,\zeta} + t_{4(k,\zeta)}}{2}, t_{4(k,\zeta)} - t_{k,\zeta}, t\right) \right] + \right. \\ \left. - \omega_k(t) \left[W\left(\frac{t_{k,\zeta} + t_{4(k,\zeta)}}{2}, t_{4(k,\zeta)} - t_{k,\zeta}, t\right) \right] \right\} \quad (45)$$

the second one {C} is:

$$e_{k,\zeta}^{(s,R)\{c\}} = \Lambda_\zeta lN X_\zeta \frac{D}{2} \frac{X_k}{2\pi} \frac{di_k(t)}{dt} \quad (46)$$

Obviously it will be:

$$e_\zeta = \sum_k^m \left(e_{k,\zeta}^{(s,R)\{w\}} + e_{k,\zeta}^{(s,R)\{c\}} \right) + e_\zeta^{(R,R)} \quad (47)$$

Therefore the balance voltage equations in the k-th stator phase and in the ζ -th rotor mesh will be:

$$v_k(t) = Ri_k(t) + L \frac{d}{dt} i_k(t) - \sum_h^m e_{k,h}^{(s,s)} - \sum_{\zeta=0}^{s-1} e_{\zeta,k}^{(R,s)} \quad (48)$$

$$e_\zeta = -R_{\zeta,1} J_{\zeta-1} + (R_{\zeta,1} + R_{\zeta,2}) J_{\zeta} - R_{\zeta,2} J_{\zeta+1} - L_{\zeta,1} \frac{d}{dt} J_{\zeta-1} + (L_{\zeta,1} + L_{\zeta,2}) \frac{d}{dt} J_{\zeta} - L_{\zeta,2} \frac{d}{dt} J_{\zeta+1} \quad (49)$$

where R and L are, respectively, the resistance and the leakage inductance of stator phase while R_ζ and L_ζ are the resistance and the leakage inductance of the ζ -th rotor bar.

The resulting differential equations systems has as unknown the instantaneous values of phases current (stator) and of mesh currents (rotor).

COMPUTER PROGRAMMING IMPLEMENTATION

The mathematical approach presented in previous section suggests an original structure for the computer implementation. Standard programming routines base oneself on a differential equations resolve that gives the amplitude of unknown currents by solving an ordinary differential equations system. The unknown currents are the instantaneous values in the air-gap m.m.f. treated in terms of space Fourier's analysis. In case of

symmetrical conditions, by considering the fundamental space harmonic and by adopting particular techniques of equivalence the system is linear with constant coefficient, if the speed is constant. In non-symmetrically conditions or in the eventuality of non isotropic air-gap configuration (cases for which the consideration of only the fundamental harmonic produces a no suitable solution because of the inaccuracy of results) it is necessary to take into account an higher number of space harmonics and notwithstanding particular assumptions there is a major complexity of the parameters computation. The difficulty and complexity of this computation depends on the degree of non-symmetrical conditions (electrical and magnetic) and on the number of space harmonics that have been considered in any case. This computation, in general, is an heavy and with an high probability of mistake and usually represents a phase that hardly can be generalised and implemented by an automatic programming routine. In fact often this procedure can be developed only by expert operators.

For the reconstruction of the air-gap functions, after the system resolution, a Fourier series sum must be computed for each time instant and space abscissa. This operation, that represents the fundamental relationship at the base of the method, is called only at this time so that the procedure needs different approach with respect to the analysis phase of the problem and to the synthesis phase.

The mathematical approach of previous section allows a development of the analysis of the problem and the synthesis of results by using the same logical and computational techniques. Furthermore the implementation of automatic programming routine, starting from the geometrical configuration of machine and the material properties, is possible in order to render all the procedures very friendly and adapt to inexperienced operators also in the case of unbalanced and asymmetrical configuration and with a very high level of accuracy that is comparable only with the results get by means of the most complex procedure.

The preliminary steps of the present procedure are:

- a) identification of stator areas and electrical connections;
- b) identification of rotor areas and materials;
- c) automatic generation of the Dynamic Connection Matrix (DCM);
- d) set up of initial conditions.

At this point the identification of unknowns, the generation of the different terms of e.m.fs and the evaluation of the parameters of the differential equations system are possible for all the instant of integration. Therefore a standard resolve can be adopted. At each step of integration the reconstruction of air-gap function can be available by using the relevant element of the DCM. The elements of this matrix, in fact, perform a double target: the identification of system parameters and the organisation of the different terms of air-gap distribution. The amplitude of these terms are represented by the solution of the differential equations.

Let's analysing better the characteristic of the DCM.

This matrix has the informations about all the possible configuration of the rotor surface in front of stator surface with respect to the different angular positions get by rotation. The stator areas are defined as the cylindrical surfaces included between two consecutive winding side of the same phase while the rotor areas are defined as the cylindrical surface between two consecutive bars. DCM has n_r rows and n_c columns where n_r represents the number of all the possible situations in a full round and n_c represents the number of stator areas. All the situations are performed in the DCM in consecutive order. The element of the i - j site is the set of the rotor areas that are in front of the j -th stator area during the i -th situation of reciprocal position. Therefore the elements of the i -th row are equal to the elements of the $(i-1)$ -th row except one: the different element is the one has produced the change of configuration. Obviously, for particular symmetrical conditions it would be possible that the change of configuration involves two or more elements of rotor area.³

A simple example can give an easy idea of the organisation of such a matrix DCM.

Let's consider a non-symmetrical electrical structure as shown in fig.3 where 1s and 2s have been called the stator areas (two phases and one slot for pole and phase). By means of the number 1,2 and 3 have been named the three different rotor surfaces (rotor with non-symmetrical cage of three bars).

$$DCM = \begin{pmatrix} 3,1,2 & 1,2,3 \\ 3,1 & 1,2,3 \\ 3,1 & 1,2 \\ 3,1 & 3,1,2 \\ 3,1 & 3,1 \\ 3 & 3,1 \\ 2,3 & 3,1 \\ 2,3 & 2,3,1 \\ 2,3 & 2,3 \\ 1,2,3 & 2,3 \\ 1,2,3 & 1,2,3 \\ 1,2 & 1,2,3 \end{pmatrix}$$

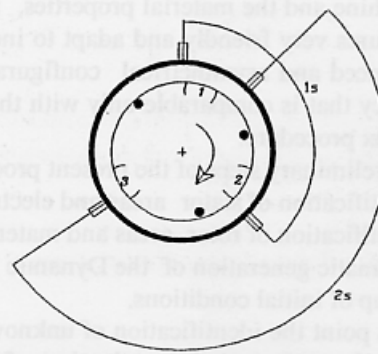


Fig. 3 Non symmetrical electrical structure of induction motor and relevant Dynamic Connection Matrix

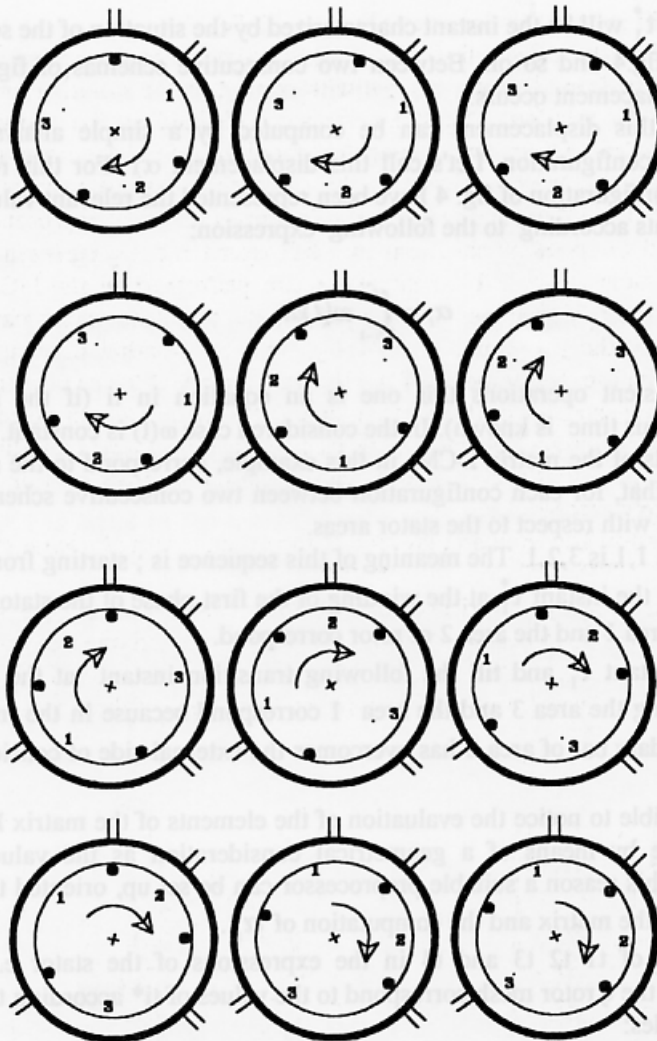


Fig. 4 Sequence of rotor positions in order to evaluate the transition instants

Let's consider as initial instant $t_0=0$ the instant characterised by the configuration rotor/stator of the first schema of fig.4. In this schema there is the superimposition of the rotor bar between the first and the third rotor area with the first slot of the first phase. By considering a full rotation of the rotor it is possible to determine all the transition instants t_i^* for which a change of reciprocal situation rotor/stator occurs. In the considered case twelve different transition instants can be evaluated.

The instant t_1^* will be the instant characterized by the situation of the second schema of fig.4 and so on. Between two consecutive schemas of fig.4 an angular displacement occurs.

In general this displacement can be computed by a simple analysis of geometrical configuration. Let's call this displacement α_1 . For this reason near each configuration of fig. 4 have been represented the relevant values of displacements according to the following expression:

$$\alpha_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(t) dt$$

During transient operations this one is an equation in t_i (if the speed function versus time is known). In the considered case $\omega(t)$ is constant.

The elements of the matrix DCM, in this example, correspond to the set of rotor areas that, for each configuration between two consecutive schema of fig.4 occurs, with respect to the stator areas.

The element 1,1 is 3,2,1. The meaning of this sequence is ; starting from the instant 0 till the instant t_1^* at the winding of the first phase of the stator the area 3, the area 1 and the area 2 of rotor correspond.

After the instant t_1^* and till the following transition instant at the same stator winding the area 3 and the area 1 correspond because in the instant t_1^* the boundary bar of area 2 has overcome the external side of considered winding.

As it is possible to notice the evaluation of the elements of the matrix DCM can be done by means of a geometrical consideration as the values of α_i too. For this reason a suitable preprocessor can be set up, oriented to the definition of the matrix and the computation of α_i .

The values of t_1 t_2 t_3 and t_4 in the expressions of the stator e.m.f.s produced by the ζ rotor mesh correspond to the values of t_i^* according to the following rules:

in the sequence of the rotor sectors, in front of a stator reference, with a positive value of speed according to the following schema

$$\Rightarrow \text{---} | \text{---} \zeta - 1 \text{---} | \text{---} \zeta \text{---} | \text{---} \zeta + 1 \text{---} | \text{---} \Rightarrow$$

in the k-th DCM column

a) case $X < d_0 - c_0$

$t_1 = t_i^*$ i is equal to the number of the row where for the first time the number ζ appears

$t_2 = t_1^*$ i is equal to the number of the row where for the first time the number $\varsigma - 1$ appears

$t_3 = t_1^*$ i is equal to the number of the row where for the first time the number $\varsigma + 1$ disappears

$t_4 = t_1^*$ i is equal to the number of the row where for the first time the number ς disappears

b) case $X > d_0 - c_0$

$t_1 = t_1^*$ i is equal to the number of the row where for the first time the number ς appears

$t_2 = t_1^*$ i is equal to the number of the row where for the first time the number $\varsigma + 1$ disappears

$t_3 = t_1^*$ i is equal to the number of the row where for the first time the number $\varsigma - 1$ appears

$t_4 = t_1^*$ i is equal to the number of the row where for the first time the number ς disappears

The values of t_1 t_2 t_3 and t_4 in the expressions of the rotor e.m.f.s (ς mesh) produced by the k-th stator winding are equal to the values of t_i^* that appear in the relationship of the stator e.m.f.s (winding k) produced by the ς rotor mesh as it is easy to verify.

According to the previous rules, for the considered example, it will be;

$$e_{1,1}^{(R,S)} \quad (a) \quad e_{2,1}^{(R,S)} \quad (a) \quad e_{3,1}^{(R,S)} \quad (b)$$

$$t_1 = t_9^*$$

$$t_2 = t_0^*$$

$$t_3 = t_1^*$$

$$t_4 = t_5^*$$

$$t_1 = t_6^*$$

$$t_2 = t_9^*$$

$$t_3 = t_{11}^*$$

$$t_4 = t_1^*$$

$$t_1 = t_0^*$$

$$t_2 = t_5^*$$

$$t_3 = t_6^*$$

$$t_4 = t_{11}^*$$

$$e_{1,2}^{(R,S)} \quad (a) \quad e_{2,2}^{(R,S)} \quad (a) \quad e_{3,2}^{(R,S)} \quad (a)$$

$$t_1 = t_{10}^*$$

$$t_2 = t_3^*$$

$$t_3 = t_4^*$$

$$t_4 = t_8^*$$

$$t_1 = t_7^*$$

$$t_2 = t_{10}^*$$

$$t_3 = t_2^*$$

$$t_4 = t_4^*$$

$$t_1 = t_3^*$$

$$t_2 = t_7^*$$

$$t_3 = t_8^*$$

$$t_4 = t_2^*$$

And for the expressions of the e.m.f.s in the rotor meshes;

$$e_{1,1}^{(s,R)} \quad \begin{aligned} t_1 &= t_9^* \\ t_2 &= t_0^* \\ t_3 &= t_1^* \\ t_4 &= t_5^* \end{aligned}$$

$$e_{1,2}^{(s,R)} \quad \begin{aligned} t_1 &= t_6^* \\ t_2 &= t_9^* \\ t_3 &= t_{11}^* \\ t_4 &= t_1^* \end{aligned}$$

$$e_{1,3}^{(s,R)} \quad \begin{aligned} t_1 &= t_0^* \\ t_2 &= t_5^* \\ t_3 &= t_6^* \\ t_4 &= t_{11}^* \end{aligned}$$

$$e_{2,1}^{(s,R)} \quad \begin{aligned} t_1 &= t_{10}^* \\ t_2 &= t_3^* \\ t_3 &= t_4^* \\ t_4 &= t_8^* \end{aligned}$$

$$e_{2,2}^{(s,R)} \quad \begin{aligned} t_1 &= t_7^* \\ t_2 &= t_{10}^* \\ t_3 &= t_2^* \\ t_4 &= t_4^* \end{aligned}$$

$$e_{2,3}^{(s,R)} \quad \begin{aligned} t_1 &= t_3^* \\ t_2 &= t_7^* \\ t_3 &= t_8^* \\ t_4 &= t_2^* \end{aligned}$$

The knowledge of the transition instants in each function of the e.m.f.s expressions allows the right evaluation of the coefficient of the differential equation for the computation of the electrical unknowns.

All the operations have been developed in order to produce a friendly approach on a computing unit without any lose of accuracy, in non-symmetrical condition too. These operations, in fact, don't need a pre-computational phase (complex winding factors, Fourier's expansions and so on) but start from a geometrical knowledge of the system and from the values of the electrical parameters (phases and bars resistance and leakage inductances).

CONCLUSION

In the paper a new approach has been presented, in the field of the computation of electrical unknown of an induction machine, very suitable to solve non-symmetrical condition too by means of a very friendly computer evaluation. This one represents the first step that allows the theoretical formalisation of the problem.

In order to simplify the presentation of the mathematical method in the paper only the case will constant value of the speed has been considered. In the future the same methodology will be approach by a most general point of view by considering the mechanical transient and variable function $\omega(t)$.

Next phases will approach the extension of these concepts to a most complex induction machine structure and the study of feasibility of an oriented software, particularly suitable for the mentioned problem.

LIST OF SYMBOLS

μ_0	air gap permeability
χ	central abscissa of a generic window function
c_0	generalised first integration limit
d_0	generalised second integration limit
δ_c	air gap ;
X	generalised range of window function
B	air-gap flux density

REFERENCES

1. E CLARKE, *Circuit analysis of a.c. power systems*, Vol. I *Symmetrical and related components*. Wiley, New York 1943
2. G. KRON, *Equivalent circuits of electrical machinery*, Dover, New York 1967
3. J. STEPINA, Raumzeiger als Grundlage der Theorie der Elektrischen Maschinen, *Elektrotechnische Zeitschrift A* 1967
4. B. ADKINS, R.G. HARLEY, *The general theory of alternating current machines*, Chapman and Hall, London 1975
5. L. SCHWARTZ, *Theorie des distributions*, Hermann - Cie, Paris vol. 1,2 ; 1957.
6. G. D' ANGELO, S. MEO, M. SCARANO, *A new software tool for analysis and design of induction machines*, Third International Conference on Software for Electrical Engineering Analysis and Design ELECTROSOFT96 Proc., 28-30 May 1996 San Miniato Italy.
7. S. MEO, M. SCARANO, *A new formulation of the mathematical model for non traditional electrical machines by means of window functions*, ICEMA Proc., Adelaide (Australia), 14-16 Sept. 1993.
8. V. ISASTIA, S. MEO, M. SCARANO, *A new formulation of the mathematical model of induction machines by means of window function*, International Conference on Electrical Machines (ICEM '94) Proc., Paris (F), 5-8- Sept. 1994
9. S. MEO, M. SCARANO, *Analysis of a dissimmetrical actuator by window functions*, Proc. of International Symposium on Electromagnetic Fields in Electrical Engineering, 25-27 Sept. 1995, Thessaloniki, Greece.

SULLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE CHE CONSERVANO LA NORMA IPERBOLICA E I SETTORI IPERBOLICI

Ferdinando Casolaro*, Franco Eugeni**, Giovanni Mataloni***

Dedicato al ricordo del nostro compianto amico Bruno Rizzi

SUNTO - Si introducono e si studiano le trasformazioni lineari che conservano i settori e le norme iperboliche.

1. Introduzione

Nella presente nota desideriamo presentare una certa classe di trasformazioni lineari di un piano euclideo in se, che presentano una serie di analogie, certamente non casuali, con i classici movimenti del piano.

I movimenti del piano sono biezioni che conservano:

- (a) La distanza di due punti, ovvero la norma euclidea di un vettore, ovvero, usando la rappresentazione complessa, la norma di un numero complesso.
- (b) L'angolo di due semirette, ovvero il prodotto scalare di due vettori, ovvero il "prodotto scalare di due numeri complessi."

Ricordiamo che i movimenti sono anche definibili come trasformazioni lineari conformi, ovvero come affinità nelle quali sono uniti i punti ciclici del piano, cioè i punti impropri della coppia di rette di equazioni:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

* Dip.^{to} di Scienze, Università di Benevento

** Università degli Studi di Roma Tre

***Dip.^{to} di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro - "G. D'Annunzio" Chieti

Nel paragrafo 2 daremo una rilettura di dette trasformazioni facendo ricorso alla rappresentazione complessa, mediante la quale la presentazione e la trattazione analitica è molto agevole.

Nel paragrafo 3 presenteremo alcune interessanti strutture, precisamente l'algebra dei numeri bireali o iperbolici e l'algebra dei numeri duali o parabolici. Si tratta di una rilettura di "vecchi argomenti" ripresentati come strumenti di lavoro e in modo estremamente sintetico. Queste due algebre, assieme all'algebra dei numeri complessi, sono le uniche tre algebre reali, doppie, associative e commutative.

Nel paragrafo 4, del tutto originale, mediante una analogia aturale tra "circolare" e "iperbolico" introdurremo e studieremo le "trasformazioni iperboliche" e le loro proprietà. Tali trasformazioni conservano:

(a) La distanza iperbolica di due punti ovvero la "norma iperbolica di un vettore"

ovvero usando la rappresentazione iperbolica, la norma di un numero iperbolico.

(b) Conservano il settore iperbolico associato a due semirette, ovvero il "prodotto iperbolico di due vettori" ovvero "il prodotto iperbolico di due numeri iperbolici".

Marginalmente siamo condotti, in modo del tutto naturale, ad introdurre il concetto di *esponenziale iperbolico* per il quale valgano formule del tutto analoghe a quelle di Eulero.

2. Numeri complessi e movimenti del piano

Il punto di partenza di questo paragrafo è l'evidenziare quella naturale biezione tra il piano euclideo "vettoriale" e il piano Argand-Gauss rappresentativo dei numeri complessi, biezione che nasce nel modo seguente. Denotata con, $\vec{i}, \vec{j}$ una base ortonormale del piano euclideo e con i l'unità complessa associamo due elementi quali il vettore $\vec{\pi} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e il numero complesso $\alpha = a + ib$, per il fatto di essere rappresentati dalla medesima coppia (a, b) .

Evidenzieremo i seguenti elementi:

a) Il modulo $|\vec{u}|$ di un vettore $\vec{u}$, ovvero la norma "circolare" $|\alpha|$ del numero complesso α , ad esso associato, sono individuate da

$$u^2 = |\vec{\pi}|^2 = a^2 + b^2, |\alpha|^2 = a^2 + b^2$$

b) Il prodotto interno di due vettori di componenti (a, b) e (a', b') si definisce ponendo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = aa' + bb'.$$

Chiamiamo prodotto circolare (o interno) di due numeri complessi α e β di componenti rispettive (a, b) e (a', b') il numero:

$$\alpha \times \beta = aa' + bb'.$$

In tale modo l'angolo di due vettori ovvero di due numeri complessi α e β ha un coseno dato da:

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha \times \beta}{|\alpha| \cdot |\beta|}.$$

c) I numeri complessi di norma unitaria sono costituiti dal cosiddetto "esponenziale complesso" o "circolare" definito ponendo

$$e^{i\vartheta} = \exp(i\vartheta) = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

E' semplice provare che le due trasformazioni aventi le seguenti equazioni:

$$(2.1) \quad Z' = e^{i\vartheta} Z, \quad (2.2) \quad Z' = e^{i\vartheta} \bar{Z}$$

rappresentano, rispettivamente, i *movimenti diretti* ed *inversi* del piano (con l'origine fissa). Questa circostanza si verifica facilmente scrivendo le equazioni per esteso:

$$\begin{aligned} Z' = x' + iy' &= e^{i\vartheta} Z = (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(x + iy) = \\ &= (x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) + i(x \sin \vartheta + y \cos \vartheta) \end{aligned}$$

ed analogamente

$$\begin{aligned} Z' = x' + iy' &= e^{i\vartheta} \bar{Z} = \\ &= (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) (x - iy) = \\ &= (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) + i(x \sin \vartheta - y \cos \vartheta). \end{aligned}$$

E' facile verificare direttamente che le due trasformazioni indicate, oltre ad essere chiaramente lineari, conservano la norma e gli angoli. Per la norma basta osservare che:

$$(2.3) \quad |Z'| = |e^{i\vartheta} Z| = |e^{i\vartheta}| \cdot |Z| = |Z|$$

ed analogamente, per la seconda trasformazione, per essere $|\bar{Z}| = |Z|$.

In quanto alla conservazione degli angoli, se moltiplichiamo col prodotto interno il numero complesso Z per il suo trasformato $Z' = e^{i\vartheta} Z$ secondo la (2.1) si ha:

$$\begin{aligned} Z' \times Z &= x(x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) + y(x \sin \vartheta + y \cos \vartheta) = \\ &= (x^2 + y^2) \cos \vartheta = Z^2 \cos \vartheta = |Z'| \cdot |Z| \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Non si ottiene un analogo risultato moltiplicando la (2.2) avendosi

$$\begin{aligned} Z' \times Z &= x(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) + y(x \sin \vartheta - y \cos \vartheta) = \\ &= (x^2 - y^2) \cos \vartheta + 2xy \sin \vartheta. \end{aligned}$$

In quanto alla (2.1) il risultato si interpreta geometricamente notando che l'operatore $e^{i\vartheta}$ trasforma il vettore Z in un vettore Z' ruotato di ϑ , attorno all'origine e in senso antiorario. In altre parole la (2.1) è una rotazione pura.

Per la (2) si può notare che essa si può pensare composta mediante le due trasformazioni:

$$Z' = e^{i\vartheta} W, \quad (2.2a) \quad W = Z' \quad (2.2b)$$

La (2.2b) è la simmetria rispetto all'asse delle ascisse, mentre la (2.2a) è una rotazione pura. La composizione è dunque una "generica simmetria" il cui asse è la "retta di punti uniti" che la (2.2) presenta come trasformazione lineare. Un semplice calcolo implica che la (2.2) ha come retta di punti uniti la retta H

$$x(\cos \vartheta - 1) + y \sin \vartheta = 0 \quad (2.3)$$

e centro nel punto $C = (0, -\sin \vartheta, \cos \vartheta + 1)$.

Ciò equivale a dire che la (2.2) è una omologia di centro C e asse (3) o anche una simmetria ortogonale di asse (3) nella direzione di C .

3. Le tre algebre reali doppie

L'osservazione fatta all'inizio del Par.2 permette di riguardare un numero complesso come un vettore 2-dimensionale ed è in tal senso che, l'algebra dei numeri complessi, si riguarda come un'algebra di dimensione due sui numeri reali.

In questo paragrafo vogliamo rimarcare, anche se ciò è noto in letteratura, e ridimostrare, in modo diretto ed elementare e per esclusivi fini didattici, che tale algebra dei numeri complessi, in quanto algebra doppia associativa, commutativa ed unitaria non è l'unica di interesse.

Sia A l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali scritti nella forma binomiale $a+ib$, con $a,b \in R$ dove i è una "indeterminata formale". Supponiamo che in A siano definite due operazioni:

(+): l'operazione di addizione definita, nella maniera consueta come "somma di coppie posto a posto":

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

l'operazione di moltiplicazione definita in fase preliminare ponendo:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + i(ad + bc) + bdi^2$$

dove il quadrato della indeterminata si definisce in forma più generale col porre:

$$i^2 = \alpha i + \beta \quad (3.1)$$

essendo $\alpha, \beta \in R$ preassegnati,

Si dimostra facilmente che tale algebra è associativa, commutativa, unitaria e anche distributiva rispetto alla somma, quali che siano $\alpha, \beta \in R$.

Presentiamo tre esempi:

a) Se l'equazione (3.1) è :

$$i^2 = -1$$

si ha l'ordinaria algebra dei numeri circolari o complessi che oltre alle proprietà su esposte, non contiene divisori dello zero.

b) Se l'equazione (3.1) è:

$$i^2 = 1$$

si ha una differente algebra, detta algebra dei numeri bireali o iperbolici. La struttura di tale algebra naturalmente non può essere quella di campo

in quanto l'equazione: $x^2 = 1$, avrebbe almeno quattro soluzioni:

$$x = \pm 1, x = \pm i.$$

Ci sono inoltre, divisori dello zero, avendosi:

$$0 = i^2 - 1 = (i-1)(i+1)$$

c) Se l'equazione (3.1) è :

$$i^2 = 0$$

si ha una terza algebra, detta algebra dei numeri parabolici o duali che non risulta isomorfa a nessuna delle due precedenti. Anche l'algebra dei numeri parabolici non forma un campo ammettendo, ad esempio, i come divisore dello zero. E' facile verificare che i numeri duali, chiaramente non isomorfi ai numeri complessi, sono non isomorfi anche ai numeri bireali. Infatti un divisore dello zero, nei numeri duali, ha la parte reale nulla, mentre un numero bireale è un divisore dello zero, se e solo se, $a^2 - b^2 = 0$.

Possiamo provare il:

TEOREMA 1 - *Un'algebra associativa, commutativa, unitaria, distributiva è priva di divisori dello zero se e solo se $\Delta = \alpha^2 + 4\beta < 0$.*

Dimostrazione - Se risultasse $\Delta \geq 0$ l'equazione $i^2 = \alpha i + \beta$ presenterebbe due radici reali (non necessariamente distinte) per cui si avrebbe:

$$i^2 - \alpha i + \beta = (i - \gamma_1) \cdot (i - \gamma_2) = 0$$

dove, essendo $\gamma_1, \gamma_2 \in R$ ci sarebbero divisori dello zero.

Viceversa, supponiamo che l'algebra sia integra. In questa ipotesi,

$$(A + iB)(x + iy) = (Ax + B\beta y) + i[Bx + (A + B\alpha)y] = 0$$

implica se $A + iB \neq 0$ che è $x = y = 0$. Segue allora che il sistema deve avere la sola soluzione nulla in x ed y . Ciò implica che si ha:

$$\begin{cases} Ax + B\beta y = 0 \\ Bx + (A + B\alpha)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} A & \beta B \\ B & A + \alpha B \end{vmatrix} \neq 0$$

cioè:

$$A^2 + \alpha AB - \beta B^2 \neq 0, \forall A, B \in R$$

che implica al variare del trinomio in A, B che è:

$$\alpha^2 + 4\beta < 0.$$

c.v.d.

TEOREMA 2 - *Le algebre doppie associative, commutative, unitarie, distributive che ampliano il sistema dei numeri reali mediante la*

$$i^2 = \alpha i + \beta$$

sono isomorfe ai complessi, ai bireali, ai duali a seconda che risulti:

$$\Delta = \alpha^2 + 4\beta$$

rispettivamente minore, maggiore o uguale a zero.

Dimostrazione

Il prodotto di due elementi di un'algebra doppia unitaria, distributiva, associativa e commutativa è dato da:

$$(a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc) + bdi^2$$

$$i^2 = \alpha i + \beta \quad \text{ovvero} \quad (2i - \alpha)^2 = \Delta$$

Distingueremo i tre casi di $\Delta = 0, \Delta \geq 0, \Delta < 0$ e indicheremo nei vari casi la trasformazione della base $\{1, i\}$ in una nuova base $\{1, j\}$ rispetto alla quale si abbia uno dei tre casi fondamentali di numeri duali complessi e bireali.

CASO I Sia $\Delta = 0$, poniamo

$$j = 2i - \alpha$$

Trasformando il generico $a + ib$ in $a + \left[\frac{(j + \alpha)}{2} \right] \cdot b$ si ottiene

un'algebra per la quale i calcoli si eseguiranno ponendo $j^2 = 0$, cioè l'algebra data è isomorfa ai numeri duali.

CASO II Sia $\Delta > 0$ introduciamo la trasformazione:

$$j = \frac{1}{\gamma}(2i - \alpha)$$

da cui

$$j^2 = \frac{1}{\gamma^2}(2i - \alpha)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Delta = 1.$$

La trasformazione costruita assicura l'isomorfismo con l'algebra dei numeri iperbolici o circolari.

CASO III Sia $\Delta < 0$. Posto $\Delta = -\gamma^2$ introduciamo la trasformazione

$$j = \frac{1}{\gamma}(2i - \alpha)$$

da cui

$$j^2 = \frac{1}{\gamma^2}(2i - \alpha)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Delta = -1.$$

La trasformazione costituita assicura l'isomorfismo con l'algebra dei numeri complessi.

c.v.d.

Operiamo, ora, nei numeri bireali, in modo del tutto analogo a come abbiamo operato in campo complesso. Tenendo conto che $i^2 = 1$, definiamo la norma:

$$|z|^2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 - b^2$$

che, con $a = \cosh \vartheta$, $b = \sinh \vartheta$, rappresenta la norma del vettore unitario in quanto verifica la relazione fondamentale delle funzioni iperboliche:

$$\cosh^2 \vartheta - \sinh^2 \vartheta = 1$$

Un generico bireale di norma unitaria si può dunque scrivere nella forma:

$$\cosh \vartheta + i \sinh \vartheta$$

e possiamo chiamare tale numero esponenziale bireale o iperbolico. In analogia al caso complesso, per definizione, poniamo

$$\exp(i\vartheta) = H^{i\vartheta} = \cosh \vartheta + i \sinh \vartheta.$$

Il nostro problema è ora quello di studiare le due trasformazioni:

$$Z' = H^{i\vartheta} Z \quad (j)$$

$$Z' = H^{i\vartheta} \bar{Z} \quad (ij)$$

Per (j) risulta:

$$\begin{aligned} Z' = x' + iy' = H^{i\vartheta} Z &= (\cosh \vartheta + i \sinh \vartheta) \cdot (x + iy) = \\ &= (x \cosh \vartheta + y \sinh \vartheta) + i(x \sinh \vartheta + y \cosh \vartheta) \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} x' = x \cosh \vartheta + y \sinh \vartheta \\ y' = x \sinh \vartheta + y \cosh \vartheta \end{cases} \quad (3.2)$$

Le (3.2) rappresentano, dunque, una trasformazione del piano in se stesso. Proviamo che la (1.2) conserva la "norma iperbolica". Ciò segue dalla relazione:

$$\begin{aligned} |Z'|^2 &= |x'^2 - y'^2| = \left| (x^2 \cosh^2 \vartheta + 2xy \cosh \vartheta \sinh \vartheta + y^2 \sinh^2 \vartheta) + \right. \\ &\quad \left. - (x^2 \sinh^2 \vartheta + 2xy \sinh \vartheta \cosh \vartheta + y^2 \cosh^2 \vartheta) \right| = \\ &= |x^2 (\cosh^2 \vartheta - \sinh^2 \vartheta) - y^2 (\cosh^2 \vartheta - \sinh^2 \vartheta)| = \\ &= |x^2 - y^2| = |Z|^2. \end{aligned}$$

Nel seguito chiameremo prodotto (interno) iperbolico di due numeri iperbolici Z e Z' la grandezza seguente

$$Z \cdot Z' = (x, y) \cdot (x', y') = x \cdot x' - i^2 yy' = xx' - yy'.$$

Dalle (3.2) segue

$$\begin{aligned} Z \cdot Z' &= x \cdot x' - yy' = x^2 \cosh \vartheta + xy \sinh \vartheta - xy \sinh \vartheta - y^2 \cosh \vartheta = \\ &= (x^2 - y^2) \cosh \vartheta. \end{aligned}$$

cioè Z e Z' individuano due semirette caratterizzanti il settore iperbolico ϑ di coseno iperbolico:

$$\cosh \vartheta = \frac{xx' - yy'}{x^2 - y^2} = \frac{(x, y) \cdot (x', y')}{Z^2}$$

Allora:

$$Z' = H^{i\vartheta} Z$$

è una trasformazione che conserva il modulo (o norma) iperbolico ed i settori.

In generale, una trasformazione di questo tipo (che è l'analogia iperbolica di una trasformazione lineare conforme) si può chiamare trasformazione settoriale o trasformazione lineare iperbolica.

Si prova facilmente che se $\cosh \vartheta \neq 0$ e $\sinh \vartheta \neq 0$ i punti uniti della traslazione sono l'origine e i punti all'infinito delle rette $x - y = 0$, $x + y = 0$.

Se invece $\sinh \vartheta = 0$ (essendo sempre $\cosh \vartheta \neq 0$) si ha una omologia con asse improprio e centro nell'origine.

Lo studio della trasformazione $Z' = H^{i\vartheta} Z$ è del tutto analogo, trattandosi di una composizione di una simmetria ortogonale per una trasformazione iperbolica del tipo descritto sopra.

BIBLIOGRAFIA

1. A. AGOSTINI, *Problemi geometrici elementari e classici, funzioni circolari ed iperboliche*, in: L. Berzolari - G. Vivanti - D. Gigli - *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, Vol. II, Parte I, Hoepli Milano, 1950.
2. G. CIMMINO, *Istituzioni di Analisi Infinitesimale* Vol. I, Patron Bologna, 1953.
3. V. DI MARCELLO - F. EUGENI - G. MATALONI, *Funzioni iperboliche e circolari: un confronto*, su questo stesso volume.

HIGHER ORDER MOMENTS OF A SUM OF RANDOM VARIABLES: REMARKS AND APPLICATIONS

Luisa Tibiletti* , Ernesto Volpe di Prignano**

SUNTO - I momenti di una somma di variabili casuali dipende sia dai momenti puri che da quelli misti. In questa nota si introduce un indice relativo dell'importanza di questi ultimi. Fissati i momenti puri, si individua la relazione funzionale tra gli addendi che conduce ai valori estremi. Sono, infine, suggerite delle applicazioni in Finanza, Teoria delle Decisioni e Scienze Attuariali.

ABSTRACT - The moments of a sum of random variables depend on both the pure moments of each random addendum and on the addendum mixed moments. In this note we introduce a simple measure to evaluate the relative importance to attach to the latter. Once the pure moments are fixed, the functional relation between the random addenda leading to the extreme values is also provided. Applications to Finance, Decision Theory and Actuarial Sciences are also suggested.

KEYWORDS - Higher Order Moments; Cauchy-Schwarz Inequality; Pearson Correlation Coefficient.

* Dipartimento di Statistica e Matematica applicata alle Scienze Umane "Diego de Castro", Università di Torino, Piazza Arbarello 8, I-10122 Torino (Italy), Tel. +39-11-670.6229, Fax +39-11-670.6238.
e-mail TIBILETTI@CSIVMS.CSI.IT

** Dipartimento di Matematica per le Decisioni Economiche Finanziarie e Assicurative, Università "La Sapienza", Via Castro Laureziano 9, I-00161 Roma (Italy), Tel. +39-6-4959361, Fax +39-6-49766765

INTRODUCTION¹

The n -th order moment ($n \geq 2$) of a sum of random variables depend on both the n -th moments of each random addendum and on the mixed moments of the addenda. The aim of this note is to go a step further in the investigation of the latter influence. A new index which is a relative measure of the importance of the mixed moments in the determination of the sum moments is introduced. As the Pearson coefficient is a measure of the *linear dependence* strength between the two random addenda, so the new index can be interpreted as a measure of strength of a particular *non-linear dependence*.

This index can also be a useful tool for applications. Some examples of these concerning Finance, Decision Theory and Actuarial Sciences are provided. The plan of the paper is as follows. In Section 1 the problem is explained. In Section 2 the higher order index is introduced and in Section 3 some special cases are discussed. Further remarks involving the sum of m , $m \geq 2$, random variables are pointed out in Section 4. Section 5 is devoted to applications.

1. THE PROBLEM

Let X and Y be two non-degenerate random variables (r.v.'s) endowed with finite moments $E(X^{n-k}Y^k)$ for $n \geq 2$ and $k = 0, \dots, n$. Then, the n -th order moment of the sum $S = X + Y$ is given by

$$E(X+Y)^n = E(X^n) + E(Y^n) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} E(X^{n-k}Y^k). \quad (1)$$

Above displays the fact that the n -th order moment of S depends on both the n -th order pure moments of X and Y and also on a linear combination of their mixed moments. We are aimed to explore the rôle played by the dependence structure between X and Y in the determination of the latter.

¹Although the paper is co-authored we specify that Sections 2, 3, 4, 5 are to be attributed to Luisa Tibiletti, and Section 1 to E. Volpe di Prignano.

2. A RELATIVE HIGHER ORDER INDEX

It is well-known that the second moment of a sum is given by

$$E(X+Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) \quad (2)$$

Denoting by

$$r^{(2)} = \frac{E(XY)}{\sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}}$$

we can write (2) as

$$E(X+Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2r^{(2)}\sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}.$$

By the Cauchy-Schwarz inequality, $r^{(2)}$ is bounded ($-1 \leq r^{(2)} \leq 1$).

Consequently, $r^{(2)}$ provides a simple *relative measure* of the influence of the mixed moment over the *sum variance*, whenever the second moments of X and Y are fixed. This result suggests a way for defining an analogous index for $n > 2$. In fact, by means of the Cauchy-Schwarz inequality we have

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} E(X^{n-k} Y^k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} |E(X^{n-k} Y^k)| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sqrt{E(X^{2(n-k)})} \sqrt{E(Y^{2k})}$$

It is worth noting that the right-hand-side of the above inequality depends only on the moments of X and Y and no mixed moments appear. Let us define the index

$$r^{(n)} = r^{(n)}(X, Y) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} E(X^{n-k} Y^k)}{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sqrt{E(X^{2(n-k)})} \sqrt{E(Y^{2k})}}, \quad n \geq 2.$$

Clearly, it results $-1 \leq r^{(n)} \leq 1$. Formula (1) can be rewritten

$$E(X+Y)^n = E(X^n) + E(Y^n) + r^{(n)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sqrt{E(X^{2(n-k)})} \sqrt{E(Y^{2k})} \right\} \quad (3)$$

So, once the moments until the $2(n-1)$ -th order of X and Y are fixed, $r^{(n)}$ can be interpreted as a *relative measure* of the importance which is to be attached to the dependence structure between X and Y in the determination of their n -th order sum.

Remark 1. Cases $n=3$ and $n=4$ are relevant from the application view point. In fact once the pure moments of X and Y are fixed, $r^{(3)}$ and $r^{(4)}$ provide two *relative measures* of the influence of the dependence structure between X and Y on the *asymmetry* and the *kurtosis* of their sum.

Remark 2. Once the moments until the $2(n-1)$ -th order of X and Y are fixed, a lower and an upper bound for $E(X+Y)^n$ is given by

$$E(X+Y)^n \geq E(X^n) + E(Y^n) - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sqrt{E(X^{2(n-k)})} \sqrt{E(Y^{2k})}$$

and

$$E(X+Y)^n \leq E(X^n) + E(Y^n) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sqrt{E(X^{2(n-k)})} \sqrt{E(Y^{2k})}$$

3. SPECIAL VALUES FOR $r^{(n)}$

It is known that the index $r^{(2)}$ is a measure of the strength of X and Y along a linear function, *i.e.*, the more X and Y tend to cluster around the graph of a linear function the more $r^{(2)}$ tends to the extreme values².

A spontaneous question which arises is what is the function type clustered by X and Y when the n -th order index $r^{(n)}$ tends to the extreme values. In other terms, *once the marginal distributions of X and Y are fixed*, what is the functional relation between X and Y which induces a greater influence over $E(X+Y)^n$?

² That derives from the fact that $|r^{(2)}| = 1$ if $|E(XY)| = \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$.

That occurs if and only if there exists a real number α such that $P\{Y = \alpha X\} = 1$, see for example ROHATGI [8].

The answer can easily be derived from rewriting the following linear combination of mixed moments

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} E(X^{n-k} Y^k) = E(W \cdot Z_{(n)})$$

where $W = XY$ and $Z_{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} E(X^{n-k-1} Y^{k-1})$. Applying the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$|E(W \cdot Z_{(n)})| \leq \sqrt{E(W^2)} \sqrt{E(Z_{(n)}^2)}$$

with equality if and only if there exists a real number α such that $P\{W = \alpha Z_{(n)}\} = 1$. Therefore, the more the r.v.'s tend to be tied by the following functional relation

$$xy = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k-1} y^{k-1}, \quad \alpha \in \mathfrak{R} \quad (4)$$

the more $r^{(n)}$ tends to the extreme values.

The functional relation between X and Y for the special cases $n=3$ and $n=4$ will be set out, by an analogous procedure that for $n \geq 5$ can be easily achieved.

3.1.a THIRD ORDER INDEX

Note that $Z_{(3)} = 3(X+Y)$. The linear dependence between W and $Z_{(3)}$ implies that $XY = 3\alpha(X+Y)$, thus

$$Y = \frac{3\alpha X}{X - 3\alpha}, \quad \text{where } \alpha \in \mathfrak{R}.$$

If $\alpha < 0$, $r^{(3)}$ tends to the minimum; vice versa, it tends to the maximum if $\alpha > 0$.

In conclusion, the more the r.v.'s are clustered around a hyperbole the more $r^{(3)}$ tends to the extreme values.

3.1.b FOURTH ORDER INDEX

Let $Z_{(4)} = 2[X^2 + Y^2] + 3XY$. If a linear dependence between the two non-degenerate r.v.'s W and $Z_{(4)}$ holds, there exists $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ such that

$$XY = 2\alpha[2(X^2 + Y^2) + 3XY],$$

or equivalently,

$$X^2 + Y^2 + \beta XY = 0, \text{ where } \beta = \frac{6\alpha - 1}{4\alpha}, \alpha \neq 0. \quad (5)$$

Equation (5) is solved whenever a non-zero number γ such that

$$Y = \gamma X,$$

exists³. If $\gamma < 0$; $r^{(4)}$ tends to -1; vice versa⁴, if $\gamma > 0$ it tends to +1. Consequently, when X and Y are clustered around a linear function $r^{(2)}$ and $r^{(4)}$ tend to the extreme values.

3.2 A NECESSARY CONDITION FOR THE STOCHASTIC INDEPENDENCE

Whenever X and Y are zero-mean⁵ r.v.'s, $r^{(2)}$ coincides with the Pearson correlation coefficient. The vanishing of this last, is a necessary but a non-sufficient condition for declaring X and Y independently distributed. A spontaneous question which could arise concerns the connections between the stochastic independence and the vanishing of the higher order indexes $r^{(n)}$. Simple calculations prove that the independence between two non-degenerate null-mean r.v.'s implies null-indexes until the third order, nevertheless for higher orders that could *not* be still true. For example,

³Imposing $\beta = \frac{-\gamma^2 - 1}{\gamma}$, then $Y = \gamma X$ is a solution of equation (5).

⁴If $\gamma < 0$, then $\beta \geq 2$ and $\alpha < 0$. Vice versa, if $\gamma > 0$, then $\beta \leq -2$ and $\alpha > 0$.

⁵If X and Y are not zero-mean r.v.'s, we can replace them by the zero-mean r.v.'s $X^* = X - \mu_x$ and $Y^* = Y - \mu_y$ where $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$.

$r^{(4)} > 0$ (see the Appendix). That shows that the mixed moments could play an important rôle even when X and Y are independently distributed. A necessary condition for independence is stated below.

Property 3. *Let X and Y be non-degenerate and null-mean r.v.'s. If the stochastic independence holds, then*

$$r^{(n)} = 0 \quad \text{if } n \leq 3 \quad (6)$$

$$r^{(n)} = \frac{\sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k} E(X^{n-k}) E(Y^k)}{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sqrt{E(X^{2(n-k)})} \sqrt{E(Y^{2k})}} \quad \text{if } n \geq 4 \quad (7)$$

The proof follows from the fact that $E(X^{n-k}Y^k) = E(X^{n-k})E(Y^k)$ for $k = 1, \dots, n-1$ and $E(X) = E(Y) = 0$.

Clearly, (6)-(7) for all $n \geq 2$ are not sufficient conditions for independence, since they only imply

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)),$$

for all power functions g and h (see the Appendix for a necessary and sufficient condition for independence).

Now, a generalisation of the Pearson coefficient can be introduced

$$\rho^{(n)}(X, Y) = r^{(n)}(X, Y) - \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} E(X^{n-k}) E(Y^k)}{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sqrt{E(X^{2(n-k)})} \sqrt{E(Y^{2k})}}, \quad \text{for } n \geq 2.$$

and Proposition 1 can be restated as follows.

Property 4. *Let X and Y be non-degenerate and zero-mean r.v.'s. If the stochastic independence holds, then $\rho^{(n)} = 0$ for $n \geq 2$.*

4. AN EXTENSION

Above results can be easily extended to the sum of m ($m \geq 2$) r.v.'s. $X_1, \dots, X_m$:

$$E(X_1 + \dots + X_m)^n = E(X_1^n) + \dots + E(X_m^n) + \sum \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} E(X_1^{n_1} \dots X_m^{n_m}), \quad n \geq 2$$

the sum being taken over each solution $(n_1, \dots, n_m)$ of the equation $n_1 + \dots + n_m = n$, where $n_i \in \mathbb{N}$ and $n_i \neq n$, for all $i = 1, \dots, m$. The index

$$r^{(n)}(X_1, \dots, X_m) = \frac{\sum \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} E(X_1^{n_1} \dots X_m^{n_m})}{\sum \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} \sqrt{E(X_1^{2n_1})} \dots \sqrt{E(X_m^{2n_m})}}, \quad n \geq 2$$

can be introduced. Since $-1 \leq r^{(n)}(X_1, \dots, X_m) \leq 1$, it results a relative measure of the dependence structure influence.

5. APPLICATIONS

In this section we collect some topics where the above notion can be used.

5.1 ASYMMETRY OF STOCK RETURN DISTRIBUTION

A relevant issue under discussion in Finance concerns the asymmetry of the distribution of stock-returns. This topic has long been investigated in the literature and massive empirical studies have been developed (see for example LAU *et al.* [6]). As suggested by PECCATI and TIBILETTI [7], a possible explanation of this fact can be found in the presence of positive dependence between the r.v.'s involved, inducing positive values for $r^{(3)}$. Empirical exploration over more than thirty stock-returns covering three years seems to confirm this suggestion (DEANTONI and TIBILETTI [2]). This result tends to discredit a common opinion in Finance about the diversification effect on skewness (see, for example, SINGLETON and WINGENDER [12], p. 338). In fact, if $r^{(3)} > 0$, the portfolio skewness may not diminish as the number of different stocks increases. Moreover, $r^{(3)}$ can be used for selecting stock-portfolios with the desired asymmetry.

5.2 MOMENT PREFERENCE

A significant number of articles studies the preference of a decision maker towards the moments of a random amount. The investigation has been focused on two questions: can the direction of preference for each moment be determined by some a-priori grounds and if so, what is the preference direction for each moment? For the third moment the first question has received considerable attention (see ARDITTI [1]; and KRAUS and LITZENBERGER [5] and SIMKOWITZ and BEEDLES [11]). With reference to the second question, ARDITTI [1] and KRAUS and LITZENBERGER [5] have implied a positive preference direction for the third moment (see ROSSI and TIBILETTI [9]). For higher moments, SCOTT and HORVARTH [10] proved that under appropriate assumptions, rational risk-averse investors prefer the odd moments and dislike the even moments of the distribution. In line with these results, multidimensional asset pricing models have been set out (see, for example, HOMAIFAR and GRADDY [4]). Clearly, whenever the random amount under consideration is given by the sum of two uncertain quantities, then their proper choice must take into account the values of $r^{(n)}$.

5.3 STOCHASTIC INEQUALITIES

A large number of commonly used stochastic inequalities involves the higher order moments of the distribution (see, for example, FELLER [3], p. 152 for a fairly general method for deriving non-trivial inequalities depending *only* on the distribution moments). If the r.v. under discussion is given by a r.v.-sum then the above mentioned inequalities can be sharpened by varying the dependence structure among the r.v.-addenda.

5.4 RISK PREMIUM FOR AGGREGATE CLAIMS

Let $S = X + Y$ be a portfolio of individual random claims X and Y provided with finite mixed moments $E(X^{n-k}Y^k)$ for $n \geq 2$ and $k = 0, \dots, n$. Denoted by u the decision maker's utility function, the risk premium P for S can be defined via

$$E[u(W + S)] = u(W - P)$$

where W is the initial reserve. If u is a sufficiently smooth function (see TIBILETTI [13]), then the risk premium admits the following expression

$$P = W - u^{-1} \left\{ u(W) + u'(W)\mu_1 + \frac{u''(W)}{2}\mu_2 + \frac{u'''(W)}{3!}\mu_3 + \dots + \frac{u^{(n)}(W)}{n!}\mu_n + o(\mu_n) \right\}$$

where μ_i stands for the i -th order moment of S . Then, using formula (3) it is possible to rewrite P in order to emphasise the contribution of the moments of X and Y from that of their dependence structure.

APPENDIX

There exists a large literature on the search for conditions guaranteeing stochastic independence. A theorem containing various results states the following. The r.v.'s X and Y are stochastically independent iff

$$E(g(X).h(Y)) = E(g(X)).E(h(Y))$$

for all Borel-measurable functions g and h , provided that the expectations involved exist.

This statement will be useful in the following.

Property A1. Let X and Y be non-degenerate and zero-mean r.v.'s. If stochastic independence holds, then $r^{(4)} > 0$.

Proof. Consider

$$\begin{aligned} E(X+Y)^4 &= E(X^4) + E(Y^4) + 4E(XY^3) + 4E(X^3Y) + 6E(X^2Y^2) = \\ &= E(X^4) + E(Y^4) + 6E(X^2)E(Y^2) \end{aligned}$$

therefore, it results $r^{(4)} > 0$.

Acknowledgments

The Authors are grateful to Luigi Montrucchio and Lorenzo Peccati for some helpful comments and suggestions. However, they remain the only responsible for any remaining errors.

REFERENCES

1. F., ARDITTI, *Risk and required return on equity*, Journal of Finance, March (1967), 19-36.
2. L. DEANTONI and L. TIBILETTI, *Skewness of stock-return distribution: a theoretical and empirical investigation*, presented at the 17-th EURO Working Group on Financial Modelling, Bergamo, June 1-3, 1995.
3. W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. II, New York: John Wiley & Sons, 1971.
4. G. HOMAIFAR and D.B. GRADDY, *Equity yields in models considering higher moments of the return distribution*, Applied Economics, 20 (1988), 325-334.
5. A. KRAUS and R. LITZENBERGER, *Skewness preference and the valuation of risk assets*, Journal of Finance, September (1988), 1085-1100.
6. H. LAU, J.R. WINGENDER and A.H. LAU, *On Estimating Skewness in Stock Returns*, Management Science, 35, n.9 (1989), 1139-1142.
7. L. PECCATI and L. TIBILETTI, *On the asymmetry of stock-return distribution*, presented at the 14-th EURO Working Group on Financial Modelling, Mantova, Nov. 25-27, 1993.
8. V.K. ROHATGI, *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, New York: John Wiley & Sons, 1976.
9. G.A. ROSSI and L. TIBILETTI, *Higher Order Polynomial Utility Functions: Advantages in their Use*, Quaderno del Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata alle Scienze Umane "Diego de Castro", Sezione Matematica, Università di Torino, n. 1 (1996).
10. R. SCOTT and P. HORVARTH, *On The Direction of Preference for Moments of Higher Order Than The Variance*, The Journal of Finance, 35, n. 4 (1980), 915-919.
11. M.A. SIMKOWITZ and W.L. BEEDLES, *Diversification in a Three Moment World*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 33, n. 1 (1978), 927-941.
12. J.C. SINGLETON and J. WINGENDER, *Skewness Persistence in Common Stock Returns*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 21, n. 3 (1986), 335-341.
13. L. TIBILETTI, *Risk Premium for Higher Order Moments*, Atlantic Economic Journal, Anthology, vol. 22, n. 3, sept. (1994), 82.

UNA CARATTERIZZAZIONE DELLE CONICHE DI $PG(2,q)$

Stefania Ferri *

SUNTO - Si prova che un k -insieme K di $PG(2,q)$, con $k \leq q+1$, di classe $[0, m, n]_1$, rispetto alle rette, tale che per ogni punto di K passi, al più, una retta m -secante K , è una conica.

ABSTRACT - We prove that a k -set K of $PG(2,q)$, with $k \leq q+1$, of class $[0, m, n]_1$, with respect to the lines, such that for each point of K meets, at the most, a m -secant line, is a conic.

INTRODUZIONE

0. Ricordiamo, cfr.[5], che un k -insieme K di uno spazio di Galois di dimensione r e ordine q , $PG(r,q)$, si dice di classe $[s, m, n]_1$, rispetto alle rette, $0 \leq s < m < n \leq q+1$, se le rette di $PG(r, q)$ possono intersecare K solo in s, m, n punti; K è di tipo $(s, m, n)_1$, rispetto alle rette, se è di classe $[s, m, n]_1$ ed esistono effettivamente rette di $PG(r,q)$ che intersecano K in s, m, n punti.

E' noto che una conica di $PG(2,q)$ è un $(q+1)$ - insieme, costituito da punti a tre a tre non allineati di tipo $(0, 1, 2)_1$, rispetto alle rette.

In questo lavoro proviamo che un k -insieme K di $PG(2,q)$, soddisfacente certe condizioni, è una conica.

* Dipartimento di Matematica, Università de L'Aquila

CARATTERIZZAZIONE DELLE CONICHE DI $PG(2,q)$.

1. Vogliamo dimostrare il seguente

2.

TEOREMA 1 - Un k - insieme K di $PG(2,q)$, con $k \leq q+1$, di classe $[0, m, n]_1$, rispetto alle rette, tale che per ogni punto di K passi, al più, una retta m -secante K , è una conica di $PG(2,q)$.

DIMOSTRAZIONE: Detti t_0, t_m, t_n i caratteri di K rispetto alle rette, cioè i numeri delle rette di $PG(2,q)$ che intersecano K rispettivamente in 0, m , n punti, si ha, cfr.[6]:

$$\begin{cases} t_0 + t_m + t_n = q^2 + q + 1 \\ m t_m + n t_n = k (q + 1) \\ m (m - 1) t_m + n (n - 1) t_n = k (k - 1) \end{cases} \quad (1.1)$$

in cui :

$$1 \leq m \leq q \quad 2 \leq n \leq q+1 \quad (1.2)$$

Dalla seconda e terza equazione di (1.1) si ricava:

$$t_m = \frac{k [n (q + 1) - k - q]}{m (n - m)} \quad t_n = \frac{k [k + q - m (q + 1)]}{n (n - m)} \quad (1.3)$$

Dovendo essere $t_m \geq 0$, dalla prima delle (1.3), si ha $k+q-m(q+1) \geq 0$, cioè $m \leq (k+q)/(q+1)$ e poiché, per ipotesi, $k \leq q+1$, risulta $m \leq (q+1+q)/(q+1) = 2 - 1/(q+1)$ e quindi, dovendo essere m intero, $m \leq 1$. Poiché per la (1.2) è $m \geq 1$, sarà necessariamente $m = 1$.

Dimostriamo ora che per ogni punto P di K deve passare almeno una retta m -secante, cioè una 1-secante K .

Preso infatti un punto qualsiasi P di K , se le rette per P fossero tutte n -secanti, poiché i punti di K si distribuiscono sulle $q+1$ rette per P n -secanti, si avrebbe $(n-1)(q+1)+1 = k$. Poiché, per ipotesi, $k \leq q+1$, dovrebbe essere $(n-1)(q+1)+1 \leq q+1$, cioè $n (q+1) \leq 2q+1$ da cui $n \leq 2 - 1/(q+1)$ ed essendo n un numero intero sarebbe $n \leq 1$ contro la (1.2). Ne segue l'asserto.

Poiché per ogni punto P di K passa, per ipotesi, al più, una 1-secante, ne segue che per ogni P passa esattamente una 1-secante K . Allora il numero

t_1 delle rette di $PG(2,q)$ 1-secanti K , sarà uguale a k . Quindi dalla prima delle (1.1) in cui si ponga $m=1$ si ha:

$t_1 = k = k [n (q+1) - k - q] / (n-1)$
 cioè $n (q+1) - k - q = n - 1$, da cui

$$k = (n - 1) q + 1 \quad (1.4)$$

Però, per ipotesi, $k \leq q+1$; ne segue che $(n - 1) q + 1 \leq q+1 \Rightarrow n \leq 2$.
 Avendo supposto per la (1.2) $n \geq 2$, dovrà essere $n = 2$.

Sostituendo $n = 2$ nella (1.4), si ha che $k = q+1$.

Dalle (1.3) in cui $m=1$, $n=2$, $k=q+1$ si ha:

$$t_1 = q + 1 \quad t_2 = q (q + 1)/2 \quad (1.5)$$

e dalla prima delle (1.1) per $m=1$ ed $n=2$, in cui si sostituiscano le (1.5) si ha

$$t_0 = q (q-1) / 2 \quad (1.6)$$

Dunque K è un $(q+1)$ -insieme costituito da punti a tre a tre non allineati (cioè un $(q+1)$ -arco) in quanto una retta qualsiasi di $PG(2,q)$ interseca K solo in 0, 1, 2 punti. Esistono effettivamente tali rette perché, per le (1.5) ed (1.6), i numeri t_0 , t_1 , t_2 sono tutti diversi da 0. Dunque K è un $(q+1)$ -arco di $PG(2,q)$ di tipo $(0, 1, 2)_1$ rispetto alle rette e quindi è una conica.

Il teorema 1 resta così provato.

BIBLIOGRAFIA

1. O. FERRI, *Una caratterizzazione grafica dell'insieme dei punti esterni ad una ovale in un π_q (q dispari)*. Rend. Mat. Univ. Roma Vol.14, Serie VI (1) (1981).
2. O. FERRI, *On type $((q-3)/2, (q-1)/2, q-1)$ k -sets in a affine plane $AG(2, q)$* . Annals of Discrete Mathematics, 14 (1982) 211-218.
3. B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*. Edizioni Cremonese, Roma (1961).
4. B. SEGRE, *Istituzioni di Geometria Superiore*. Istituto Mat. Univ. Roma (1966).
5. G. TALLINI, *Problemi e Risultati sulle geometrie di Galois*. Relaz. n.30 Ist. Mat. Univ. Napoli (1973) 1-30.
6. G. TALLINI, *Teoria dei k -insiemi in uno spazio di Galois, Teoria dei codici correttori*. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. Univ. Roma "La Sapienza", quad.n.64 (1985).

ATTUALI SVILUPPI NELLO STUDIO DELL'ASSOCIAZIONE TRA VARIABILI DI TIPO QUALITATIVO

Carlo Antonelli*, Enzo Ballone**

SUNTO - L'analisi statistica di variabili di tipo qualitativo fa riferimento alla funzione chi-quadrato. I primi sviluppi di questa funzione sono dovuti a Pearson (1904) e a Fisher (1929); successivamente è stata arricchita di validi contributi apportati da Yates, da Mantel-Haenszel ecc.

In questa nota si illustreranno alcune implementazioni della funzione chi-quadrato, in particolare come test statistico per la verifica dell'ipotesi di indipendenza e come misura dell'associazione lineare tra una variabile di tipo ordinale ed una di tipo dicotomico nell'ambito della sua scomposizione.

ABSTRACT - The most common procedure for analyzing contingency table data is by using chi-square statistic. The early development of chi-square analysis of contingency table is credited to Pearson (1904) and Fisher (1929), successively expanded by Yates, Mantel-Haenszel etc. In this paper some developments of the chi-square function has been outlined, particularly as statistical test for the null hypothesis of independence, for subdividing contingency tables and the chi-square test for linear association between ordinal variables.

* I.T.C. "R. de Sterlich" - Chieti;

** Cattedra di Statistica Medica, Univ. Degli Studi "G. D'Annunzio" - Chieti

1. INTRODUZIONE

Nell'analisi statistica di innumerevoli situazioni pratiche attinenti fenomeni del campo socio-sanitario, e non solo, ci si imbatte sempre più spesso nello studio di variabili di tipo qualitativo, ossia caratteri le cui modalità sono espresse da "attributi", "etichette" ecc che non sempre presentano un ordinamento oggettivo come ad esempio il sesso, la diagnosi, il tipo di intervento ecc. A questa tipologia di caratteri, detti variabili categoriali, appartengono anche quelle variabili quantitative continue che, talvolta per convenienza, sono considerate discrete, cioè costituite da un numero limitato di modalità. Ad esempio la variabile peso può essere raggruppata per classi a ciascuna delle quali viene assegnato un numero intero positivo.

In tali situazioni la metodologia statistica più usata per lo studio delle associazioni tra variabili fa riferimento alla funzione χ^2 di Pizzetti-Pearson; tale metodologia permette una valutazione in termini probabilistici dell'associazione tra i caratteri osservati.

Il presente lavoro, dopo aver richiamato i principali aspetti metodologici della distribuzione χ^2 , riporta alcune "derivazioni" della funzione, e precisamente quelle che le attribuiscono una valenza di test statistico per la verifica di ipotesi, in particolare "la scomposizione del chi-quadrato" e "la verifica dell'ipotesi di linearità". Queste due implementazioni permettono, quando se ne presentano le condizioni, di approfondire lo studio della relazione individuata, isolando le modalità che maggiormente o esclusivamente realizzano l'associazione (scomposizione del chi-quadrato) oppure qualificando la tipologia della relazione stessa (verifica dell'ipotesi di linearità).

2. ALCUNE CONSIDERAZIONI METODOLOGICHE

Si consideri lo spazio dei campioni di numerosità n conseguente ad una estrazione casuale da una popolazione P , di cui si conosce la struttura rispetto a due variabili statistiche (per struttura si intende la conoscenza delle proporzioni di unità classificate in base a tutte le possibili coppie di modalità dei due caratteri osservati). Si verifica che molti campioni presentano una struttura uguale o "vicina" a quella della popolazione e pochi una struttura molto diversa.

Una misura di quanto ciascun campione si discosta dalla struttura della popolazione di provenienza è data dalla statistica CHI-QUADRATO nella sua espressione:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^r \frac{(n_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}} \quad (1)$$

in cui:

- c ed r indicano il numero delle modalità delle due variabili;
- n_{ij} la frequenza assoluta, registrata nel campione, relativa alla coppia ij di modalità delle due variabili;
- n la numerosità del campione;
- p_{ij} la proporzione (frequenza relativa) di unità statistiche che presentano, nella popolazione, la coppia di modalità ij ;
- np_{ij} la frequenza assoluta teorica del campione, relativa alla coppia ij di modalità, sotto l'ipotesi che esso presenti la stessa struttura della popolazione.

In riferimento all'espressione (1) si può osservare che essa non dipende dal tipo (qualitativo o quantitativo) di carattere in esame e, inoltre, si

verifica che $\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^r n_{ij} = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^r np_{ij} = n$. Quest'ultima eguaglianza

implica che i k ($k=c \cdot r$) scarti $l_{ij} = n_{ij} - np_{ij}$ non sono fra di loro indipendenti ma ognuno di essi è vincolato dalla condizione che sommato agli altri $k-1$

deve rendere nulla la somma $\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^r l_{ij}$. Questa condizione rappresenta il

vincolo (v). Il numero delle modalità della variabile statistica diminuito del numero di vincoli costituisce il *grado di libertà* (g), dove $g = k - v$.

La statistica chi-quadrato, che in sostanza misura la discrepanza fra le frequenze osservate nel campione e quelle "teoriche", risulterà uguale a zero ($\chi^2 = 0$) solo se $n_{ij} = np_{ij}$ (caso di perfetta aderenza tra struttura del campione e struttura della popolazione), maggiore di zero ($\chi^2 > 0$) quanto più le frequenze osservate si discostano da quelle attese.

La distribuzione campionaria della statistica chi-quadrato è espressa dalla funzione di densità della variabile casuale del III tipo di Pearson che presenta la seguente espressione:

$$P(\chi^2 / g) = \frac{1}{2^{\frac{g}{2}} \Gamma(\frac{g}{2})} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} (\chi^2)^{\frac{g}{2}-1} d(\chi^2) \quad \text{con } g=k-v \quad (2)$$

essendo la funzione gamma data da: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt$. (3)

Graficamente la forma della curva si modifica al variare dei gradi di libertà, presenta un andamento esponenziale negativo per $g < 3$ e successivamente una forma campanulare con asimmetria destra che, molto marcata per valori bassi di g , tende a ridursi all'aumentare dei gradi di libertà (per $g > 30$ la distribuzione si approssima a quella gaussiana).

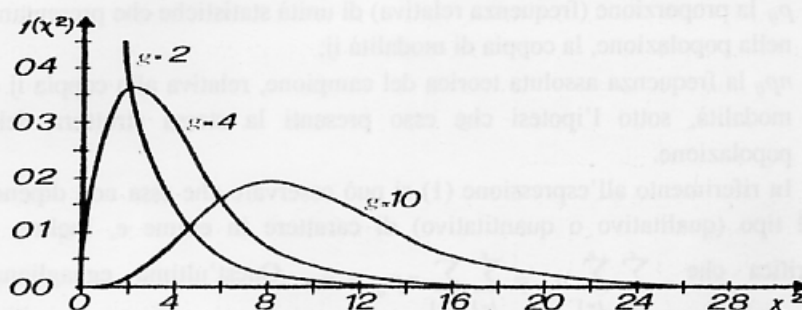


Fig.1 Funzione di distribuzione del χ^2 per alcuni gradi di libertà

3. IL χ^2 COME TEST STATISTICO PER LA VERIFICA DELL'IPOTESI DI INDIPENDENZA

Si ipotizzi che, in una popolazione P , due variabili siano indipendenti. Sotto questa ipotesi, chiamata usualmente ipotesi nulla (H_0), si è in grado di determinare le frequenze teoriche np_{ij} del campione e quindi, tramite la (1), il valore del χ^2 campionario (χ^2_o). Mediante la (2) si è in grado di calcolare la probabilità di ottenere un valore di χ^2 che, soddisfacendo ai v vincoli imposti, sia uguale o maggiore a quello ottenuto dai dati del campione, ossia:

$$P(\chi^2 \geq \chi_o^2) = \frac{1}{2^{\frac{g}{2}} \Gamma(\frac{g}{2})} \cdot \int_{\chi_o^2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} (\chi^2)^{\frac{g}{2}-1} d(\chi^2) \quad (4)$$

Si può ovviare al calcolo dell'integrale, essendo disponibili delle tavole che forniscono, per prefissati gradi di libertà, valori teorici di χ^2 che possono essere superati con diversi livelli di probabilità, di solito si considerano il 5%, l'1% e l'0,1%, denotando che solamente il 5% o l'1% o l'0,1% dei campioni, estratti casualmente dalla popolazione P in cui le due variabili sono indipendenti, presenterà un valore del χ^2 maggiore o uguale al valore "critico" tabulato (χ_o^2). In definitiva se dai dati del campione risulta un valore del $\chi_o^2 \leq \chi_c^2$ il test non è significativo e lo scostamento tra ipotesi fatta e dati campionari è da attribuire a fattori casuali e/o di campionamento e si è indotti a non rigettare H_0 ; se, invece, $\chi_o^2 > \chi_c^2$ il test risulta statisticamente significativo e segnala che si è verificata una delle due seguenti possibili alternative:

- il campione, ad esempio con prob. 0.05 (livello di significatività), è uno fra quel 5% di campioni non rappresentativi provenienti da una popolazione in cui è vera H_0 ;
- il campione, con prob. 0.95 (livello di fiducia), proviene da una popolazione in cui H_0 non è vera.

Naturalmente in tale situazione si accredita la seconda possibilità e si dirà che, con un livello di fiducia del 95%, si rigetta l'ipotesi che le variabili in esame siano indipendenti; ciò equivale ad ammettere, con un margine di errore del 5%, l'esistenza di un legame associativo fra i caratteri osservati. Il margine d'errore, all'occorrenza, può essere ridotto aumentando di conseguenza il grado di fiducia.

4. SCOMPOSIZIONE DEL CHI-QUADRATO

Una volta rigettata l'ipotesi di indipendenza H_0 in molti casi può essere utile approfondire l'analisi cercando di individuare le modalità delle due variabili per cui si manifesta la massima associazione. Ciò equivale ad analizzare i "contributi" che le singole modalità forniscono al legame associativo complessivo.

E' questo il problema della "scomposizione del χ^2 " che viene risolto sfruttando la proprietà additiva della funzione.

Qualsiasi tabella con r righe e c colonne ($rx c$), con r e/o $c > 2$, può essere ripartita in tante sottotabelle quanti sono i gradi di libertà della tabella di partenza ($g=(r-1)(c-1)$); ad esempio per tabelle $rx2$ si possono formare $r-1$ sottotabelle $2x2$ con il seguente criterio:

- la prima sottotabella si ottiene considerando solamente le prime due righe;
- le successive si ricavano dalla precedente "accorpando" le due righe presenti ed aggiungendo la riga successiva della tabella di partenza.

I totali marginali, per tener conto del fatto che queste tabelle $2x2$ sono sottotabelle ottenute da una più grande, sono le distribuzioni marginali dell'intero campione. Naturalmente la ripartizione della tabella iniziale nelle sottotabelle $2x2$ deve avere valenza logica, ossia deve rispondere ad un preordinato piano di confronti singoli programmato dal ricercatore. Di seguito si riporta uno schema di scomposizione per una tabella $3x2$:

X	Y	y_1	y_2	tot.
X_1		n_{11}	n_{12}	R_1
x_2		n_{21}	n_{22}	R_2
x_3		n_{31}	n_{32}	R_3
tot.		C_1	C_2	N

X	Y	y_1	y_2	tot.
x_1		n_{11}	n_{12}	R_1
x_2		n_{21}	n_{22}	R_2
tot.		C_1	C_2	N

(a)

X	Y	y_1	y_2	tot.
x_1+x_2		$n_{11}+n_{21}$	$n_{12}+n_{22}$	R_1+R_2
x_3		n_{31}	n_{32}	R_3
tot.		C_1	C_2	N

(5)

(b)

Anche il test χ^2 per l'indipendenza, da utilizzare per ciascuna sottotabella, deve essere modificato per tener conto del fatto che si opera su sottotabelle ottenute da tabelle più grandi e quindi devono riflettere le caratteristiche del campione completo. A.W.Kimball (1954) ha proposto una serie di formule relative a vari gradi di libertà. Di seguito si riportano le formule del test χ^2 relative alle due sottotabelle estratte da una tabella $3x2$, la formula generale per tabelle $rx2$ e la formula generale per generiche tabelle $rx c$:

$$\chi^2_{(a)} = \frac{N^2(n_{22}n_{11} - n_{21}n_{12})^2}{C_1C_2R_2R_1(R_1 + R_2)} \quad (6)$$

$$\chi^2_{(b)} = \frac{N[n_{32}(n_{11} + n_{21}) - n_{31}(n_{12} + n_{22})]^2}{C_1C_2R_3(R_1 + R_2)} \quad (7)$$

$$\chi^2_{(rx2)} = \frac{N^2(n_{r+1,2} \sum_{i=1}^r n_{i1} - n_{r+1,1} \sum_{i=1}^r n_{i2})^2}{C_1C_2R_{r+1}(\sum_{i=1}^r R_i)(\sum_{i=1}^{r+1} R_i)} \quad (8)$$

$$\chi^2_{(rxc)} = \frac{N[R_1(n_{21}C_2 - n_{22}C_1) - R_2(n_{11}C_2 - n_{12}C_1)]^2}{R_1R_2(R_1 + R_2)C_1C_2(C_1 + C_2)} \quad (9)$$

Esempio - Si ipotizzi che la distribuzione di 319 alunni del biennio di un istituto superiore, classificati in base alla distanza fra la loro residenza e la scuola (misurata in tempi di percorrenza), ed ai loro esiti scolastici in termini di successo (promozione) e insuccesso (bocciatura o abbandono), sia quella riportata nella tabella seguente:

Tempo (min.)	Esito scolastico		Tot.
	successo	insuccesso	
0-30	150	21	171
30-60	78	17	95
>60	37	16	53
Totale	265	54	319

Ci si può chiedere se, in base ai dati registrati, il "pendolarismo" influenzi negativamente gli esiti scolastici; cioè se le differenze di successi riscontrate tra i ragazzi pendolari e quelli residenti sono dovute al "caso" oppure dalla condizione di "pendolarismo".

Il test statistico χ^2 , secondo la formula seguente:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^r \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*} \quad (10)$$

dove n_{ij} sono le frequenze assolute osservate e n_{ij}^* le corrispondenti frequenze assolute "attese" nella ipotesi di "indipendenza" fra le variabili (H_0 : l'esito scolastico è indipendente dai tempi di percorrenza), permette di dare una risposta al problema. La distribuzione delle frequenze attese, sotto H_0 , è stata ottenuta applicando le percentuali marginali di riga al totale di ogni colonna della tabella precedente.

Tempo (min.)	Esito scolastico		Tot.
	successo	insuccesso	
0-30	142	29	171
30-60	79	16	95
>60	44	9	53
Totale	265	54	319

Utilizzando la (10) si ottiene $\chi^2_o = 9.32$ che, essendo maggiore di 7.82 (valore critico del χ^2 con 2 g ad un livello di fiducia del 95%), permette di affermare, con un margine di errore del 5%, l'esistenza di una associazione tra tempi di percorrenza ed esiti scolastici e quindi di concludere che "il pendolarismo" influisce negativamente sull'esito scolastico.

Volendo approfondire l'analisi per indagare su come i vari tempi di percorrenza vanno ad incidere sugli esiti scolastici, si ripartisce la tabella, in base allo schema (5), in due sottotabelle 2x2 che riportano gli esiti scolastici relativi ai tempi di percorrenza 0-30 / 30-60 e 0-60 / >60:

Tempo	Esito		
	suc.	ins.	
0-30	150	21	171
30-60	78	17	95
	265	54	319

Tempo	Esito		
	suc.	ins.	
0-60	228	38	266
>60	37	16	53
	265	54	319

Applicando la (6) e (7) alle due sottotabelle si ha:

$$\chi^2_{(a)} = \frac{319^2(17 \cdot 150 - 78 \cdot 21)^2}{265 \cdot 54 \cdot 95 \cdot 171(171 + 95)} = 1.369$$

$$\chi^2_{(b)} = \frac{319[16(150 + 78) - 37(21 + 17)]^2}{265 \cdot 54 \cdot 53(171 + 95)} = 7.948$$

Il risultato del primo test risulta chiaramente non significativo, mentre quello del secondo evidenzia una significatività statistica del 5%; si può concludere, quindi, che solamente una distanza superiore ai 60 minuti di percorrenza influenza in maniera statisticamente significativa l'andamento scolastico degli alunni. La correttezza della procedura di scomposizione è confermata dalla relazione $\chi^2_{Tot} = \chi^2_{(a)} + \chi^2_{(b)}$.

5. SCOMPOSIZIONE DEL "CHI-QUADRATO PER IL TREND"

Il χ^2 come test statistico di indipendenza non fornisce informazioni sul tipo di relazione e/o associazione esistente tra le variabili in esame. Qualora la variabile risposta sia di tipo dicotomico (vero, falso; deceduto, sopravvissuto; migliorato, non migliorato ecc) e la variabile indipendente sia di tipo ordinale è possibile, attraverso la logica della scomposizione, suddividere il valore complessivo del test in due componenti; quella dovuta all'associazione di tipo lineare tra i due caratteri ed quella dovuta ai cosiddetti "fattori casuali". Naturalmente affinché ci sia una relazione di tipo lineare tra i due caratteri dovrà risultare significativa la componente lineare e non significativa quella dovuta al "caso". L'eventuale significatività di quest'ultima denoterebbe che ci sono altre variabili che influenzano il fenomeno, variabili che non vengono spiegate dal carattere considerato indipendente. Un esempio potrà chiarire l'importanza di questo tipo di analisi.

Esempio - Al fine di cogliere ulteriori elementi predittivi sul rendimento scolastico degli studenti, ai 319 ragazzi esaminati precedentemente è stato chiesto il numero medio di ore dedicate giornalmente allo studio. I risultati sono riportati nella seguente tabella:

Esito scolastico	Ore di studio					Tot.
	≤ 1	2	3	4	> 4	
Successo	10	43	74	104	34	265
Insuccesso	11	26	14	3		54
Totale	21	69	88	107	34	319

Scomposizione del Chi-quadrato totale:

Componenti del χ^2	Valore	g	p
χ^2_{Tot}	62.1	4	< 0.001
χ^2_{Lin}	57.7	1	< 0.001
χ^2_{Res}	4.4	3	n.s.

dove p indica la probabilità di ottenere valori di χ^2 , sotto l'ipotesi di indipendenza, maggiori o uguali di quello campionario.

L'analisi delle componenti del test evidenzia come l'associazione tra le due variabili sia di tipo lineare, cioè al crescere delle ore di studio aumenta la probabilità per lo studente di essere promosso. Si può concludere, quindi, che il tempo dedicato giornalmente allo studio risulta essere un fattore "determinante" il rendimento scolastico.

6. CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

La funzione χ^2 di Pizzetti-Pearson assume, in definitiva, un ruolo di primo piano nella Statistica applicata allorché, nell'ambito di una ricerca campionaria, si affronta lo studio delle associazioni intercorrenti tra due variabili categoriali. Pertanto si è voluto focalizzare l'attenzione su tale funzione-test richiamando i principali aspetti metodologici della sua distribuzione e riportando alcune derivazioni del test, quali la "scomposizione del chi-quadrato" e la "verifica dell'ipotesi di linearità", al fine di ampliare il campo di utilizzo di tale funzione. Queste implementazioni consentono una maggiore qualificazione della eventuale relazione individuata tra le variabili e permettono, quindi, uno studio più dettagliato sul "dove" e "come" l'associazione si realizza.

BIBLIOGRAFIA

1. A.W. KIMBALL, *Short-cut Formulas for the Exact Partitioning of chi-square in Contingency Table*, Biometrics 16, 1954.
2. P. ARMITAGE, *Statistica medica*, ed. Feltrinelli, Milano, 1992.
3. E. BALLATORI, *Sui test statistici per il confronto tra due frequenze in tabelle 2x2*, Metron, vol XL, 1982.
4. A. RIDOMI, *Una formula generale per la scomposizione del χ^2* , Statistica applicata, vol.4 - num.3, 1992.
5. G. CHISCI, *Biometria principi e metodi*, ed. Piccin, Padova, 1977.

UN ESEMPIO DI IPERGRUPPO OTTENUTO MEDIANTE COMBINAZIONI LINEARI

Emma Gelsomini

SUNTO - La presente nota è il riassunto di una breve conversazione tenuta nell'ambito di un seminario della Facoltà di Architettura del Politecnico di Milano, che tendeva a fornire esempi di *ipergruppi*, mediante strutture elementari, e note agli studenti del biennio universitario. È questa la ragione per cui invece di presentare l'esempio nella sua forma più generale, come indicato nel paragrafo quattro, ho preferito presentarlo mediante l'utilizzo dello *spazio vettoriale* delle funzioni di una *variabile reale*.

ABSTRACT - This paper is the summary of a conversation that took place at the Politecnico of Milan during a seminar in which we wanted to give examples of hypergroups by means of elementary structures. This is the reason why the example of *hypergroup* is presented by means of a *vectorial space* of a *real variable*, instead of utilizing a more general form suggested in h four.

1. È ben nota la nozione di *gruppo*. Ricordiamo, con LOMBARDO RADICE [6], che un gruppo è una coppia $(G, \bullet)$, dove G è un insieme e $\bullet$ è una operazione binaria interna soddisfacente i seguenti assiomi.

Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca MPI 60% del Politecnico di Milano

(a). È associativa.

(b). Le equazioni di primo grado $a \bullet x = b$ e $y \bullet a = b$ hanno una ed una sola soluzione in G .

Si chiamano elemento neutro u di $(G, \bullet)$ ed elemento inverso a^{-1} di $a \in G$, rispettivamente, gli elementi di G soddisfacenti alle seguenti relazioni, $u \bullet a = a \bullet u = a$ e $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = u$. Si dimostra, attraverso gli assiomi (a) e (b), che esiste l'elemento neutro di $(G, \bullet)$ e l'inverso di ogni elemento di G .

1.1. Si chiama ora *ipergruppo* (CORSINI [2],[3]) la coppia $(G, \circ)$ dove G è un insieme non vuoto e

$$1.1.1. \quad \circ: G \times G \rightarrow P'(G)$$

è una applicazione di $G \times G$ nell'insieme $P'(G)$ delle parti non vuote di G .

1.1.2. L'operazione $\circ$ è associativa:

$$\forall x, y, z \in G \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z,$$

dove

$$(x \circ y) \circ z = \bigcup_{a \in x \circ y} a \circ z$$

e

$$x \circ (y \circ z) = \bigcup_{b \in y \circ z} x \circ b.$$

1.1.3. Per l'operazione $\circ$ vale la seguente proprietà, detta *proprietà di riproducibilità*:

$$\forall a, b \in G, \quad \exists x \in G: b \in a \circ x \quad \exists y \in G: b \in y \circ a.$$

1.2. E' ben noto che sussiste il seguente

TEOREMA. Sia $(H, \circ)$ un ipergruppo. Si supponga che ogni iperprodotto sia un singleton. Allora l'ipergruppo è un gruppo.

Tale teorema, di facile dimostrazione, giustifica il nome di ipergruppo dato ad una iperstruttura che soddisfi gli assiomi 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3.

2. Sia ora X un insieme numerico non vuoto. Sia A l'insieme delle applicazioni definite in X . Si chiami

$$\sigma: A \times A \rightarrow P'(A) \quad (1)$$

l'operazione che associa ad ogni coppia ordinata $(f_1, f_2) \in A \times A$ l'elemento di $P'(A)$, insieme delle parti non vuote di A , secondo la legge

$$\forall f_1, f_2 \in A, \quad f_1 \sigma f_2 = \{ \lambda f_1 + \mu f_2 \}_{\lambda, \mu \in \mathfrak{R}}. \quad (2)$$

Si vuole verificare che la coppia (A, σ) è un ipergruppo.

3. Iniziamo con il notare che la (2) fornisce una applicazione $\sigma: A \times A \rightarrow P'(A)$, (cfr.(1)), come richiesto da 1.1.1.

3.1. Proviamo ora che $\forall f, g, h \in A$ risulta

$$(f \sigma g) \sigma h = f \sigma (g \sigma h), \quad (3)$$

come richiesto da 1.1.2. Si ha infatti

$$f \sigma g = \{ \lambda f + \mu g \}_{\lambda, \mu \in \mathfrak{R}}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} (f \sigma g) \sigma h &= \{ \rho(\lambda f + \mu g) + \gamma h \}_{\rho, \lambda, \mu, \gamma \in \mathfrak{R}} = \\ &= \{ \bar{\lambda} f + \bar{\mu} g + \gamma h \}_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \gamma \in \mathfrak{R}} \end{aligned} \quad (4)$$

essendo $\bar{\lambda} = \rho\lambda$ e $\bar{\mu} = \rho\mu$. Non dipendendo l'ultimo membro della (4) dall'ordine in cui le funzioni sono considerate, la (3) è provata.

3.2. Proviamo ora la proprietà di riproducibilità (cfr. 1.1.3), tenendo conto che l'iperoperazione (1) introdotta è chiaramente commutativa. Proviamo che

$$\forall f, h \in A, \exists x \in A: h \in f\sigma x, \quad (5)$$

come richiesto da 1.1.3. Proviamo cioè che, date comunque f, g , esistono $\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$, $x \in A$, tali che

$$h \in \{\lambda f + \mu x\}. \quad (6)$$

La relazione (6), e quindi la (5), sono manifestamente verificate se si prende $\lambda = 0, x = kh$ (con $k \in \mathfrak{R} / \{0\}$), $\mu = 1/k$.

3.3. La struttura (A, σ) è dunque un ipergruppo *commutativo*.

4. L'esempio illustrato è certamente semplice da presentare considerando solamente la nozione di funzione. Chiaramente, e con immediati e semplici cambi di notazione, l'esempio su esposto si generalizza al caso in cui l'insieme A sia il sostegno di uno *spazio vettoriale di dimensione anche infinita*, su un arbitrario *campo*, anche *finito*, potendosi in tale struttura usare la nozione di combinazione lineare.

BIBLIOGRAFIA

1. L. BERARDI, F. EUGENI, S. INNAMORATI, *Generalized designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic cryptography*. Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, (1990), World Scientific, 55-65.
2. P. CORSINI, *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi*. B.U.M.I. 2-A, (1983), 135-138.
3. P. CORSINI, *Prolegomena of hypergroup theory*. Ed. Aviani, 1992.
4. E. GELSOMINI, *Un ipergruppo associato all'insieme delle matrici quadrate di ordine n non singolari*. Ratio Mathematica 10 (1996), 99-103.
5. M. GIONFRIDDO, *Hypergroups associated with multihomomorphisms between generalized graphs*. Atti Convegno su "Sistemi binari e loro applicazioni", Taormina (1978), 161-174.
6. L. LOMBARDO RADICE. *Istituzioni di algebra astratta*. Feltrinelli. Milano, 1980.
7. F. MERCANTI, L. CERRITELLI, *Sul concetto di lateralizzazione nelle iperstrutture*, su questo stesso volume.

ON A FIRST ORDER UNILATERAL EVOLUTIVE PERIODIC PROBLEM

Angela Gallo , Anna Maria Piccirillo

SUNTO - Si considera il problema periodico connesso ad una disequazione variazionale di evoluzione del primo ordine e si analizza la questione dell'esistenza della soluzione.

ABSTRACT - We consider the periodic problem related to a first order evolutive variational equation and we study existence of solution.

INTRODUCTION

Let Ω_1 and Ω_2 be open sets of R^n with $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, $V_l (l=1,2)$ a closed subspace of $H^{m_l}(\Omega_l)$ ($m_l \in N_0$).

We note that

$$L^2(0,T;V_l) \subseteq L^2(0,T;L^2(\Omega_l)) \subseteq L^2(0,T;V_l') \quad (0 < T < +\infty, V_l' = \text{dual space of } V_l),$$

with continuous and dense embedding. We add that the reflexive Banach space

$$S_1 = \{v_1 \in L^2(0,T;V_1) / v_1' \in L^2(0,T;V_1')\}, \quad \|v_1\|_{S_1} = \|v_1\|_{L^2(0,T;V_1)} + \|v_1'\|_{L^2(0,T;V_1')}$$

Research performed under the financial support of M.U.R.S.T.
Authors' Address: Dipartimento di Matematica e Applicazioni.
Facoltà di Ingegneria, via Claudio, 21 - 80125 Napoli, Italy

is such that [8]

$$S_1 \subseteq C^0([0, T], L^2(\Omega_1))$$

with continuous embedding.

Let us denote by:

$(\cdot, \cdot), |\cdot|$ the inner product and the norm in $L^2(\Omega)$,

$(\cdot, \cdot)_I, |\cdot|_I$ the inner product and the norm in $L^2(\Omega_I)$,

$\|\cdot\|_I$ the norm in V_I ,

$\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ the pairing between V_I and its dual V_I' .

Let be given $f_I \in L^2(0, T; V_I')$ and the family of operators $A_I(t) \in \mathcal{L}(V_I, V_I')(t \in [0, T])$ such that the bilinear forms on V_I

$$a_I(t, y, z) = \langle A_I(t)y, z \rangle_I$$

are symmetric, uniformly coercive and continuous respect to t ,

$$a_I(t, y, y) \geq c' \|y\|_I^2 \quad \forall t \in [0, T] \text{ and } \forall y \in V_I, \\ (c', c'' = \text{const.} > 0)$$

$$|a_I(t, y, z)| \leq c'' \|y\|_I \|z\|_I \quad \forall t \in [0, T] \text{ and } \forall y, z \in V_I,$$

and we have

$$a_I(\cdot, y, z) \in C^{0,1}([0, T]) \quad \forall y, z \in V_I,$$

$$|a_I'(t, y, z)| \leq c''' \|y\|_I \|z\|_I \text{ a.e. on }]0, T[\text{ and } \forall y, z \in V_I \quad (c''' = \text{const.} > 0),$$

where $a_I'(t, y, z) = \frac{d}{dt} a_I(t, y, z)$.

Let be given $\psi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ such that the closed convex set

$$K = \left\{ (v_1, v_2) \in \prod_{l=1}^2 L^2(0, T; V_l) / v_1(t) \psi(t) \leq v_2(t) \text{ on } \Omega \text{ a.e. on }]0, T[\right\}$$

is not empty, then we consider the following

PROBLEM (P). Find $(u_1, u_2) \in [S_1 \times L^2(0, T; V_2)] \cap K$ such that $u_1(0) = u_1(T)$ and moreover

$$\int_0^T \langle u_1'(t), v_1(t) - u_1(t) \rangle_1 dt + \sum_1^2 \int_0^T \{ a_I(t, u_I(t), v_I(t) - u_I(t)) + \\ - \langle f_I(t), v_I(t) - u_I(t) \rangle_I \} dt \geq 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in K$$

or

$$\langle u_1'(t), v_1(t) - u_1(t) \rangle_1 + \sum_1^2 \{ a_I(t, u_I(t), v_I(t) - u_I(t)) - \langle f_I(t), v_I(t) - u_I(t) \rangle_I \} \geq 0 \\ \text{a.e. on }]0, T[\text{ and } \forall (v_1, v_2) \in K.$$

The problem we will analyze has been suggested by a paper by Toscano [10]. But derivatives respect to t of both the components of the unknown value (u_1, u_2) appear in it.

In our analysis we state two existence theorems for the solution of the problem (P) (Theor. 1 and 3); the uniqueness of the above solution is moreover easy to check.

The first theorem is obtained making use either of an existence and unicity theorem of the weak solution of a first order evolution variational inequality or of the fact, that owing to a hypothesis on ψ , each element of the convex set is approximable with proper regular functions.

The proof of the second theorem is based substantially on a result relative to the penalized problem (Theor. 2). To demonstrate the latter we need, first, to prove the existence of the periodic solution of an appropriate system of first order non-linear scalar differential equations. That, differently from standard cases, involves some difficulty originating from the absence of the term $\frac{du_2}{dt}$.

Finally we will examine the case $V_1 = H_0^1(\Omega)$ $V_2 = H^1(\Omega)$ and $A_1(t)$ and $A_2(t)$ the latter being second order integro-differential operators. We will also point out a property of regularity "respect to x " of the solution (Theor. 4), approximating u_1 with the solutions of a family of linear variational equations dependent on a parameter.

1. In order to prove a first existence theorem for our problem (P), we assume:

$i_1)$ there exists a non-negative constant γ_l such that

$$a_l(T, y, y) - a_l(0, y, y) \geq \gamma_l \|y\|_l^2 \quad \forall y \in V_l,$$

$i_2)$ $f_1 = g_1 + g_2$ with $g_1 \in H^1(0, T; V_1')$, $g_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$,

$$g_1(T) - g_1(0) \in L^2(\Omega_1) \text{ if } \gamma_1 = 0,$$

$i_3)$ $f_2 \in H^1(0, T; V_2')$, $f_2(0) = f_2(T)$ if $\gamma_2 = 0$,

$i_4)$ $\psi \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $\psi(t) \leq 0$ on Ω a.e. on $]0, T[$, $\psi(0) = \psi(T)$.

Let us denote by L the operator from

$$D(L) = \left\{ (v_1, v_2) \in S_1 \times L^2(0, T; V_2) / v_1(0) = v_1(T) \right\}$$

so defined

$$\forall v = (v_1, v_2) \in D(L) \text{ and } \forall w = (w_1, w_2) \in \prod_{l=1}^2 L^2(0, T; V_l)$$

$$\langle Lv, w \rangle = \int_0^T \left\langle v_1'(t), w_1(t) \right\rangle_1 dt.$$

Obviously the operator L is into $\left[\prod_{l=1}^2 L^2(0, T; V_l') \right]'$ and it is linear and monotone.

We note that

$$(1) \quad \overline{K \cap D(L)} = K \quad \text{in } \prod_{l=1}^2 L^2(0, T; V_l).$$

Indeed, if $(v_1, v_2) \in K$, for any $\varepsilon > 0$ let $v_{l\varepsilon} \in H^1(0, T; V_l)$ be the solution of the problem

$$\varepsilon v'_{l\varepsilon}(t) + v_{l\varepsilon}(t) = v_{l\varepsilon}(t) \quad \text{a.e. on }]0, T[, \quad v_{l\varepsilon}(0) = v_{l\varepsilon}(T);$$

we obtain [3]:

$$v_{l\varepsilon} \rightarrow v_l \quad \text{in } L^2(0, T; V_l) \quad \text{for } \varepsilon \rightarrow 0$$

and by means of i_4)

$$(v_{1\varepsilon}, v_{2\varepsilon}) \in K$$

since, taking into account that

$$v_{l\varepsilon}(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} v_{l\varepsilon}(0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\varepsilon}} v_l(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

$$v_{l\varepsilon}(0) = \frac{1}{\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}}\right)} \int_0^T e^{-\frac{s-T}{\varepsilon}} v_l(s) ds,$$

we get

$$(v_{1\varepsilon}(t) - v_{2\varepsilon}(t), \varphi) \leq (-\psi(t), \varphi) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{and } \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \text{with } \varphi \geq 0.$$

THEOREM 1. Assumed that hypotheses $i_1) - i_4)$ hold, the problem (P) admits one (and only one) solution (u_1, u_2) and it results $u_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_1))$.

Proof. At first since L is monotone operator and the bilinear forms a_1 and a_2 are uniformly coercive and continuous respect to t , using also the considerations given for (1) then [4] there exists one $(u_1, u_2) \in K$ such that

$$(2) \quad \int_0^T \left\{ \left\langle v'_1(t), v_1(t) - u_1(t) \right\rangle_1 + \sum_{l=1}^2 \left[a_l(t, v_l(t), v_l(t) - u_l(t)) + \right. \right. \\ \left. \left. - \langle f_l(t), v_l(t) - u_l(t) \rangle_l \right] \right\} dt \geq 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in K \cap D(L).$$

By virtue of (1), we can state to result by proving that

$$(3) \quad u_1' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1)), \quad u_1(0) = u_1(T),$$

since, using (2) with $v_I = \lambda u_I + (1-\lambda)v_I$ ($\lambda \in [0,1]$) and taking the limit as $\lambda \rightarrow 1$, we have

$$\int_0^T \left\{ \left(u_1'(t), v_1(t) - u_1(t) \right)_1 + \sum_1^2 \left[a_I(t, u_I(t), v_I(t) - u_I(t)) - \left(f_I(t), v_I(t) - u_I(t) \right)_I \right] \right\} dt \geq 0.$$

If $\gamma_1 > 0$, being $u_{I\epsilon}$ the element of $H^1(0, T; V_I)$ solution of the problem

$$(4) \quad \epsilon u_{I\epsilon}'(t) + u_{I\epsilon}(t) = u_I(t) \quad \text{a.e. on }]0, T[, \quad u_{I\epsilon}(0) = u_{I\epsilon}(T),$$

inequality (2), written with $v_I = u_{I\epsilon}$, produces the upper limitation

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|u_{I\epsilon}'(t)\|_1^2 dt + \frac{\gamma_1}{2} \|u_{I\epsilon}(0)\|_1^2 + \frac{\gamma_2}{2} \|u_{2\epsilon}(0)\|_2^2 \leq \\ & \leq \frac{c'''}{2} \sum_1^2 \int_0^T \|u_{I\epsilon}(t)\|_I^2 dt + \sum_1^2 \int_0^T \left(f_I(t), u_{I\epsilon}'(t) \right)_I dt \end{aligned}$$

and then, because of i_2, i_3 , we are lead to:

$$\|u_{I\epsilon}'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_1))} \leq c \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. of } \epsilon)$$

from which the (3).

Let us study the case $\gamma_1 = 0$, showing at first that

$$(5) \quad u_1 \in C^0([0, T], L^2(\Omega_1)), \quad u_1(0) = u_1(T).$$

Let $\{f_{In}\}$ be a sequence $\in L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$ such that $f_{In} \rightarrow f_1$ in $L^2(0, T; V_1')$. Proceeding similarly to what reasoned with the case $\gamma_1 > 0$, we

state the existence and uniqueness of $(\bar{u}_{1n}, \bar{u}_{2n}) \in K$, with $\bar{u}'_{1n} \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$ and $\bar{u}_{1n}(0) = \bar{u}_{1n}(T)$, such that for every $(v_1, v_2) \in K$

$$(6) \quad \int_0^T \left\{ \left(\bar{u}'_{1n}(t), v_1(t) - \bar{u}'_{1n}(t) \right)_1 + \sum_1^2 \int_0^T a_l(t, \bar{u}_{ln}(t), v_l(t) - \bar{u}_{ln}(t)) + \right. \\ \left. - (f_{1n}(t), v_1(t) - \bar{u}_{1n}(t))_1 - \langle f_2(t), v_2(t) - \bar{u}_{2n}(t) \rangle_2 \right\} dt \geq 0$$

or

$$\left(\bar{u}'_{1n}(t), v_1(t) - \bar{u}_{1n}(t) \right)_1 + \sum_1^2 \int_0^T a_l(t, \bar{u}_{ln}(t), v_l(t) - \bar{u}_{ln}(t)) \geq \\ \geq (f_{1n}(t), v_1(t) - \bar{u}_{1n}(t))_1 + \langle f_2(t), v_2(t) - \bar{u}_{2n}(t) \rangle_2 \quad a.e. \text{ on }]0, T[$$

so that $\forall m, n \in N$

$$\left(\bar{u}'_{1m}(t) - \bar{u}'_{1n}(t), \bar{u}_{1m}(t) - \bar{u}_{1n}(t) \right)_1 + \sum_1^2 \int_0^T a_l(t, \bar{u}_{lm}(t) - \bar{u}_{ln}(t), \bar{u}_{lm}(t) - \bar{u}_{ln}(t)) \leq \\ \leq (f_{1m}(t) - f_{1n}(t), \bar{u}_{1m}(t) - \bar{u}_{1n}(t))_1 \quad a.e. \text{ on }]0, T[$$

from which

$$\frac{d}{dt} \left\| \bar{u}_{1m}(t) - \bar{u}_{1n}(t) \right\|_1^2 + c' \left\| \bar{u}_{1m}(t) - \bar{u}_{1n}(t) \right\|_1^2 + 2c' \left\| \bar{u}_{2m}(t) - \bar{u}_{2n}(t) \right\|_2^2 \leq \\ \leq \frac{1}{c'} \left\| f_{1m}(t) - f_{1n}(t) \right\|_{V_1'}^2 \quad a.e. \text{ on }]0, T[.$$

Then the following upper limitations hold:

$$c' \int_0^T \left\| \bar{u}_{1m}(t) - \bar{u}_{1n}(t) \right\|_1^2 dt + 2c' \int_0^T \left\| \bar{u}_{2m}(t) - \bar{u}_{2n}(t) \right\|_2^2 dt \leq \\ \leq \frac{1}{c'} \int_0^T \left\| f_{1m}(t) - f_{1n}(t) \right\|_{V_1'}^2 dt, \\ \forall t \in [0, T] \quad \left\| \bar{u}_{1m}(t) - \bar{u}_{1n}(t) \right\|_1^2 \leq \frac{1}{c'} \int_0^T \left\| f_{1m}(t) - f_{1n}(t) \right\|_{V_1'}^2 dt + \\ + \left\| \bar{u}_{1m}(0) - \bar{u}_{1n}(0) \right\|_1^2, \\ \left(e^{c'T} - 1 \right) \left\| \bar{u}_{1m}(0) - \bar{u}_{1n}(0) \right\|_1^2 \leq \frac{e^{c'T}}{c'} \int_0^T \left\| f_{1m}(t) - f_{1n}(t) \right\|_{V_1'}^2 dt,$$

from which we deduce the existence of an element $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in K$ with $\bar{u}_1 \in C^0([0, T], L^2(\Omega_1))$ and $\bar{u}_1(0) = \bar{u}_1(T)$, such that

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ln} &\rightarrow \bar{u}_l && \text{in } L^2(0, T; V_l), \\ \bar{u}_{1n} &\rightarrow \bar{u}_1 && \text{in } C^0([0, T], L^2(\Omega_1)). \end{aligned}$$

Then, taking into account that (6) is equivalent to the upper limitation

$$\int_0^T \left\{ \langle v_1'(t), v_1(t) - \bar{u}_{1n}(t) \rangle_1 + \sum_{l=1}^2 a_l(t, \bar{u}_{ln}(t), v_l(t) - \bar{u}_{ln}(t)) + \right. \\ \left. - (f_{1n}(t), v_1(t) - \bar{u}_{1n}(t))_1 - \langle f_2(t), v_2(t) - \bar{u}_{2n}(t) \rangle_2 \right\} dt \geq 0 \quad \forall (v_1, v_2) \in K \cap D(L),$$

we get

$$\bar{u}_l = u_l$$

and (5) follows as a consequence. We have to verify the first of (3). To this aim, considered the solution of the problem (4):

$$(7) \quad u_{l\varepsilon}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}}{\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}} \right)} \int_0^T e^{\frac{s-T}{\varepsilon}} u_l(s) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} u_l(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

it is enough to establish that

$$(8) \quad \|u_{l\varepsilon}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_l))} \leq c \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. of } \varepsilon).$$

Indeed, setting in (2) $v_l = u_{l\varepsilon}$, we obtain:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \left| u'_{1\varepsilon}(t) \right|_1^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \|u_{2\varepsilon}(0)\|_2^2 \leq \frac{c'''}{2} \sum_1^2 \int_0^T \|u_{k\varepsilon}(t)\|_I^2 dt + \\ & + (g_1(T) - g_1(0), u_{1\varepsilon}(0))_1 - \int_0^T \langle g'_1(t), u_{1\varepsilon}(t) \rangle_1 dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \left| g_2(t) \right|_1^2 dt + \int_0^T \langle f_2(t), u'_{2\varepsilon}(t) \rangle_2 dt \end{aligned}$$

from which (8) follows by i_3) and by the upper limitation

$$\|u_{1\varepsilon}(0)\|_1 \leq \|u_1\|_{C^0([0,T], L^2(\Omega_1))}$$

by virtue of (7) and the first of (5).

2. Now let we assume:

i'_1) there exists a non-negative constant γ_1 such that

$$a_1(T, y, y) - a_1(0, y, y) \geq \gamma_1 \|y\|_1^2 \quad \forall y \in V_1,$$

bilinear form a_2 is independent by t , in other words

$$a_2(t, y, z) = a_2(y, z) \quad \forall y, z \in V_2,$$

$$\begin{aligned} i'_2) \quad & f_1 = g_1 + g_2 \quad \text{with } g_1 \in H^1(0, T; V'_1), \quad g_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), \\ & g_1(T) - g_1(0) \in L^2(\Omega_1) \quad \text{if } \gamma_1 = 0, \end{aligned}$$

$$i'_3) \quad f_2 \in C^{0,1}([0, T], V'_2), \quad f_2(0) = f_2(T),$$

$$\begin{aligned} i'_4) \quad & \psi \in C^{0,1}([0, T], H^m(\Omega_1)), \quad \psi'(t) \in V_1 \quad \text{a.e. on }]0, T[, \\ & \psi(0) = \psi_1 + \psi_2 \quad \text{with } \psi_1 \in V_1 \quad \text{and } \psi_2 \leq 0 \quad \text{on } \Omega, \quad \psi(0) = \psi(T) \end{aligned}$$

Concerning penalized problem, the following existence and unicity theorem holds.

THEOREM 2. Under the hypothesis $i_1' - i_4'$, for any $\varepsilon > 0$ there exists one and only one $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in \prod_{l=1}^2 L^2(0, T; V_l)$, with $u_{1\varepsilon}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$, which is solution of problem

(9)

$$\begin{aligned} & \left(u_{1\varepsilon}'(t), y \right)_1 + a_1(t, u_{1\varepsilon}(t), y) + a_2(u_{2\varepsilon}(t), z) + \frac{1}{\varepsilon} \left([u_{1\varepsilon}(t) + \psi_n(t) - u_{2\varepsilon}(t)]^+, y - z \right) = \\ & = \left(f_1(t), y \right)_1 + \left(f_2(t), z \right)_2 \quad \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall (y, z) \in V_1 \times V_2, \end{aligned}$$

$$(10) \quad u_{1\varepsilon}(0) = u_{1\varepsilon}(T),$$

and it results

$$(11) \quad u_{2\varepsilon} \in C^0([0, T], V_2), \quad u_{2\varepsilon}(0) = u_{2\varepsilon}(T),$$

$$(12) \quad \|u_{1\varepsilon}'\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_1))} + \|u_{1\varepsilon}\|_{L^2(0, T; V_1)} + \|u_{2\varepsilon}\|_{L^2(0, T; V_2)} \leq c$$

being c a positive independent of ε constant.

Proof. It is easily seen the unicity of $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$. As far as the existence we at first observe that for any $z \in L^2(\Omega)$ and for any $t \in [0, T]$, since the operator B_ε on V_2 into V_2' such that

$$\langle B_\varepsilon y, w \rangle_2 = a_2(y, w) - \frac{1}{\varepsilon} \left([z - y]^+, w \right) \quad \forall y, w \in V_2$$

is strictly monotone, bounded, hemicontinuous and coercive, variational equation

$$w \in V_2 / a_2(w, y) = \frac{1}{\varepsilon} \left([z - w]^+, y \right) + \left(f_2(t), y \right)_2 \quad \forall y \in V_2$$

admits unique solution [7]. Denoted by $\tau_\varepsilon(t, z)$ this solution, we note that α_1) There exists a positive dependent by ε constant, $c(\varepsilon)$, such that

$$\|\tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'')\|_2 \leq c(\varepsilon) \left[|z' - z''| + \|f_2(t') - f_2(t'')\|_{V_2'} \right]$$

for each $t', t'' \in [0, T]$ and $z', z'' \in L^2(\Omega)$.

Indeed, owing the upper limitation

$$\begin{aligned} & \left([z' - \tau_\varepsilon(t', z')]^+ - [z'' - \tau_\varepsilon(t'', z'')]^+, \tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'') \right) \leq \\ & \leq \left([z' - \tau_\varepsilon(t', z')]^+ - [z'' - \tau_\varepsilon(t'', z'')]^+, z' - z'' \right), \end{aligned}$$

we obtain:

$$\begin{aligned} & a_2(\tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z''), \tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'')) \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \left([z' - \tau_\varepsilon(t', z')]^+ - [z'' - \tau_\varepsilon(t'', z'')]^+, z' - z'' \right) + \\ & + \langle f_2(t') - f_2(t''), \tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'') \rangle_2 \end{aligned}$$

as well as

$$\begin{aligned} & c' \|\tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'')\|_2^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left\{ |z' - z''| + |\tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'')| \right\} |z' - z''| dx + \\ & + \|f_2(t') - f_2(t'')\|_{V_2'} \|\tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'')\|_2 \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |z' - z''|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sigma}{2} \|\tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'')\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2\sigma} \int_{\Omega} |z' - z''|^2 dx + \\ & + \frac{1}{2\sigma} \|f_2(t') - f_2(t'')\|_{V_2'}^2 + \frac{\sigma}{2} \|\tau_\varepsilon(t', z') - \tau_\varepsilon(t'', z'')\|_2^2 \quad \forall \sigma > 0. \end{aligned}$$

Let $\{z_j\}$ be a base of V_1 such that, denote by V_{1n} the space spanned by $\{z_1, \dots, z_n\}$, $\psi \in V_{11}$. Let us moreover denote by P_n the projector onto V_{1n} in V_1 , we set

$$\forall t \in [0, T] \quad \psi_{1n}(t) = \int_0^t P_n \psi(z) d\tau + \psi(0),$$

therefore

$$(13) \quad \psi_{1n}(0) = \psi(0) = \psi_{1n}(T),$$

$$(14) \quad \psi_{1n} \rightarrow \psi \quad \text{in} \quad C^0([0, T], H^{m1}(\Omega_1)),$$

$$(15) \quad \psi'_{1n} \rightarrow \psi' \quad \text{in} \quad L^2(0, T; V_1).$$

Now we'll prove that the system

$$(16) \quad \begin{aligned} \sum_1^n (z_i, z_j) g'_i(t) = & - \sum_1^n a_1(t, z_i, z_j) g_i(t) + \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \left[\sum_1^n g_i(t) z_i + \psi(t) - \tau_\varepsilon \left(t, \sum_1^n g_i(t) z_i + \psi_{1n}(t) \right) \right]^+ , z_j + \\ & + \langle g_1(t), z_j \rangle_1 + \langle g_2(t), z_j \rangle_2 \quad \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

verifies the following statement:

α_2) The system (16) admits one and only one solution $(g_1, \dots, g_n) \in C^{0,1}([0, T], R^n)$ such that

$$w_{1n}(0) = w_{1n}(T),$$

where $w_{1n}(t) = \sum_1^n g_i(t) z_i \quad \forall t \in [0, T]$, and it results

$$(17) \quad |w_{1n}(0)|_1 \leq \delta \quad (\delta = \text{const.} > 0 \text{ indep. of } \varepsilon, n).$$

We'll limit ourselves to establish the existence of $(g_1, \dots, g_n)$ because its uniqueness is readily verifies.

Let $u_0 = \sum_1^n \xi_i z_i \in V_{1n}$ be given; the property α_1) and the hypotheses made on data imply that the (16) has one and only one solution $(g_1, \dots, g_n) \in C^{0,1}([0, T], R^n)$ so that

$$g_i(0) = \xi_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Setting for any $t \in [0, T]$ $w_{1n} = \sum_{i=1}^n i g_i(t) z_i$ and $w_{2n}(t) = \tau_\varepsilon(t, \psi_{1n}(t) + w_{1n}(t))$, it follows:

$$\begin{aligned} w_{1n} &\in C^{0,1}([0, T], V_1), w_{1n}(0) = u_0 \text{ and in virtue by } \alpha_1) \quad w_{2n} \in C^{0,1}([0, T], V_2), \\ (18) \quad &(\omega'_{1n}(t), y)_1 + a_1(t, \omega_{1n}(t), y) + a_2(w_{2n}(t), z) + \frac{1}{\varepsilon}[(\omega_{1n}(t) + \psi_{1n}(t) - w_{2n}(t))^+, y - z] = \\ &= \langle f_1(t), y \rangle_1 + \langle f_2(t), y \rangle_2 \quad \text{a.e. on }]0, T[\text{ and } \forall (y, z) \in V_{1n} \times V_2. \end{aligned}$$

Observing that in virtue by i_4' it results

$$\forall t \in [0, T] \quad \omega_{1n}(t) + \psi_{1n}(t) - \psi_2 \in V_{1n}, \quad \psi_2 \leq 0 \text{ on } \Omega,$$

we insert $y = w_{1n}(t) + \psi_{1n}(t) - \psi_2$ and $z = w_{2n}(t)$ in (18) and obtain

$$\begin{aligned} (19) \quad &\frac{d}{dt} \|w_{1n}(t) + \psi_{1n}(t) - \psi_2\|_1^2 + c_1 [\|w_{1n}(t) + \psi_{1n}(t) - \psi_2\|_1^2 + \|w_{2n}(t)\|_2^2] \leq \\ &\leq c_2 [\|\psi'(t)\|_1^2 + \|f_1(t)\|_{V_1'}^2 + \|f_2(t)\|_{V_2'}^2 + 1] \quad \text{a.e. on }]0, T[\\ &(c_i = \text{const.} > 0 \text{ indep. of } \varepsilon, n, u_0) \end{aligned}$$

From (19) along with (13) we arrive to

$$(20) \quad e^{c_1 T} \|w_{1n}(T) + \psi_1\|_1^2 \leq \|u_0 + \psi_1\|_1^2 + c_3 \quad (c_3 = \text{const.} > 0 \text{ indep. of } \varepsilon, n, u_0).$$

Let $\mathbb{M}(-\psi_1, \eta)$ be closed ball of $L^2(\Omega_1)$ of center $-\psi_1$ and radius $\eta \geq \sqrt{\frac{c_3}{e^{c_1 T} - 1}}$ and, for any $u_0 \in V_{1n} \cap \mathbb{M}(-\psi_1, \eta)$, let w_{1n} be the solution of (16) $\mathbb{M}$ such that $w_{1n}(0) = u_0$. Then

$$F: u_0 \in V_{1n} \cap \mathbb{M}(-\psi_1, \eta) \rightarrow w_{1n}(T)$$

is, by virtue of (20), an operator into $V_{1n} \cap \beta(-\psi_1, \eta)$ and moreover, how it is easily seen, not expensive i.e.

$$|Fu_0 - F\bar{u}_0|_1 \leq |u_0 - \bar{u}_0|_1 \quad \forall u_0, \bar{u}_0 \in V_{1n} \cap \beta(-\psi_1, \eta)$$

Consequently [5] there exists at least $u_0 \in V_{1n} \cap \beta(-\psi_1, \eta)$ that is fixed for F ; hence the statement α_2 holds.

Obviously for $w_{2n}(t) = \tau_\varepsilon(t, w_{1n}(t) + \psi_{1n}(t)) \quad \forall t \in [0, T]$ we have

$$(21) \quad w_{2n}(0) = w_{2n}(T)$$

also in view of i_3' , (13).

The relation (18) together with (13), (14), (17) produces the upper limitations:

$$(22) \quad \|w_{1n}\|_{C^0([0,T], L^2(\Omega_1))} \leq c$$

($c = \text{const.} > 0$ indep. of ε, n)

$$(23) \quad \|w_{1n}\|_{L^2(0,T;V_1)} \leq c.$$

Using (18) with $y = w'_{1n}(t) + \psi'_{1n}(t)$ and $z = w'_{2n}(t)$, and taking into account i_1' , (13), (21), we get

$$\begin{aligned} \int_0^T |w'_{1n}(t) + \psi'_{1n}(t)|_1^2 dt + \frac{\gamma_1}{2} \|w_{1n}(0)\|_1^2 &= \int_0^T a_1'(t, w_{1n}(t), w_{1n}(t)) dt + \\ &- \int_0^T a_1(t, w_{1n}(t), \psi'_{1n}(t)) dt + \int_0^T (\psi'_{1n}(t), w'_{1n}(t) + \psi'_{1n}(t))_1 dt + \\ &+ \int_0^T \langle f_1(t), w'_{1n}(t) + \psi'_{1n}(t) \rangle_1 dt + \int_0^T \langle f_2(t), w'_{2n}(t) \rangle_2 dt \end{aligned}$$

and from here

$$(24) \quad \|w'_{1n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_1))} \leq c \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. of } \varepsilon; n)$$

because of i_2, i_3 , (14), (15), (21), (22), (23).

From the upper limitations (23), (24) we deduce that there exists $u_{l\varepsilon} \in L^2(0,T;V_l)$, with $u'_{l\varepsilon} \in L^2(0,T;L^2(\Omega_1))$, and $0 \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ such that, to within a subsequence, as $n \rightarrow +\infty$

$$(25) \quad \begin{aligned} w_{1n} &\rightharpoonup u_{l\varepsilon} && \text{weakly in } L^2(0,T;V_l), \\ w'_{1n} &\rightharpoonup u'_{l\varepsilon} && \text{weakly in } L^2(0,T;L^2(\Omega_1)), \\ [w_{1n} + \psi_{1n} - w_{2n}]^+ &\rightarrow 0 && \text{weakly in } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Of course (10), (12), hold. Starting from (18) and based on (25) we derive

$$\begin{aligned} & \left(u'_{l\varepsilon}(t), y \right)_1 + a_1(t, u_{l\varepsilon}(t), y) + a_2(u_{2\varepsilon}(t), z) + \frac{1}{\varepsilon} (0(t), y - z) = \\ & = \left(f_1(t), y \right)_1 + \left(f_2(t), z \right)_2 \quad \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall (y, z) \in V_1 \times V_2 \end{aligned}$$

as well as

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \left([w_{1n}(t) + \psi_{1n}(t) - w_{2n}(t)]^+, [w_{1n}(t) + \psi_{1n}(t) - w_{2n}(t)] - [u_{l\varepsilon}(t) + \psi(t) - u_{2\varepsilon}(t)] \right) dt \leq \\ & \leq \int_0^T \left(f_1(t), u_{l\varepsilon}(t) \right)_1 dt + \int_0^T \left(f_2(t), u_{2\varepsilon}(t) \right)_2 dt - \int_0^T a_1(t, u_{l\varepsilon}(t), u_{l\varepsilon}(t)) dt + \\ & - \int_0^T a_2(u_{2\varepsilon}(t), u_{2\varepsilon}(t)) dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (0(t), u_{l\varepsilon}(t) - u_{2\varepsilon}(t)) dt = \\ & = \int_0^T \left(u'_{l\varepsilon}(t), u_{l\varepsilon}(t) \right)_1 dt = 0; \end{aligned}$$

the latter estimation implies that [7]

$$0 = [u_{1\varepsilon} + \psi - u_{2\varepsilon}]^+$$

taking into account the fact that the operator from $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ into its dual space:

$$\langle C_\varepsilon u, v \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T (u^+(t), v(t)) \, dt \quad \forall (u, v) \in [L^2(0, T; L^2(\Omega))]^2$$

is pseudo-monotone. And so equality (9) holds. The relation (11) is directly deduced from $u_{2\varepsilon}(t) = \tau_\varepsilon(t, u_{1\varepsilon}(t) + \psi(t)) \quad \forall t \in [0, T]$.

By virtue of theorem 2 we can prove quickly

THEOREM 3. If the hypotheses $i_1' - i_4'$ hold, the problem (P) admits one (and only one) solution (u_1, u_2) and it results $u_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_1))$.

PROOF. Let $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ be the solution of the problem (9), (10). Holding (12), there exist $u_l \in L^2(0, T; V_l)$, with $u_l' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_1))$ and $u_l(0) = u_l(T)$, and a positive numerical infinitesimal sequence $\{\varepsilon_n\}$ such that

$$\begin{aligned} u_{l\varepsilon_n} &\rightarrow u_l && \text{weakly in } L^2(0, T; V_l), \\ u_{l\varepsilon_n}' &\rightarrow u_l' && \text{weakly in } L^2(0, T; L^2(\Omega_1)). \end{aligned}$$

Let (v_1, v_2) an element of $\mathbf{K}$ be given, by virtue of (9), (10), (12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^T \left[u_{1\varepsilon_n}(t) + \psi(t) - u_{2\varepsilon_n}(t) \right]^+ dt &= \frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^T \left(\left[u_{1\varepsilon_n}(t) + \psi(t) - u_{2\varepsilon_n}(t) \right]^+, u_{1\varepsilon_n}(t) - u_{2\varepsilon_n}(t) \right) dt + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^T \left(\left[u_{1\varepsilon_n}(t) + \psi(t) - u_{2\varepsilon_n}(t) \right]^+, v_1(t) + \psi(t) - v_2(t) \right) dt + \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^T \left(\left[u_{1\varepsilon_n}(t) + \psi(t) - u_{2\varepsilon_n}(t) \right]^+, v_1(t) - v_2(t) \right) dt \leq c$$

($c = \text{const. indep. of } \varepsilon_n$)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(u'_{1\varepsilon_n}(t), v_1(t) \right)_1 dt + \int_0^T a_1(t, u_{1\varepsilon_n}(t), v_1(t)) dt + \int_0^T a_2(u_{2\varepsilon_n}(t), v_2(t)) dt \geq \\ & \geq \sum_{l=1}^2 \int_0^T \left\langle f_l(t), v_l(t) - u_{l\varepsilon_n}(t) \right\rangle_l dt + \int_0^T a_1(t, u_{1\varepsilon_n}(t), u_{1\varepsilon_n}(t)) dt + \\ & + \int_0^T a_2(u_{2\varepsilon_n}(t), u_{2\varepsilon_n}(t)) dt \end{aligned}$$

then of course we have

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left| \left[u_1(t) + \psi(t) - u_2(t) \right]^+ \right|^2 dt = 0, \\ & \int_0^T \left(u'_1(t), v_1(t) \right)_1 dt + \int_0^T a_1(t, u_1(t), v_1(t)) dt + \int_0^T a_2(u_2(t), v_2(t)) dt \geq \\ & \geq \sum_{l=1}^2 \int_0^T \left\langle f_l(t), v_l(t) - u_l(t) \right\rangle_l dt \\ & + \int_0^T a_1(t, u_1(t), u_1(t)) dt + \int_0^T a_2(u_2(t), u_2(t)) dt, \end{aligned}$$

and then (u_1, u_2) is the solution of the problem (P).

3. Let us complete the study of problem (P) by analysing a particular case.

Let: $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ be a $C^{1,1}$ open, bounded, connected set of $\mathbf{R}^n$;

$$V_1 = H_0^1(\Omega), \quad V_2 = H^1(\Omega);$$

$$\forall t \in [0, T] \forall y, z \in H_0^1(\Omega) \quad \langle A_1(t)y, z \rangle_1 = \sum_{ij=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t, x) y_{x_i} z_{x_j} dx,$$

$$\forall t \in [0, T] \forall y, z \in H^1(\Omega) \quad \langle A_2(t)y, z \rangle_2 = \sum_{ij=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t, x) y_{x_i} z_{x_j} dx + \int_{\Omega} b(t, x) yz dx$$

where

$$a_{ij} = a_{ji} \in C^1([0, T] \times \overline{\Omega}), \quad b \in C^0([0, T] \times \overline{\Omega}), \quad \frac{\partial b}{\partial t} \in C^0([0, T] \times \overline{\Omega}),$$

$$a_{ij}(0, x) = a_{ij}(T, x), \quad b(0, x) = b(T, x) \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x) \lambda_i \lambda_j \geq c_0 |\lambda|^2 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} \text{ and } \forall \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$$

($c_0 = \text{const.} > 0$),

$$b(t, x) \geq b_0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega} \quad (b_0 = \text{const.} > 0);$$

$$f_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; (H^1(\Omega))'), \quad f_2(0) = f_2(T);$$

$$\psi = 0$$

In such a situation the problem (P), by virtue of theorem 1, admits only one solution (u_1, u_2) satisfying

THEOREM 4. Under the above stated hypotheses, we have:

$$(26) \quad u_1 \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),$$

$$(27) \quad u_2 \in L^2(0, T; H_{loc}^2(\Omega)).$$

Proof. We now prove relation (26). First of all, for every $\varepsilon > 0$ there exists one and only one $u_{1\varepsilon} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ such that

$$(28) \quad A_1(t)u_{1\varepsilon}(t) - (f_2(t) + b(t)u_2(t)) + \frac{u_{1\varepsilon}(t) - u_1(t)}{\varepsilon} = 0$$

in the sense of $D'(\Omega)$ a.e. on $]0, T[$.

Assumptions made for Ω , a_{ij} , b and f_2 assure [7], [9] that $u_{1\varepsilon}$ belongs $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ and

$$(29) \quad \|u_{1\varepsilon}(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|A_1(t)u_{1\varepsilon}(t)\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{a.e. on }]0, T[$$

($c = \text{const.} > 0$ indep. of ε)

Let us verify that

$$(30) \quad (u_{1\varepsilon}, u_2) \in \mathbf{K}$$

We have at once

$$(31) \quad [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ \in H_0^1(\Omega) \quad \text{a.e. on }]0, T[$$

Indeed, for each $z \in H^1(\Omega)$ denoted by $\gamma_0 z$ the trace of z on $\partial\Omega$, it results

$$\gamma_0 [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ = \max\{\gamma_0 [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)], 0\} = \max\{-\gamma_0 u_2(t), 0\} = 0$$

since

$$u_1(t) \leq u_2(t) \quad \text{on } \Omega \Rightarrow \gamma_0 u_2(t) \geq 0.$$

From (28), (31) we obtain

$$\begin{aligned} & \sum_{ij}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t, x) \frac{\partial u_{1\varepsilon}(t)}{\partial x_i} \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+}{\partial x_j} + \\ & - \int_{\Omega} (f_2(t) + b(t)u_2(t)) [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ dx + \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (u_{1\varepsilon}(t) - u_1(t)) [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ dx = 0$$

a.e. on $]0, T[$

or

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t,x) \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]}{\partial x_i} \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+}{\partial x_j} dx +$$

$$+\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t,x) \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_i} \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+}{\partial x_j} dx +$$

$$-\int_{\Omega} (f_2(t) + b(t)u_2(t)) [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ dx +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (u_{1\varepsilon}(t) - u_1(t)) [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ dx = 0$$

a.e. on $]0, T[$

from which we deduce

$$(32) \quad \int_{\Omega} (u_{1\varepsilon}(t) - u_1(t)) [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ dx \leq 0$$

a.e. on $]0, T[$

because

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t,x) \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]}{\partial x_i} \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+}{\partial x_j} dx =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t,x) \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+}{\partial x_i} \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+}{\partial x_j} dx \geq 0$$

a.e. on $]0, T[$

and, since $(u_1, u_2 + [u_{1\varepsilon} - u_2]^+) \in \mathbf{K}$, moreover we get

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t,x) \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_i} \frac{\partial [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+}{\partial x_j} dx + \\ & - \int_{\Omega} (f_2(t) + b(t)u_2(t)) [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ dx \geq 0 \end{aligned}$$

a.e. on $]0, T[$.

Let be $\Omega_t^+ = \{x \in \Omega / u_{1\varepsilon}(t, x) > u_1(t, x)\}$, holding (32), we have

$$\int_{\Omega_t^+} (u_{1\varepsilon}(t) - u_1(t)) [u_{1\varepsilon}(t) - u_2(t)]^+ dx = 0$$

a.e. on $]0, T[$

from which

$$u_{1\varepsilon}(t) \leq u_2(t) \quad \text{on } \Omega_t^+ \quad \text{a.e. on }]0, T[$$

and consequently (30) is true.

The relations (28), (30) bring us to the upper limitation

$$\int_0^T \|A_1(t)u_{1\varepsilon}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dx \leq \int_0^T (A_1(t)u_{1\varepsilon}(t), f_2(t) + b(t)u_2(t)) dx +$$

$$+ \int_0^T \left(f_1(t) - u_1'(t), A_1(t)u_{1\varepsilon}(t) - f_2(t) - b(t)u_2(t) \right) dt$$

therefore

$$(33) \quad \int_0^T \|A_1(t)u_{1\varepsilon}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq c \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. of } \varepsilon)$$

and then, taking into account (29):

$$\int_0^T \|u_{1\varepsilon}(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \leq c \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. of } \varepsilon)$$

From here we obtain that (26) holds taking into account that

$$u_{1\varepsilon} \rightarrow u_1 \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

guaranteed by (28), (33).

Finally, starting from (26) and using the equation

$$a_2(t, u_2(t), \varphi) = \left(f_1(t) + f_2(t) - u_1'(t) - A_1(t)u_1(t), \varphi \right) \quad \text{a.e. on }]0, T[\\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

and a well-known theorem of "inner" regularity for elliptic equations we come to (27).

REMARK. Other examples, where there is a greater regularity "respect to x " for the solution of problem (P), are suggested by the elliptic variational inequalities, which have been examined in [1], [2], [6], [11]. In fact the methods followed there can be used, duly changed, in the evolutive case we have considered in this work.

BIBLIOGRAFIA

1. M. BIANCARDI, *Su una disequazione variazione nello spazio $H^2(\Omega) \times H^1(R^n)$ relativa ad un operatore del quarto ordine*, Boll. UMI (6), 3-B (1984), 779-795.
2. M. BIANCARDI, A. ESPOSITO, L.A. MACCHETTA, *Un teorema di regolarità relativo ad un problema unilaterale*, Rend. Ist. Matem. Univ. Trieste, XVIII (1981), 58-70.
3. H. BRÉZIS, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures Appl. 51 (1972), 1-168.
4. H. BRÉZIS, *Inéquations variationnelle associés a des opérateurs d'évolution*, in A. Ghizzetti (ed.): *Theory and applications of monotone operators*, NATO Summer School Venice, Oderisi, 1969.
5. F. BROWDER, *Problèmes non linéaires*, Conférence à Montreal, 1965.
6. A. ESPOSITO, *Un problema differenziale unilaterale del quarto ordine in due variabili*, Boll. Un. Mat. Ital., (6), 2-A (1983).
7. J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
8. J.L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, 1967.
9. J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Mason, 1967.
10. R. TOSCANO, *Teoremi di esistenza e di regolarità per una classe di disequazioni variazionali di evoluzione del primo ordine*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 17 (1985).
11. R. TOSCANO, A. GALLO, *Proprietà di regolarità della soluzione di una disequazione variazionale connessa a due operatori ellittici del secondo ordine*, Ricerche di Matematica, XXXIII (1984), 20-40.

FUNZIONI IPERBOLICHE E CIRCOLARI: UN CONFRONTO

Vincenzo Di Marcello^{*}, Franco Eugeni^{**}, Giovanni Mataloni^{***}

SUNTO - Nella presente nota si introduce la nozione di arco associato ad un settore iperbolico e si studiano le relazioni tra funzioni circolari ed iperboliche di argomenti associati.

1. INTRODUZIONE.

E' ben noto che l'analogia tra circolare e iperbolico nasce con il considerare un punto variabile sulla circonferenza standard ad un punto variabile nell'iperbole equilatera standard.

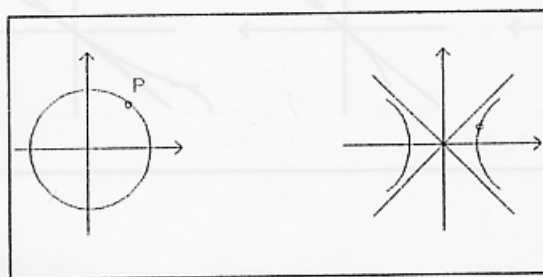


Fig. 1

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

^{*} Mathesis Teramo

^{**} Università degli Studi Roma Tre

^{***} Dip.^{to} Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro - "G. D'Annunzio" Chieti

essendo ϑ e t legate alle aree tratteggiate dei settori circolari ed iperbolici indicati in figura.

Le funzioni iperboliche e le loro derivate si riassumono nella tabella seguente:

$$y = \cosh x$$

$$y' = \sinh x$$

$$y = \sinh x$$

$$y' = \cosh x$$

$$y = \tanh x$$

$$y' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

e i grafici delle suddette si presentano con il seguente andamento:

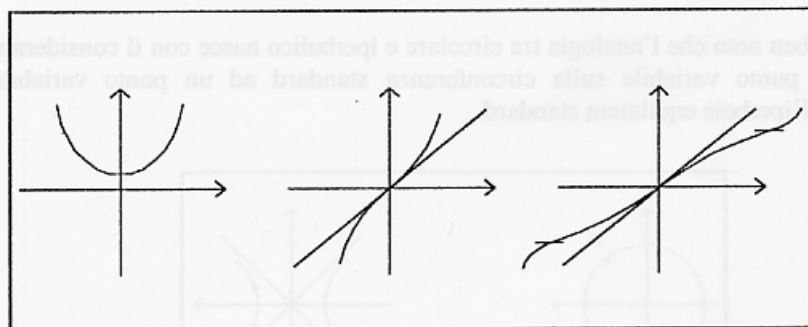


Fig. 2

$$y = \cosh x$$

(catenaria)

$$y = \sinh x$$

$$y = \tanh x$$

Le funzioni inverse sono chiaramente

$$y = \text{sett cosh } x$$

($y > 0$)

$$y = \text{sett senh } x$$

$$y = \text{sett tgh } x$$

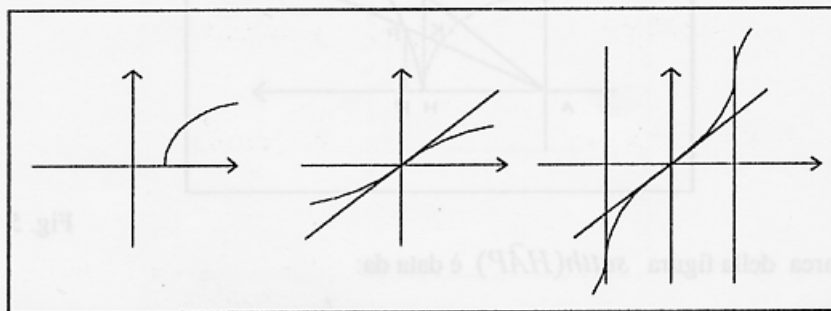


Fig. 3

Le relative derivate non sono difficili da esprimere, tali essendo

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad y' = \frac{1}{1-x^2}$$

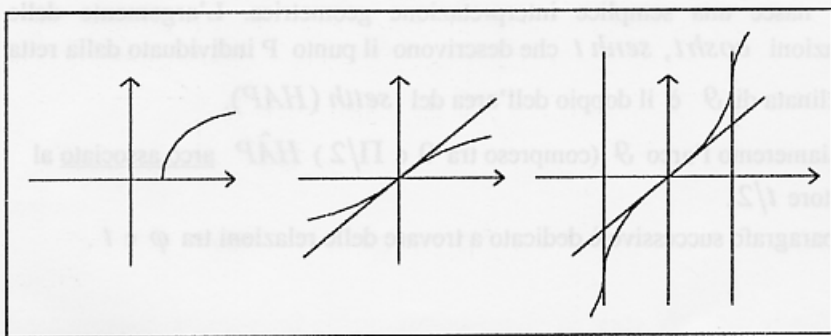


Fig. 4

Sia dato un settore iperbolico $\text{setth}(\widehat{HAP})$, e sia φ l'angolo $\widehat{HAP}$ e $\Delta(APP')$ l'area del triangolo APP'

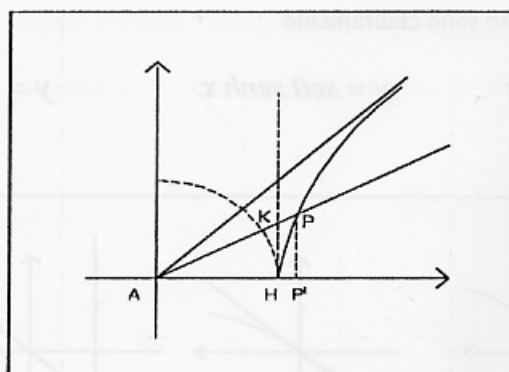


Fig. 5

L'area della figura $setth(\widehat{HAP})$ è data da:

$$\begin{aligned}
 \text{area } setth(\widehat{HAP}) &= \Delta(APP') - \int_0^t \sinh t \, d(\cosh t) \\
 &= \frac{1}{2} \sinh t \cosh t - \left[\frac{1}{2} \sinh t \cosh t - \frac{t}{2} \right]_0^t = \\
 &= \frac{1}{2} \sinh \cosh t - \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

Ne nasce una semplice interpretazione geometrica. L'argomento delle funzioni $\cosh t$, $\sinh t$ che descrivono il punto P individuato dalla retta inclinata di $\mathcal{G}$ è il doppio dell'area del $setth(HAP)$.

Chiameremo l'arco $\mathcal{G}$ (compreso tra 0 e $\Pi/2$) $\widehat{HAP}$ arco associato al settore $t/2$.

Il paragrafo successivo è dedicato a trovare delle relazioni tra φ e t .

2. RELAZIONI TRA ARCO E SETTORE ASSOCIATI.

Un primo legame tra φ e $t/2$ è quello che si desume dal seguente ragionamento.

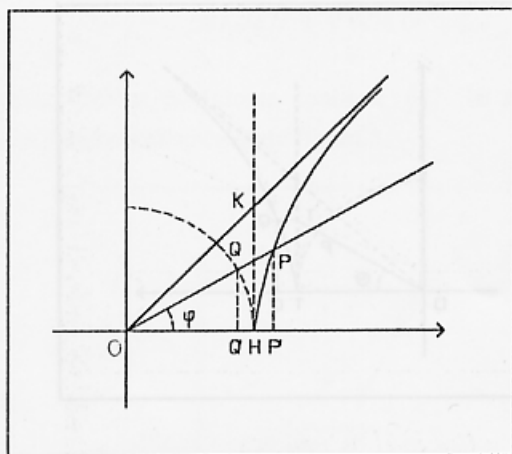


Fig. 6

Avendosi

$$Q = (\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi)$$

$$P = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$$

scaturisce una proporzione data dalla similitudine dei triangoli $OQ'Q$ e $OP'P$:

$$\frac{\operatorname{senh} t}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{\cosh t}{\cos \varphi}$$

ovvero:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tgh} t$$

Una seconda relazione si ottiene introducendo un arco ϑ che prende il nome di amplitudine iperbolica di t .

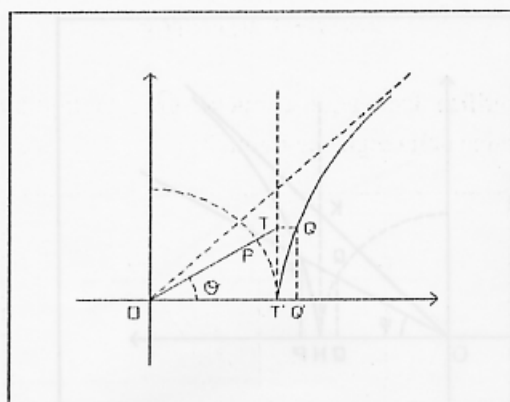


Fig. 7

Fissato un arco ϑ tra 0 e $\Pi/2$ si conduca la retta per O inclinata di ϑ fino al punto $P(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$. Si prosegua la OP fino ad incontrare la retta tangente in $T'(1,0)$ nel punto $T(1, \operatorname{tg} \vartheta)$. Da T si conduca la parallela all'asse delle x fino ad incontrare l'iperbole nel punto Q . Tale punto si determina dal sistema

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} \vartheta \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$x = \sqrt{1 + y^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{1}{\cos \vartheta}$$

e quindi:

$$Q\left(\frac{1}{\cos \vartheta}, \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}\right)$$

La proiezione Q' sull'asse delle x ha coordinate $Q'(\frac{1}{\cos \vartheta}, 0)$. La retta tangente in P ha equazione:

$$x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = 1$$

che come si verifica facilmente contiene Q' . In termini grafici quanto provato si riassume nella seguente figura 8:

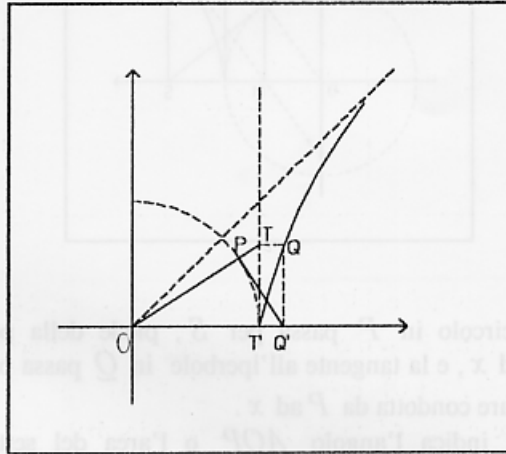


Fig. 8

La tangente all'iperbole in $Q(\cosh t, \sinh t)$ ha equazione:

$$x \cosh t - y \sinh t = 1$$

ed incontra l'asse x nel punto $M(\frac{1}{\cosh t}, 0)$ e l'asse y nel punto

$$M'(-\frac{1}{\sinh t}, 0).$$

Ma poichè avevamo provato che le coordinate di Q sono anche

$$Q = (\frac{1}{\cos \vartheta}, \tan \vartheta)$$

basate sulle seguenti figure

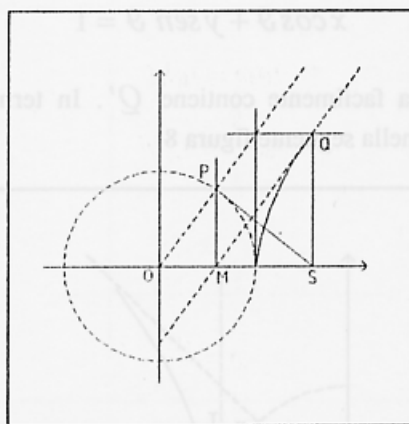


Fig. 9

La tangente al circolo in P passa per S , piede della perpendicolare condotta da Q ad x , e la tangente all'iperbole in Q passa per M , piede della perpendicolare condotta da P ad x .

Il parametro ϑ indica l'angolo AOP o l'area del settore circolare POP' ; il parametro x l'area del settore iperbolico QOQ' . Si ha immediatamente:

$$ch\,t = sec\,\mathcal{G} = OS$$

$$SO = sh\ t = tg\vartheta = AT$$

$$AK = th\ t = sen\vartheta = MP$$

$$OM' = \operatorname{cosech} t = \cot \vartheta = BT'$$

$$\operatorname{sech} t = \cos \vartheta = OM$$

$$BK' = \coth t = \operatorname{cosec} \vartheta = OS'$$

Fra l'argomento e l'amplitudine esiste la relazione

$$t = \lg \operatorname{tg} \left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\Pi}{2} \right)$$

alla quale si può dare la forma semplicissima

$$\operatorname{th} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$$

segue allora che

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} t$$

segue

$$\varphi = \frac{\vartheta}{2}$$

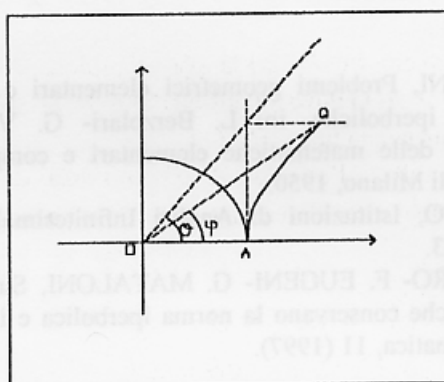


Fig. 11

In particolare si ha:

$$\cos \vartheta = \frac{\cosh t}{(\cosh^2 t + \sinh^2 t)^{1/2}}$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sinh t}{(\cosh^2 t + \sinh^2 t)^{1/2}}$$

che sono le formule esprimenti il legame tra seno e coseno di un arco e del mezzo settore iperbolico associato.

$$\cosh t = \frac{\cos \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)^{1/2}}$$

$$\sinh t = \frac{\sin \vartheta}{(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta)^{1/2}}$$

BIBLIOGRAFIA

1. A. AGOSTINI, Problemi geometrici elementari e classici, funzioni circolari ed iperboliche, in: L. Berzolari- G. Vivanti- D. Gigli- Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, Vol. II, Parte I, Hoepli Milano, 1950.
2. G. CIMMINO, Istituzioni di Analisi Infinitesimale Vol. I, Patron Bologna, 1953.
3. F. CASOLARO- F. EUGENI- G. MATALONI, Sulle trasformazioni geometriche che conservano la norma iperbolica e i settori iperboliche, Ratio Mathematica, 11 (1997).

SUL CONCETTO DI LATERALIZZAZIONE NELLE IPERSTRUTTURE

Fabio Mercanti , Luigi Cerritelli

SUNTO - Dato un ipergruppo (G, φ) si introduce il concetto di *iperlaterale* di A (sottoinsieme non vuoto di G), avente $g \in G$ come *rappresentante*. Si introduce anche la nozione di γ -*ipergruppo*, mediante la quale è possibile caratterizzare certi iperlaterali come sostegni di *sottoipergruppi* del γ -ipergruppo stesso.

ABSTRACT - Given an hypergroup (G, φ) , we introduce the concept of *hyperlateral* of A (non empty subset of G), having $g \in G$ as *representative*. We introduce also the notion of γ -*hypergroup* which characterize some hyperlaterals as supports of *subhypergroups* of the γ -hypergroup itself.

1. Dato un ipergruppo (G, φ) , sia A un sottoinsieme non vuoto di G . Si ricorda rapidamente (CORSINI [4], 7) che

1.1. Il sottoinsieme A si dice *moltiplicativamente chiuso* rispetto alla iperoperazione φ se

Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca MPI 60% del Politecnico di Milano

$$\forall a, b \in A \Rightarrow a\varphi b \subset A ; \quad (1)$$

in tal caso (A, φ) prende il nome di sottoipergruppoide di (G, φ) ;

1.2. Il sottoipergruppoide (A, φ) è, in particolare, un *sottoipergruppo* di (G, φ) se

$$\forall a \in A \Rightarrow \bigcup_{x \in A} a\varphi x = \bigcup_{x \in A} x\varphi a = A. \quad (2)$$

2. Se si considerano ora un ipergruppo (G, φ) , un suo sottoipergruppo (A, φ) e un elemento $g \in G$, è possibile dare la seguente

DEFINIZIONE 1. Gli insiemi D e S seguenti,

$$D = A\varphi g = \bigcup_{x \in A} x\varphi g, \quad (3)$$

$$S = g\varphi A = \bigcup_{x \in A} g\varphi x, \quad (4)$$

vengono chiamati, rispettivamente, *iperlaterale destro* e *iperlaterale sinistro* di A , aventi g come rappresentante.

2.1. Se l'ipergruppo (G, φ) è *commutativo*, allora gli insiemi D e S dati, rispettivamente, dalla (3) e dalla (4) coincidono. In tal caso un iperlaterale destro o sinistro di A viene, semplicemente, detto *iperlaterale* di A e indicato indifferentemente con L , valendo l'ovvia uguaglianza

$$D = S = L. \quad (5)$$

2.2. Si introducono ora i concetti di *iperlaterali interno ed esterno* di A .

DEFINIZIONE 2. Se $g \in A$, l'iperlaterale L di A (cfr.(5)) viene detto *iperlaterale interno* di A ed indicato con I .

DEFINIZIONE 3. Se $g \notin A$, l'iperlaterale L di A (cfr.(5)) viene detto *iperlaterale esterno* di A ed indicato con E .

2.3. Dalla definizione 2 e dalla (2) segue immediatamente che A e I coincidono. Dunque (I, φ) è banalmente sottoipergruppo di (G, φ) .

3. Nulla si può, in generale, affermare sul fatto che (E, φ) sia o non sia sottoipergruppo di (G, φ) , essendo E l'iperlaterale esterno dato dalla definizione 3. Si formuli allora la seguente

DEFINIZIONE 4. Un ipergruppo (Γ, φ) per il quale l'iperoperazione φ soddisfi la condizione

$$\forall a, b \in \Gamma, a \in a\varphi b \wedge b \in a\varphi b, \quad (6)$$

viene chiamato γ -ipergruppo.

In virtù della (5) nel seguito si considerano solamente γ -ipergruppi commutativi (cfr.2.1.), essendo ora A sottoinsieme non vuoto di Γ .

3.1. Per i γ -ipergruppi vale il seguente

TEOREMA 1. In un γ -ipergruppo ogni sottoipergruppoide è sottoipergruppo.

DIMOSTRAZIONE. Sia (A, φ) un sottoipergruppoide di (Γ, φ) . Dalla (1) e dalla (6) segue immediatamente che

$$\begin{aligned} \forall a, b \in A; a\varphi b \subset A, a \in a\varphi b, b \in a\varphi b \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigcup_{x, y \in A} x\varphi y = \bigcup_{y \in A} A\varphi y = \bigcup_{x \in A} x\varphi A = A. \end{aligned} \quad (7)$$

Dalla (7) si deduce che per (A, φ) vale la (2) e che, pertanto, (A, φ) è un sottoipergruppo di (Γ, φ) .

3.2. Per gli iperlaterali esterni di A valgono i seguenti

TEOREMA 2. Ogni iperlaterale esterno E di A contiene propriamente A .

DIMOSTRAZIONE. Poiché l'operazione φ gode, per ipotesi (cfr. definizione 4), della proprietà (6), tenendo conto delle (3) e (5) si conclude che ogni elemento di A è anche elemento di E .

TEOREMA 3. Ogni iperlaterale E di A è sostegno di un sottoipergruppoide (E, φ) di (Γ, φ) .

DIMOSTRAZIONE. Presi $e_1, e_2 \in E$ e $c \in \Gamma$ (ma non ad A (cfr. definizione 3)) si ottiene, successivamente, tenendo conto della (3) e della associatività di φ ,

$$e_1 \varphi e_2 = (a_j \varphi c) \varphi (a_k \varphi c) = [(a_j \varphi a_k) \varphi c] \varphi c = (a_r \varphi c) \varphi c \quad (8)$$

essendo a_j, a_k, a_r elementi di A . Valendo per ipotesi la (6), l'ultimo membro della (8) diventa

$$(a_r \varphi c) \varphi c = e_s \varphi c \subset E, \quad (9)$$

essendo e_s elemento di E . Dalla (9) segue, immediatamente, che per l'iperlaterale E vale la (1). Pertanto (E, φ) è un sottoipergruppoide di (Γ, φ) .

COROLLARIO. Ogni iperlaterale esterno E di A è sostegno di un sottoipergruppo (E, φ) di (Γ, φ) .

DIMOSTRAZIONE. L'asserto segue immediatamente dai teoremi 3 e 1 precedenti.

4. Si osserva infine quanto segue. Si indichi con L_i la generica coppia (E_i, φ) , avente $g_i \notin A$ come rappresentante (cfr. definizione 3), e con L^* la classe di tali coppie. Poiché ogni iperlaterale E_i è caratterizzato dal suo rappresentante g_i , la classe L^* potrà essere strutturata con opportune iperoperazioni che agiscano direttamente sui rappresentanti. In tal senso è attualmente allo studio una teoria degli iperlaterali negli ipergruppi.

5. Il concetto di iperlaterale in un ipergruppo è banalmente applicabile alle iperstrutture più *deboli*. In generale, in altre iperstrutture (cfr. ad esempio BERARDI-EUGENI-INNAMORATI [1], CORSINI[3], TALLINI[5]), sarà possibile introdurre definizioni di iperlaterali e teoremi sui medesimi in maniera del tutto simile a quella usata, nei paragrafi precedenti, per gli ipergruppi.

BIBLIOGRAFIA

1. L.BERARDI, F.EUGENI, S.INNAMORATI, *Generalized designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic cryptography*, Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, World Scientific,(1990), 55-65.
2. L. CERRITELLI e F. MERCANTI, *Algebra astratta e insegnamento*, Ratio Math., 10 (1996), 85-89.
3. P. CORSINI, *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi*, B.U.M.I. 2-A, (1983), 133-138.
4. P. CORSINI, *Prolegomena of Hypergroup Theory*, 2nd ed., Aviani Editore, 1992.
5. G. TALLINI, *Geometric Hyperquasigroups and Line Spaces*, Acta Univ. Carolinac, Math. Phys., vol. 25, 1 (1984), 69-73.

SULLE CURVE CHE CONTENGONO TUTTI I PUNTI DI UN PIANO DI FANO

Osvaldo Ferri*, Raffaella Iafisco**

SUNTO - Si dimostra che esiste una sola curva irriducibile di ordine minimo che contiene tutti i punti del piano di Fano, e se ne determina l'equazione.

ABSTRACT - The existence of only one irreducible curve, of minimum order, containing each point of Fano's plane, is proved and its equation is determined.

INTRODUZIONE

0. Ricordiamo (cfr.2) che il piano di Fano $S_{2,2}$ è un piano proiettivo finito costruito su γ_2 (campo dei resti modulo 2). Tale piano è quindi costituito da sette punti e da sette rette che, in un riferimento proiettivo $O(x_0, x_1, x_2)$, (ove $x_2 = 0$ è l'equazione della retta impropria), sono rispettivamente $O(0,0,1)$, $I(1,0,0)$, $J(0,1,0)$, $A(0,1,1)$, $B(1,0,1)$, $C(1,1,0)$, $U(1,1,1)$ e $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_0 + x_1 = 0$, $x_0 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e ognuna di tali rette contiene esattamente tre punti di $S_{2,2}$.

Precisamente la prima retta, $x_0 = 0$, contiene i punti O, J, A , la seconda $x_1 = 0$, i punti O, I, B , la terza $x_2 = 0$, i punti I, J, C , la quarta $x_0 + x_1 = 0$, i punti O, C, U , la quinta $x_0 + x_2 = 0$, i punti O, B, U , la sesta $x_1 + x_2 = 0$, i punti I, A, U ed infine l'ultima contiene i punti A, B, C .

* Università degli studi de L'Aquila, Dipartimento di Matematica

** Università degli studi de L'Aquila, Dipartimento di Matematica

In questo lavoro si vogliono determinare le equazioni delle C^n curve algebriche di ordine n , invadenti $S_{2,2}$, cioè contenenti tutti i punti di $S_{2,2}$, irriducibili in Γ_2 (chiusura algebrica di γ_2), e di ordine minimo. Si prova che deve risultare $n = 4$ e che esiste una sola C^4 di cui si determina l'equazione.

PROPRIETA' DELLE C^n INVADENTI $S_{2,2}$.

1. Iniziamo a dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 1 - *L'ordine di una C^n di $S_{2,2}$, contenente tutti i punti di $S_{2,2}$, e irriducibile in Γ_2 è $n \geq 4$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia r una generica retta di $S_{2,2}$; essa ha tre punti in γ_2 i quali, essendo per ipotesi C^n invadente $S_{2,2}$, giacciono su C^n . Ne segue che:

$$n = |C^n \cap r| \geq 3.$$

Una C^3 invadente $S_{2,2}$ è però riducibile, essa si spezza nelle tre rette di un fascio (in γ_2). Infatti l'equazione di una C^3 di $S_{2,2}$ è data da .

$$a x_0^3 + b x_1^3 + c x_0^2 x_1 + d x_0 x_1^2 + e x_0^2 x_2 + f x_1^2 x_2 + g x_0 x_1 x_2 + h x_0 x_2^2 + i x_1 x_2^2 + l x_2^3 = 0 \quad (1.1)$$

dove $a, b, c, d, e, f, g, h, i, l \in \gamma_2$.

Dovendo contenere tutti i punti di $S_{2,2}$, deve aversi (sostituendo nella (1.1) le coordinate di tali punti):

$$l = 0, a = 0, b = 0, b + f + i + l = 0, a + e + h + l = 0, a + b + c + d = 0, \\ a + b + c + d + e + f + g + h + i + l = 0$$

da cui segue

$$a = b = g = l = 0, f = i, e = h, c = d = 1 \quad (1.2)$$

Sostituendo le (1.2) nella (1.1) si ha :

$$(x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2) \cdot 1 + (x_0^2 x_2 + x_0 x_2^2) \cdot h + (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) \cdot i = 0 \quad (1.3)$$

e questa è proprio l'equazione complessiva delle tre rette di $S_{2,2}$ di centro: $C(h, i, 1)$. Ne segue che deve essere $n \geq 4$.

Consideriamo allora quelle di ordine minimo $n = 4$, cioè le C^4 di $S_{2,2}$; proviamo preliminarmente le seguenti :

PROPOSIZIONE 2 - *Una C^4 invadente $S_{2,2}$ se è irriducibile in Γ_2 , non può avere punti multipli in γ_2 .*

DIMOSTRAZIONE. Una tale C^4 può avere al più un punto doppio in γ_2 . Se avesse infatti un punto triplo (in γ_2), ogni retta di $S_{2,2}$ per esso, dovendo contenere tre punti, avrebbe cinque intersezioni (in γ_2) con la C^4 che risulterebbe così riducibile in γ_2 .

Supponiamo allora che abbia un punto doppio D in γ_2 . La tangente ad essa in un punto P diverso da D sarebbe una retta di $S_{2,2}$ che non può passare per D , altrimenti tale retta avrebbe con la C^4 almeno cinque intersezioni (due in D , due in P e almeno una nell'altro punto che la retta ha in γ_2).

Ripetendo il ragionamento per tutti i punti della C^4 in γ_2 , distinti da D , si ha che devono esistere tante rette distinte di $S_{2,2}$ non passanti per D quanti sono i punti di $S_{2,2}$ distinti da D , cioè sei, ma ciò non può verificarsi in quanto le rette di $S_{2,2}$ non passanti per D sono quattro.

PROPOSIZIONE 3 - Una C^4 invadente $S_{2,2}$, se è riducibile in Γ_2 , allora deve avere come componente una retta di γ_2 .

DIMOSTRAZIONE. Infatti se una tale C^4 non contiene rette in γ_2 deve necessariamente spezzarsi in due coniche irriducibili, ognuna delle quali, come è noto (cfr. 3), contiene tre punti di $S_{2,2}$ e quindi la C^4 non invaderebbe $S_{2,2}$.

DETERMINAZIONE DELLE C^4 INVADENTI $S_{2,2}$ E IRRIDUCIBILI IN Γ_2 .

2. L'equazione di una C^4 di $S_{2,2}$ passante per i punti $O(0,0,1)$, $I(1,0,0)$ e $J(0,1,0)$ è data da :

$$\begin{aligned} & a x_0^3 x_1 + b x_0 x_1^3 + c x_0^2 x_1^2 + d x_0^3 x_2 + e x_1^3 x_2 + f x_0^2 x_1 x_2 + \\ & + g x_0 x_1^2 x_2 + h x_0^2 x_2^2 + i x_1^2 x_2^2 + l x_0 x_1 x_2^2 + m x_0 x_2^3 + n x_1 x_2^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

con $a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n \in \gamma_2$.

Affinchè la C^4 contenga anche i punti A, B, C, U di $S_{2,2}$ devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f + g + l = 0 \\ a + b + c = 0 \\ d + h + m = 0 \\ c + i + n = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Essendo i coefficienti della (2.1) omogenei non è restrittivo supporre $a=1$.

Dalla seconda equazione del sistema (2.2) segue che :

$$b = 0 \quad c = 1 \quad (2.3)$$

oppure

$$b = 1 \quad c = 0 \quad (2.4)$$

Esaminiamo dapprima il caso (2.3).

Dalla (2.1) si ha, in tal caso, che non può essere $e = 0$ altrimenti $J(0,1,0)$ risulterebbe doppio, contro la proposizione 2; ne segue che

$$e = 1 \quad (2.3)_1$$

Inoltre dalla quarta equazione della (2.2) risulta :

$$i = 0 \quad n = 1 \quad (2.3)_2$$

$$i = 1 \quad n = 0 \quad (2.3)_3$$

Dalla terza e dalla prima equazione di (2.2) risulta che :

$$d = h = m = 0$$

$$d = 0 \quad h = m = 1 \quad (2.3)_4$$

$$m = 0 \quad d = h = 1$$

$$h = 0 \quad d = m = 1$$

$$f = g = l = 0$$

$$f = 0 \quad g = l = 1 \quad (2.3)_5$$

$$l = 0 \quad f = g = 1$$

$$g = 0 \quad f = l = 0$$

Tenendo conto delle (2.3), (2.3)₁, (2.3)₂, (2.3)₄, (2.3)₅ si ha che le equazioni delle rispettive C^4 in $S_{2,2}$ sono le seguenti

- 1- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0$
 $[b = i = d = h = m = f = g = l = 0; a = c = e = n = 1]$
- 2- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = i = d = h = m = f = 0; a = c = e = n = g = l = 1]$
- 3- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[b = i = d = h = m = l = 0; a = c = e = n = f = g = 1]$
- 4- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[b = i = d = h = m = g = 0; a = c = e = n = f = l = 1]$
- 5- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_2^3 = 0$
 $[b = i = d = f = g = l = 0; a = c = e = n = h = m = 1]$
- 6- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = i = d = f = 0; a = c = e = n = h = m = g = l = 1]$
- 7- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[b = i = d = l = 0; a = c = e = n = h = m = f = g = 1]$
- 8- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[b = i = d = g = 0; a = c = e = n = h = m = f = l = 1]$
- 9- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 = 0$
 $[b = i = m = f = g = l = 0; a = c = e = n = d = h = 1]$
- 10- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = i = m = f = 0; a = c = e = n = d = h = g = l = 1]$
- 11- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[b = i = m = l = 0; a = c = e = n = d = h = f = g = 1]$

- 12- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = i = m = g = 0; a = c = e = n = d = h = f = l = 1]$
- 13- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 = 0$
 $[b = i = h = f = g = l = 0; a = c = e = n = d = m = 1]$
- 14- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = i = h = f = 0; a = c = e = n = d = m = g = l = 1]$
- 15- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[b = i = h = l = 0; a = c = e = n = d = m = f = g = 1]$
- 16- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = i = h = g = 0; a = c = e = n = d = m = f = l = 1]$

Si esaminino ora il caso (2.3), (2.3)₁, (2.3)₃.

Dalla (2.1), per la (2.3)₃ si ha che non può essere $m = 0$, altrimenti il punto $O(0,0,1)$ risulterebbe doppio (contro la proposizione 2).

Ne segue:

$$m = 1 \quad (2.3)_6$$

Dalla terza equazione della (2.2) si ha che

$$d = 1 \quad h = 0 \quad (2.3)_7$$

$$d = 0 \quad h = 1 \quad (2.3)_8$$

Tenendo conto delle (2.3), (2.3)₁, (2.3)₃, (2.3)₅, (2.3)₆, (2.3)₇, si ha che le equazioni delle rispettive C^4 sono le seguenti:

- 17- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^3x_2 = 0$
 $[b = h = n = f = g = l = 0; a = c = d = e = i = m = 1]$
- 18- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = h = n = f = 0; a = c = d = e = i = m = g = l = 1]$
- 19- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[b = h = n = l = 0; a = c = d = e = i = m = f = g = 1]$
- 20- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = h = n = g = 0; a = c = d = e = i = m = f = g = 1]$

Nell'ipotesi (2.3), (2.3)₁, (2.3)₃, (2.3)₅, (2.3)₆, (2.3)₈ le equazioni delle rispettive C^4 sono date da:

- 21- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 = 0$
 $[b = d = n = f = g = l = 0; a = c = e = h = i = m = 1]$
- 22- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = d = n = f = 0; a = c = e = h = i = m = g = l = 1]$
- 23- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[b = d = n = l = 0; a = c = e = h = i = m = f = g = 1]$
- 24- $x_0^3x_1 + x_0^2x_1^2 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[b = d = n = g = 0; a = c = e = h = i = m = f = l = 1]$

Consideriamo ora il caso (2.4). Dalla terza equazione di (2.2) si ha:

$$d = h = m = 0 \quad (2.4)_1$$

$$m = 0, \quad d = h = 1 \quad (2.4)_2$$

$$h = 0, \quad d = m = 1 \quad (2.4)_3$$

$$d = 0, \quad h = m = 1 \quad (2.4)_4$$

Si osservi che dalla (2.1) nel caso (2.4)₁ e (2.4)₂ non può essere $n = 0$, altrimenti il punto $O(0,0,1)$ risulterebbe doppio, quindi

$$n = 1 \quad (2.4)_5$$

Ciò implica, dalla quarta equazione di (2.2) :

$$c = 0 \quad i = 1 \quad (2.4)_6$$

$$e = 1 \quad i = 0$$

Nel caso (2.3)₅, (2.4), (2.4)₁, (2.4)₅, (2.4)₆, e nel caso (2.3)₅, (2.4), (2.4)₂, (2.4)₅, (2.4)₆ le equazioni sono :

$$25- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 = 0$$

$$[c = d = e = h = m = f = g = l = 0; \quad a = b = i = n = 1]$$

$$26- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 + x_0 x_1 x_2^2 = 0$$

$$[c = d = e = h = m = f = 0; \quad a = b = i = n = g = l = 1]$$

$$27- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 + x_0^2 x_1 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 = 0$$

$$[c = d = e = h = m = l = 0; \quad a = b = i = n = f = g = 1]$$

$$28- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 + x_0^2 x_1 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 = 0$$

$$[c = d = e = h = m = g = 0; \quad a = b = i = n = f = l = 1]$$

$$29- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 = 0$$

$$[c = d = h = m = i = f = g = l = 0; \quad a = b = e = n = 1]$$

$$30- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 + x_0 x_1 x_2^2 = 0$$

$$[c = d = h = m = i = f = 0; \quad a = b = e = n = g = l = 1]$$

$$31- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 + x_0^2 x_1 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 = 0$$

$$[c = d = h = m = i = l = 0; \quad a = b = e = n = f = g = 1]$$

$$32- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2 + x_0^2 x_1 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 = 0$$

$$[c = d = h = m = i = g = 0; \quad a = b = e = n = f = l = 1]$$

$$33- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_0^2 x_2 + x_0 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 = 0$$

$$[c = e = m = f = g = l = 0; \quad a = b = d = h = i = n = 1]$$

$$34- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_0^2 x_2 + x_0 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + x_0 x_1^2 x_2 + x_0 x_1 x_2^2 = 0$$

$$[c = e = m = f = 0; \quad a = b = d = h = i = n = g = l = 1]$$

$$35- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_0^2 x_2 + x_0 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_1 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 = 0$$

$$[c = e = m = l = 0; \quad a = b = d = h = i = n = f = g = 1]$$

$$36- \quad x_0^3 x_1 + x_0 x_1^3 + x_0^2 x_2 + x_0 x_2^2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_1 x_2 + x_0 x_1^2 x_2 = 0$$

$$[c = e = m = g = 0; \quad a = b = d = h = i = n = f = l = 1]$$

- 37- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0$
 $[c = i = m = f = g = l = 0; a = b = d = e = h = n = 1]$
- 38- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = i = m = f = 0; a = b = d = e = h = n = g = l = 1]$
- 39- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = i = m = l = 0; a = b = d = e = h = n = f = g = 1]$
- 40- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = i = m = g = 0; a = b = d = e = h = n = f = l = 1]$

Dalla quarta equazione della (2.2) si ha:

$$\begin{aligned} c &= i = n = 0 \\ c &= 0 \quad i = n = 1 \\ n &= 0 \quad c = i = 1 \\ i &= 0 \quad c = n = 1 \end{aligned} \quad (2.4)_7$$

e allora nei casi (2.3)₅, (2.4), (2.4)₃, (2.4)₇ e (2.3)₅, (2.4), (2.4)₄, (2.4)₇, si ottengono:

- 41- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 = 0$
 $[c = e = h = i = n = f = g = l = 0; a = b = d = m = 1]$
- 42- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = e = h = i = n = f = 0; a = b = d = m = g = l = 1]$
- 43- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = e = h = i = n = l = 0; a = b = d = m = f = g = 1]$
- 44- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = e = h = i = n = g = 0; a = b = d = m = f = l = 1]$
- 45- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 = 0$
 $[c = e = h = f = g = l = 0; a = b = d = i = m = n = 1]$
- 46- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = e = h = f = 0; a = b = d = i = m = n = g = l = 1]$
- 47- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = e = h = l = 0; a = b = d = i = m = n = f = g = 1]$
- 48- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = e = h = g = 0; a = b = d = i = m = n = f = l = 1]$
- 49- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 = 0$
 $[c = h = n = f = g = l = 0; a = b = d = e = i = m = 1]$
- 50- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = h = n = f = 0; a = b = d = e = i = m = g = l = 1]$
- 51- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = h = n = l = 0; a = b = d = e = i = m = f = g = 1]$

- 52- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = h = n = g = 0; a = b = d = e = i = m = f = l = 1]$
- 53- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0$
 $[c = h = i = f = g = l = 0; a = b = d = e = m = n = 1]$
- 54- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = h = i = f = 0; a = b = d = e = m = n = g = l = 1]$
- 55- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = h = i = l = 0; a = b = d = e = m = n = f = g = 1]$
- 56- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0^3x_2 + x_0x_2^3 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = h = i = g = 0; a = b = d = e = m = n = f = l = 1]$
- 57- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 = 0$
 $[c = d = e = i = n = f = g = l = 0; a = b = h = m = 1]$
- 58- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = d = e = i = n = f = 0; a = b = h = m = g = l = 1]$
- 59- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = d = e = i = n = l = 0; a = b = h = m = f = g = 1]$
- 60- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = d = e = i = n = g = 0; a = b = h = m = f = l = 1]$
- 61- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 = 0$
 $[c = d = e = f = g = l = 0; a = b = h = i = m = n = 1]$
- 62- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = d = e = f = 0; a = b = h = i = m = n = g = l = 1]$
- 63- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = d = e = l = 0; a = b = h = i = m = n = f = g = 1]$
- 64- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = d = e = g = 0; a = b = h = i = m = f = l = 1]$
- 65- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2 = 0$
 $[c = d = n = f = g = l = 0; a = b = e = h = i = m = 1]$
- 66- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = d = n = f = 0; a = b = e = h = i = m = g = l = 1]$
- 67- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = d = n = l = 0; a = b = e = h = i = m = f = g = 1]$
- 68- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = d = n = g = 0; a = b = e = h = i = m = f = l = 1]$
- 69- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 = 0$
 $[c = d = i = f = g = l = 0; a = b = e = h = m = n = 1]$

- 70- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0x_1^2x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = d = i = f = 0; a = b = e = h = m = n = g = l = 1]$
- 71- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1^2x_2 = 0$
 $[c = d = i = l = 0; a = b = e = h = m = n = f = g = 1]$
- 72- $x_0^3x_1 + x_0x_1^3 + x_0x_2^3 + x_0^2x_2^2 + x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_0^2x_1x_2 + x_0x_1x_2^2 = 0$
 $[c = d = i = g = 0; a = b = e = h = m = n = f = l = 1]$

Si verifica facilmente che tra tutte le C^4 trovate, le seguenti contengono almeno una retta in γ_2 e precisamente :

le 41, 42, 43, 44, 57, 58, 59, 60, contengono la retta $x_0 = 0$,

le 1, 2, 3, 4, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, la retta $x_1 = 0$,

le 6, 8, 13, 15, 38, 45, 46, 48, 53, 55, 61, 63, 70, 72, la $x_0 + x_1 = 0$,

le 36, 37, 40, 50, 56, 66, 67, 69, la retta $x_0 + x_2 = 0$,

le 10, 19, 20, 35, 49, 54, contengono la retta $x_1 + x_2 = 0$,

le 5, 7, 9, 16, 18, 21, 34, 39, 51, 68, la retta $x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

In virtù della proposizione 3 segue che le rimanenti C^4 , e cioè le 11, 12, 14, 17, 22, 23, 24, 33, 47, 52, 62, 64, 65, 71, sono tutte irriducibili in Γ_2 .

Sussiste però il seguente teorema:

TEOREMA - Le C^4 invadenti $S_{2,2}$, irriducibile in Γ_2 , sono tutte proiettivamente identiche, in quanto, pur di scegliere opportunamente il riferimento proiettivo, esse si riducono tutte alla 33.

DIMOSTRAZIONE. Si verifica facilmente che :

la 11 mediante l'omografia data da $x_0 = X_0 + X_1$; $x_1 = X_1$; $x_2 = X_2$,

la 12 tramite la $x_0 = X_1$; $x_1 = X_0 + X_2$; $x_2 = X_0$,

la 14 con la $x_0 = X_0 + X_1 + X_2$; $x_1 = X_1$; $x_2 = X_2$,

la 17 con la $x_0 = X_0$; $x_1 = X_2$; $x_2 = X_1$,

la 22 mediante la $x_0 = X_0 + X_1 + X_2$; $x_1 = X_0 + X_2$; $x_2 = X_0$,

la 23 con la $x_0 = X_0$; $x_1 = X_2$; $x_2 = X_0 + X_1$,

la 24 con la $x_0 = X_1 + X_2$; $x_1 = X_0 + X_2$; $x_2 = X_0$,

la 47 tramite la $x_0 = X_0 + X_1$; $x_1 = X_2$; $x_2 = X_1$,

la 52 con la $x_0 = X_0 + X_1 + X_2$; $x_1 = X_2$; $x_2 = X_0$,

la 62 con la $x_0 = X_1$; $x_1 = X_0 + X_1$; $x_2 = X_1 + X_2$,

la 64 con la $x_0 = X_2$; $x_1 = X_1$; $x_2 = X_0 + X_1 + X_2$,

la 65 con la $x_0 = X_1$; $x_1 = X_0$; $x_2 = X_2$,

la 71 tramite la $x_0 = X_0$; $x_1 = X_0 + X_1$; $x_2 = X_0 + X_1 + X_2$,
 si riducono tutte alla 33, cioè :

$$X_0^3 X_1 + X_0 X_1^3 + X_0^3 X_2 + X_0^2 X_2^2 + X_1 X_2^3 + X_1^2 X_2^2 = 0$$

BIBLIOGRAFIA

1. O. FERRI, " *Intorno alle curve C^{q+3} irriducibili con un punto triplo che invadono un piano di Galois $S_{2,q}$* ". Rend. Accad. Sci. Lettere Art. Napoli (4) Vol. XXXVI (1969))
2. B. SEGRE, " *Lectures on modern geometry*". Roma, Cremonese, 1961
3. B. SEGRE, " *Istituzioni di geometria superiore*". App. di parte del corso A.A 1965-66 Univ. di Roma
4. G. TALLINI, " *Le ipersuperfici irriducibili d'ordine minimo che invadono uno spazio di Galois*". Rend. Mat. Univ. Roma Serie V, vol.XX
5. G. TALLINI, " *Intorno alle forme di uno spazio di Galois e agli spazi subordinati giacenti su esse*". Rend. Acc. Naz. Lincei (8), 33, (1962), pp. 421-428