

Numero 9 - 1995

RATIO MATHEMATICA

Rivista di
applicazioni della matematica

a cura di

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo

Comitato Scientifico

Albrecht Beutelspacher, *Giessen*

Piergiulio Corsini, *Udine*

Bal K. Dass, *Delhi*

Franco Eugeni, *Roma*

Mario Gionfriddo, *Catania*

Antonio Maturo, *Pescara*

Aniello Russo Spena, *L'Aquila*

Romano Scozzafava, *Roma*

Maria Tallini Scafati, *Roma*

Numero 9 - 1995

RATIO MATHEMATICA

Rivista di
applicazioni della matematica

INDICE

M. CHIARINI, F. VEGLIO', <i>Interazione di pirazolilborati 3,4,5-triMe sostituiti con organostagno (IV)</i>	pag.	3
G. BUCCI, A. GERMANO, C. LANDI, <i>A recursive algorithm suitable for real-time measurement</i>	pag.	17
L. TIBILETTI, <i>Quasi-concavity property of multivariate distribution functions</i>	pag.	27
F. VEGLIO', <i>La programmazione della sperimentazione nello sviluppo dei processi chimici</i>	pag.	37
F. MERCANTI, <i>Sistemi Digitali Multicanale e teoria dell'informazione I. Entropia, ridondanza e codifica</i>	pag.	55
F. CALIO', E. MARCHETTI, <i>Practical aspects in some not classical methods for the numerical evaluation of CPV-Integrals</i>	pag.	61
O. FERRI, S. FERRI, <i>Su alcuni q^2 - Insiemi di $AG(3,q)$ a tre caratteri rispetto ai piani</i>	pag.	69
A. MATURO, L. RENZULLO, <i>Su una classe di modelli matematici per l'urbanistica</i>	pag.	73
G. DI BIASE, <i>What is inside a probabilistic expert system?</i>	pag.	87
D. FRENI, <i>Una nota su gli ipergruppoidi ciclici</i>	pag.	101
M. BIANCARDI, A. GALLO, <i>Periodic solutions of a second order evolutive variational inequality</i>	pag.	113

INTERAZIONE DI PIRAZOLILBORATI 3,4,5-TriMe SOSTITUITI CON ORGANOSTAGNO(IV)

Marco Chiarini*, Francesco Vegliò*

ABSTRACT. The present paper reports the analysis of the crystal structure of dicloromethyltin(IV) hydridotris [3,4,5-trimethyl-1*H*-pyrazol-1-yl]borate and that of potassium) hydridotris [3,4,5-trimethyl-1*H*-pyrazol-1-yl]borate and comparisons are made. The tin atom has a more or less distorted octahedral coordination both in the solid state and in solution; the X-ray crystal structure confirm these inferences.

INTRODUZIONE

La preparazione dei primi derivati metallici del pirazolo risale al periodo di fine '800, in cui l'eterociclo fu scoperto da E. Buchner, a Monaco di Baviera [1] e L. Balbiano allora a Messina [2], ma il loro studio fu presto abbandonato, tanto che bisognerà aspettare gli anni '70 del nostro secolo per ritrovare l'interesse in questo settore della ricerca.

Il pirazolo (Fig. 1) è un composto con netto carattere aromatico che può formare sia il catione pirazolio che l'anione pirazolato (Fig. 1). Quest'ultimo possiede un asse C_2 di simmetria, assente nel composto neutro, che rende i due atomi di azoto N(1) e N(2) chimicamente equivalenti, ciò vale anche per i pirazoli sostituiti simmetricamente in 3,5 o in 4. Poiché entrambi gli atomi N(1) e N(2) sentono lo stesso intorno elettronico, l'anione pirazolato si può comportare da legante esobidentato, e la disposizione più frequente è a ponte tra due centri di coordinazione, questi possono essere uguali o differenti;

* Università degli studi de L'Aquila Dipartimento di Chimica, Ingegneria Chimica e Materiali, via Vetoio loc.Coppito II; I-67010 L'Aquila, Italy

quando essi sono differenti si ha, generalmente, che uno dei due è rappresentato da uno dei seguenti metalli: B, Al, Ga, In, P, As.

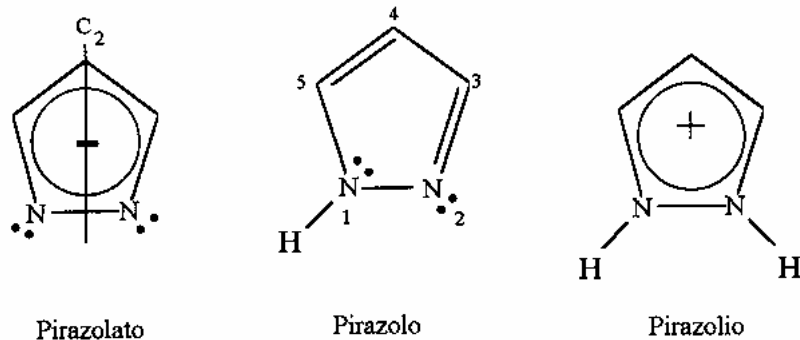


Fig. 1

Tra questi la nostra attenzione è rivolta ai composti anionici del tipo $[R_nB(pz)_{4-n}]^{\#}$, la cui particolarità non risiede solo nella peculiarità del legame del metallo con l'anello pirazolico, ma anche nella sua carica negativa, che elimina il problema del contro ione.

Essi si dividono in due grandi classi: i sistemi bidentati $[R_2B(pz)_2]^-$ e i sistemi tridentati $[RB(pz)_3]^-$. Lo ione $[B(pz)_4]^-$ può comportarsi sia da bis bidentato $[(pz)_2B(pz)_2]^-$ che da tridentato $[(pz)B(pz)_3]^-$. Nello studio portato avanti ci siamo occupati in particolare dei tris(pirazolil)borati coordinati a composti dello stagno, variando i sostituenti sia sullo stagno che sul pirazolo.

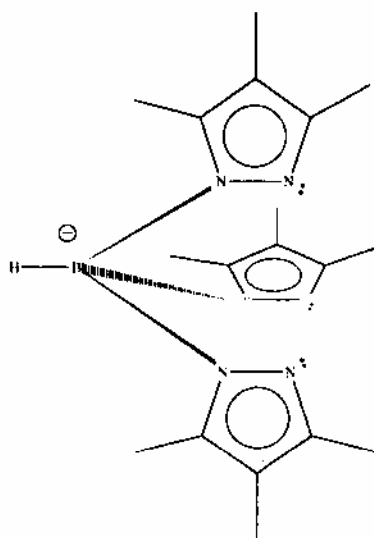
DISCUSSIONE

In questo articolo prenderemo in considerazione i contributi della matematica alla risoluzione di problemi chimici, connessi alla struttura cristallina di complessi molecolari. In particolare prenderemo in considerazione il legante idrotris(3,4,5-trimetil-1*H*-pirazol-1-il)borato (KTp^{Me}) ed uno dei suoi complessi: l'idrotris(3,4,5-trimetil-1*H*-pirazol-1-il)boratodichlorometilstagno(IV) ($Tp^{Me}SnCl_2Me$).

La caratteristica principale dei leganti è la capacità di donare elettroni ai metalli; proprio su questa caratteristica si cerca di investigare, cioè sulla maggiore o minore capacità dei leganti di comportarsi da donatori, in rapporto alle proprie caratteristiche steriche e al tipo di sostituito sul metallo. In generale possiamo dire che la presenza di sostituenti sui pirazoli (nel nostro caso metili) aumenta la capacità dei

[#] Con *pz* indichiamo un generico pirazolo; con *Pz* indichiamo il pirazolo non sostituito.

donatori verso un accettore puntiforme come un protone, ma, nel contempo, sfavorisce l'interazione con un metallo, perché ne impedisce stericamente l'avvicinamento; lo scopo dello studio è quello di capire il comportamento dei tris(pirazolil)borati come leganti donatori di tre coppie di elettroni, dunque cercheremo di illustrare quale è stato il contributo dell'analisi delle strutture cristalline nell'avanzamento di questa comprensione. I polipirazolilborati sono una classe molto interessante di leganti mononegativi tridentati.



Idrotris(3,4,5-trimetil-1H-pirazol-1-il)borato

Il complesso che abbiamo preso in considerazione, è stato ottenuto per interazione dei sali di potassio del legante, con MeSnCl_3 in una soluzione-sospensione di diclorometano, seguendo le procedure già viste [3,4]. La separazione di KCl è, nella formazione di questi composti, più lenta e le rese più scarse. Il complesso è stato caratterizzato con i dati riportati nella tabella I [5]; come previsto dalla loro struttura di complessi neutri, essi sono monomeri in solventi non donatori (diclorometano) e non elettroliti in soluzione di acetone.

Gli spettri IR, riportati in tabella II [5], mostrano le bande attese per l'anello del pirazolo: la debole vibrazione di stretching del C-H a circa $3150\text{--}3100\text{ cm}^{-1}$, un'intensa vibrazione di breathing dell'anello a $1596\text{--}1583\text{ cm}^{-1}$ e a circa 1570 cm^{-1} , ed un picco di media intensità, dovuto allo stretching del B-H, intorno a 2550 cm^{-1} . Inoltre sono visibili altre bande, nella regione delle basse frequenze, dovute allo stretching dei legami Sn-C e Sn-Cl.

Gli spettri NMR, di ^1H (tabella III [5]), ^{13}C e ^{119}Sn (tabella IV [5]), confermano le formule proposte. Gli spettri ^1H e ^{13}C evidenziano due serie di segnali, per gli anelli di pirazolo, con rapporto di 2:1 per il protonico e di

diversa intensità per il ^{13}C ; ciò riflette la non equivalenza di due anelli rispetto al terzo, perché la virtuale simmetria C_{3v} del legante, è perduta quando i sostituenti sullo stagno non sono tutti uguali. La presenza di un solo picco nello spettro NMR dello ^{119}Sn conferma l'esistenza di una unica specie in soluzione.

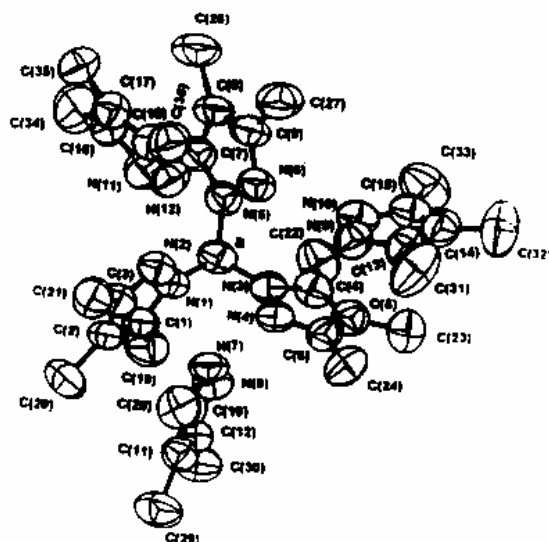
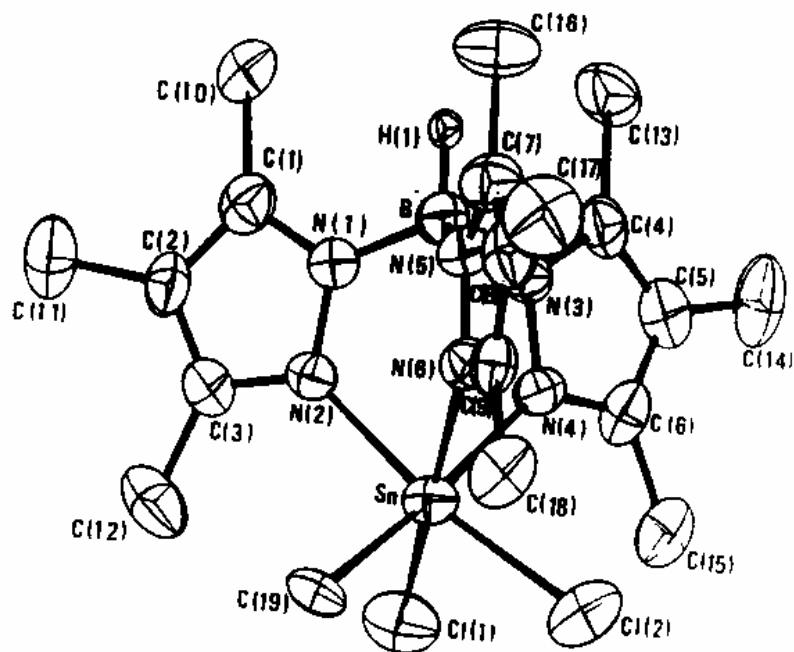
Lo stagno è un metallo del IV gruppo B, occupa il 50° posto ed ha una configurazione elettronica esterna $4d^{10}5s^25p^2$. Il complesso che si forma dall'interazione di KTp^{Me} con MeSnCl_3 fa sì che lo stagno aumenti il suo numero di coordinazione fino a sei. Una previsione della struttura che si viene a formare può essere fatta sul principio che i sei leganti si dispongono attorno allo ione centrale in modo da minimizzare le interazioni di non legame e di massimizzare quelle di legame. Su questo principio, se fossimo di fronte a sei leganti uguali, si avrebbe una distribuzione ottaedrica perfetta dei leganti attorno al metallo centrale; ma, essendo questi differenti e vincolati da legami con altri atomi, si avrà una struttura distorta rispetto alla simmetria O_h .

Un valido aiuto per la comprensione di come gli effetti sterici ed elettronici contribuiscano alla formazione del complesso, deriva dalla conoscenza della struttura; infatti sono state ottenute le strutture ai raggi X di KTp^{Me} e $\text{MeCl}_2\text{SnTp}^{\text{Me}}$ mostrate in figura 2 e 3 con i relativi schemi di numerazione adottati.

I dati cristallografici sono riportati in tabella V [5], mentre alcuni angoli rilevanti, insieme alle distanze interatomiche, sono riportati nelle tabelle VI e VII [5] per 1 e KTp^{Me} , rispettivamente.

La struttura cristallina di 1 è costituita da un aggregato di molecole, $\text{HB}(3,4,5\text{-Me}_3\text{Pz})_3\text{MeSnCl}_2$ ($\text{C}_{19}\text{H}_{31}\text{BCl}_2\text{N}_6\text{Sn}$), in cui le interazioni intermolecolari sono di semplice contatto di van der Waals. L'atomo di stagno risulta esacoordinato, essendo legato a due atomi di cloro, un carbonio metilico e a tre azoti del legante anionico tridentato idrotris(3,4,5-trimetilpirazol-1-il)borato; la sfera di coordinazione è così essenzialmente ottaedrica.

In 1 i legami Sn-N non sono significativamente differenti, e la media è di 2.242(6) Å, mentre i due legami Sn-Cl differiscono leggermente. Sostanzialmente tutti e sei i legami con lo stagno rientrano nell'intervallo 2.239-2.451 Å, così anche i dodici angoli cis X-Sn-X non si discostano molto dai 90°, infatti il più stretto è N(6)-Sn-N(4) di 81.0° e il più ampio è Cl(2)-Sn-Cl(1) di 94.45°, per cui la struttura ottaedrica è chiaramente evidente anche se distorta. Il sale KTp^{Me} cristallizza con tre molecole libere di 3,4,5-Trimetilpirazolo (pz) e con $1/2$ molecola di etere dietilico ($\text{C}_3\text{H}_5\text{BKN}_{12} \cdot 1/2 \text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$). La geometria dell'anello pirazolico, in 1 (A), risulta molto simile a quella del legante KTp^{Me} (B) e degli anelli isolati (C) in KTp^{Me} . I valori medi delle distanze di legame di N-N= 1.366(9) Å (A), 1.38(1) Å (B) e 1.39(1) Å (C), N-C= 1.35(1) Å (A), (B) e (C), C-C= 1.38(1) Å (A), (B) e (C), e gli angoli $\text{N}_1=\text{C}_3= 109.7(7)^\circ$ (A), 110.7(7)° (B) e 110.9(8)° (C), $\text{N}_2=\text{C}_4= 106.3(7)^\circ$ (A), 105.4(7)° (B) e 105.0(8)° (C) e $\text{C}_5= 108.1(7)^\circ$ (A), 107.9(8)° (B) e 108.2(9)° (C) (per la nomenclatura si veda la figura 4) sono in accordo con i dati precedentemente trovati [6] e con quelli determinati altrove [7].

Fig.2 - Proiezione ORTEP della struttura di KTp*^{Me}Fig.3 - Proiezione ORTEP della struttura di MeCl₂SnTp*^{Me}

I cinque atomi di ogni pirazolo risultano planari entro i limiti dell'errore sperimentale.

L'atomo di boro ha una configurazione tetraedrica, con angoli N-B-N che vanno da 108.6(6) a 110.0(6) in **1** e da 109.2(6) a 110.9(6) in KTp^{Me} ; gli angoli B-N-N sono più piccoli di quelli B-N-C e le differenze in **1** sono maggiori di quelle in KTp^{Me} come era da aspettarsi per l'aumento di ingombro sterico dalla parte opposta del boro. Gli angoli di torsione N-B-N sono in media di 60.0° in **1**, mentre in KTp^{Me} i corrispondenti valori variano da 26(1)° a 94.3(8)°.

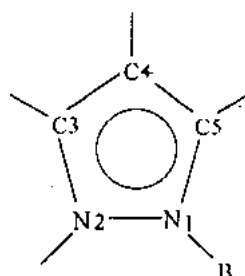


Fig. 4-Nomenclatura usata per l'anello del pirazolo

Le distanze e gli angoli, che coinvolgono l'atomo di potassio, in KTp^{Me} , sono riportati nella tabella VIII [5]. Da questi valori è possibile identificare sei interazioni N-K. Il piano A, individuato da N(2), N(4) e N(6), e il piano B, individuato da N(7), N(9) e N(12), sono quasi paralleli (l'angolo diedro A^B è di 1.2°) e l'atomo di potassio giace tra essi a 2.24 Å dal piano A e a 0.43 Å dal piano B. La coordinazione può essere descritta come una bipiramide trigonale distorta rovesciata, con il vertice in comune occupato dallo stesso atomo di potassio (figura 5).

Se si definisce con M1 il punto mediano della congiungente i due atomi di azoto nel piano A, e con M2 quello della congiungente i due atomi di azoto del piano B, l'angolo M1-K-M2 è di 170.0° e i legami possono essere descritti come sinclinali. Tutti i contatti intermolecolari, nei cristalli di **1** e KTp^{Me} , sono più lunghi delle somme dei raggi di van der Waals [8]. La più corta interazione intermolecolare Cl...C è di 3.64 Å per Cl(1)...C(12) [-x+3/2, -y+1/2, -z].

Dalla tabella IX [5] è chiaro che la presenza di un metile, in posizione 3 negli anelli pirazolici (pz) del legante, causa un allungamento del legame Sn-N e una sottile apertura negli angoli di presa. Il motivo, per cui questo accade, può essere spiegato solo in termini di impedimento sterico, dovuto ai tre gruppi 3-metile che si "affollano" nella "fascia" equatoriale insieme agli altri tre sostituenti (i due clori ed il metile) legati allo stagno ottaedrico.

Le due strutture ottenute permettono interessanti confronti tra i tre tipi di pirazoli: quelli liberi (C), quelli legati al boro (B) in KTp^{Me} e quelli legati allo stagno e al boro in **1** (A). Mentre le lunghezze di legame non mostrano alcuna variazione rilevante, gli angoli di legame α , β e γ (figura 6) presentano importanti tendenze. Quando N2 si lega allo stagno (chiudendo

così la gabbia) l'angolo α si riduce di 1.1° . In KTP^{Me} i tre gruppi 5-metile formano un angolo maggiore dalla parte del boro ($\beta_B - \beta_C = 2.4^\circ$) rispetto a quello formato nel pirazolo libero, mentre γ rimane quasi invariato ($\gamma_B - \gamma_C = 0.5^\circ$).

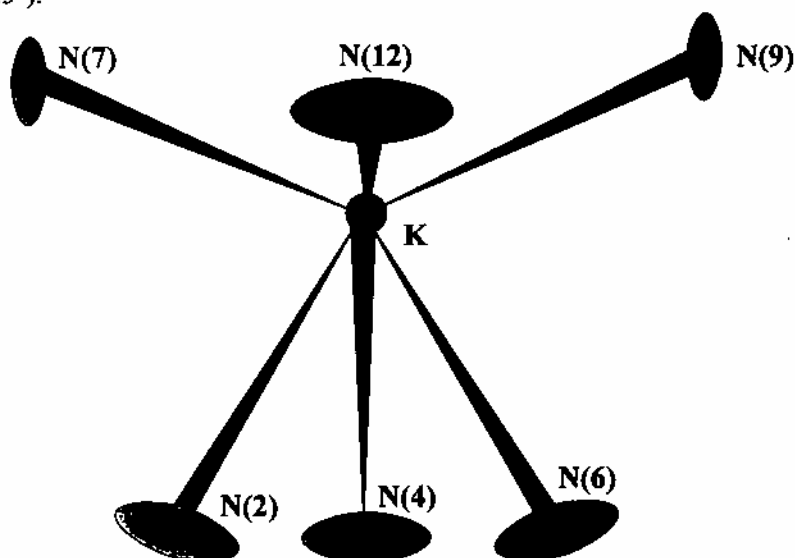
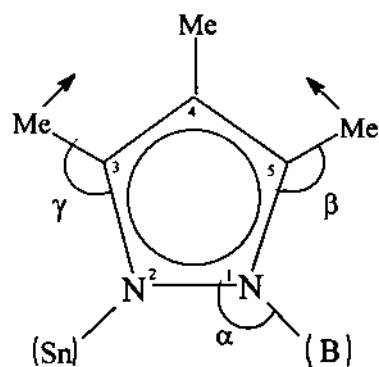


Fig. 5 - L'atomo di potassio e il suo intorno



	A (Sn- μ -pz-B)	B (pz-B)	C (Pz-H)
$\alpha / ^\circ$	120.4	121.5	-
$\beta / ^\circ$	122.7	122.3	119.9
$\gamma / ^\circ$	123.1	120.4	119.9

Fig 6- Alcuni angoli particolari della struttura cristallina

Oltre ai gruppi metilici in 5, anche i metili in 3, nel composto **1**, sono soggetti ad ingombro sterico. Sebbene il legame Sn-N sia più lungo di quello N-B, i metili in 3 si trovano a competere per lo spazio con tre altri sostituenti presenti sullo stagno ($\gamma_A - \gamma_B = 2,7^\circ$), nel risultante arrangiamento ottaedrico. Ciò non accade in KTp^{Me} dato che K^+ ha solo deboli interazioni elettrostatiche con gli atomi N2 e non richiede un maggiore avvicinamento a questi ultimi, evitando così l'affollamento dei gruppi metilici in tre.

CONCLUSIONI

Dai confronti che abbiamo potuto fare sulle strutture cristalline, tra il legante e un suo complesso, si può dedurre che la struttura complessiva del legante non subisce variazioni sostanziali, ma piccole variazioni, dovute all'arrangiamento spaziale degli atomi, per massimizzare la sovrapposizione degli orbitali di legame e minimizzare le interazioni di non legame, causate dalla repulsione elettrostatica delle nuvole elettroniche degli atomi, nell'intorno spaziale dello stagno affollato dai sostituenti metilici sui pirazoli e dai sostituenti sullo stagno. Si è notato, inoltre, che l'angolo di presa sullo stagno risulta inferiore a quello atteso, ciò si ritiene sia dovuto all'ingombro sterico sul boro, causato dai metili in posizione 5 ed aumentato anche dai metili in 4 che impediscono ai sostituenti in 3 e 5 di allontanarsi significativamente dal metallo; ciò fa sì che ci sia un contrasto all'aumento reciproco dei due angoli, sullo stagno e sul boro.

Per quanto riguarda le misure di interazione acido-base tra legante e metallo, dovremmo prendere in considerazione altri parametri che, in questa sede, non abbiamo discusso.

Tabella I

Composto ^a	Rese	Analisi elementare (Trovati /Calcolati) (%)			P.M.	Λ^c
		C	H	N		
$\text{KTp}^{\text{Me}} \cdot \text{H}_2\text{O}^b$	56	54.27	7.56	20.96		
		54.54	7.63	21.20		
1 $\text{CH}_3\text{SnCl}, \text{KTp}^{\text{Me}^b}$	76	41.74	5.84	15.19	527 ^d	7.5
		41.96	5.74	15.45		(1.1)

^a Tp^{Me} è l'idrotris(3,4,5-trimetil-1H-pirazol-1-il)borato. ^b Carbonizza senza fondere. ^c Conducibilità specifica ($\text{ohm}^{-1} \text{cm}^2 \text{mol}^{-1}$) in soluzione di acetone a temperatura ambiente; la concentrazione molare $\times 10^{-1}$ è indicata tra parentesi. ^d Monomero secondo il peso molecolare determinato mediante osmometria in diclorometano.

Tabella II - Dati IR

Comp.	Stretching C-H pirazolo	B-H	Breathing dell'anello	< 500	Altri
KTp^{*Me}	3200 w, sh; 3156 w	2430m	1596 s	310 w	
1	3094 w, sh 3115 w, sh 3105 w	2561m	1570 s 1596w 1560 m 1519 s	350 w	n(Sn-Cl) 290 s, br

Tabella III - Dati NMR ¹H

Comp.	Solvente	5-Me $\delta^{a,b}$	4-Me $\delta^{a,b}$	3-Me $\delta^{a,b}$	R-Sn, e note ^a J(Sn-H)/Hz
KTp^{*Me}	(CD ₃) ₂ CO	1.80	1.95	2.08	
1	CDCl ₃	1.82 1.80	2.34 2.32	2.48 2.78	Me: 1.50; ² J = 120

^a In ppm rispetto allo standard interno TMS. ^b L'intensità del segnale della riga superiore è doppia rispetto a quella della riga inferiore

Tabella IV - Dati NMR ¹³C e ¹¹⁹Sn

Composto	Solvente	C-3 $\delta^{a,b}$	C-5 $\delta^{a,b}$	C-4 $\delta^{a,b}$	Pz-CH ₃ $\delta^{a,b}$	R-Sn ^a	¹¹⁹ Sn δ^c
KTp^{*Me}	(CD ₃) ₂ CO	144.6	139.9	108.7	12.1 11.0 8.2		
MeSnCl₂Tp^{*Me}	CDCl ₃	148.0	142.1	112.9	12.1 10.8 7.7 149.7 113.5 13.6 11.2 7.8	Me:26. 1	514

^a In ppm rispetto al TMS; ^b Il segnale della linea superiore è più intenso rispetto a quello della linea inferiore. ^c In ppm rispetto allo standard esterno Me₄Sn.

Tabella V - Dati cristallografici

composto	1	KTp* ^{Me}
formula	C ₁₉ H ₃₁ BCl ₂ N ₆ Sn	C ₃₆ H ₅₈ BKN ₁₂ · ¹ / ₂ C ₄ H ₁₀ O
fw	543.91	745.91
sistema cristallino	monoclino	monoclino
gruppo punto	C _{2/c}	C _{2/c}
a, Å	30.515(8)	20.845(19)
b, Å	10.145(2)	21.267(8)
c, Å	16.119(3)	20.409(8)
α, β, γ, (°)	90.00, 92.34, 90.00	90.00, 91.51, 90.00
V, Å ³	4985.87	9044.39
Z	8	8
d calc, g/cm ³	1.450	1.096
μ, cm ⁻¹	12.62	13.37
F(000)	2208.0	3224.00
no. rifl. mis.	6538	6772
no. rif. un.	6030	6122
rif. mis., I > 3σ(I)	3419	2501
funz. minim.	Σw(F _o - F _c) ²	
no. par. raf.	262	471
a,b val. nella funz. peso		
w = 1.0/(a + F _o + bF _o)	43.2162	0.00321
R ^a	0.053	0.062
Rw ^a	0.074	0.081
bontà del fit, s	0.5	0.3

$$^aR = \sum |F_o - F_c| / \sum F_o; R_w = \{ \sum w(|F_o| - |F_c|)^2 / \sum w|F_o|^2 \}^{1/2}$$

$$b_s = \{ \sum w(|F_o| - |F_c|)^2 / (N_{\text{refl}} - N_{\text{par}}) \}^{1/2}$$

Tabella VI - Angoli e distanze di legame per CH₃SnCl₂Tp*^{Me}

ANGOLI DI LEGAME			
Cl(2)-Sn(1)-Cl(1)	94.45(9)	C(4)-N(3)-N(4)	109.0(6)
N(2)-Sn(1)-Cl(1)	90.2(2)	N(6)-N(5)-B(1)	120.0(6)
N(2)-Sn(1)-Cl(2)	169.9(2)	C(7)-N(5)-B(1)	130.0(6)
N(4)-Sn(1)-Cl(1)	87.8(2)	C(7)-N(5)-N(6)	110.0(6)
N(4)-Sn(1)-Cl(2)	89.0(2)	C(2)-C(1)-N(1)	107.6(7)
N(4)-Sn(1)-N(2)	82.2(2)	C(10)-C(1)-N(1)	123.4(8)
N(6)-Sn(1)-Cl(1)	167.6(2)	C(10)-C(1)-C(2)	129.0(8)
N(6)-Sn(1)-Cl(2)	90.6(2)	C(3)-C(2)-C(1)	106.4(7)
N(6)-Sn(1)-N(2)	83.1(2)	C(11)-C(2)-C(1)	126.3(8)
N(6)-Sn(1)-N(4)	81.0(2)	C(11)-C(2)-C(3)	127.2(8)
C(19)-Sn(1)-Cl(1)	98.1(2)	C(2)-C(3)-N(2)	109.5(7)
C(19)-Sn(1)-Cl(2)	94.8(2)	C(12)-C(3)-N(2)	122.3(8)

continua

C(19)-Sn(1)-N(2)	93.3(3)	C(12)-C(3)-C(2)	128.1(9)
C(19)-Sn(1)-N(4)	172.6(2)	C(5)-C(4)-N(3)	108.5(7)
C(19)-Sn(1)-N(6)	92.6(2)	C(13)-C(4)-N(3)	124.9(7)
N(1)-N(2)-Sn(1)	120.8(5)	C(13)-C(4)-C(5)	129.4(7)
C(3)-N(2)-Sn(1)	132.5(5)	C(6)-C(5)-C(4)	105.9(7)
C(3)-N(2)-N(1)	106.4(6)	C(14)-C(4)-C(5)	127.9(8)
N(3)-N(4)-Sn(1)	119.4(4)	C(14)-C(5)-C(6)	126.2(9)
C(6)-N(4)-Sn(1)	133.8(5)	C(5)-C(6)-N(4)	109.8(7)
C(6)-N(4)-N(3)	106.8(6)	C(15)-C(6)-N(4)	123.7(7)
N(5)-N(6)-Sn(1)	120.0(4)	C(15)-C(6)-C(5)	126.4(8)
C(9)-N(6)-Sn(1)	133.8(5)	C(8)-C(7)-N(5)	108.1(7)
C(9)-N(6)-N(5)	106.2(6)	C(16)-C(7)-N(5)	122.9(8)
N(3)-B(1)-N(1)	108.6(6)	C(16)-C(7)-C(8)	129.0(8)
N(5)-B(1)-N(1)	110.0(6)	C(9)-C(8)-C(7)	105.9(7)
N(5)-B(1)-N(3)	108.8(6)	C(17)-C(8)-C(7)	127.5(8)
N(2)-N(1)-B(1)	120.2(6)	C(17)-C(8)-C(9)	126.5(8)
C(1)-N(1)-B(1)	129.7(7)	C(8)-C(9)-N(6)	109.8(7)
C(1)-N(1)-N(2)	110.0(6)	C(18)-C(9)-N(6)	123.3(7)
N(4)-N(3)-B(1)	120.9(6)	C(18)-C(9)-C(8)	126.9(7)
C(4)-N(3)-B(1)	129.7(7)		
LUNGHEZZE DI LEGAME			
Sn(1)-Cl(1)	2.425(3)	N(6)-C(9)	1.35(1)
Sn(1)-Cl(2)	2.451(3)	C(1)-C(2)	1.38(1)
Sn(1)-N(2)	2.240(6)	C(1)-C(10)	1.49(1)
Sn(1)-N(4)	2.239(6)	C(2)-C(3)	1.36(1)
Sn(1)-N(6)	2.247(6)	C(2)-C(11)	1.54(1)
Sn(1)-C(19)	2.244(7)	C(3)-C(12)	1.50(1)
B(1)-N(1)	1.53(1)	C(4)-C(5)	1.38(1)
B(1)-N(3)	1.54(1)	C(4)-C(13)	1.50(1)
B(1)-N(5)	1.55(1)	C(5)-C(6)	1.38(1)
N(1)-N(2)	1.352(9)	C(5)-C(14)	1.51(1)
N(1)-C(1)	1.35(1)	C(6)-C(15)	1.50(1)
N(2)-C(3)	1.37(1)	C(7)-C(8)	1.38(1)
N(3)-N(4)	1.373(9)	C(7)-C(16)	1.49(1)
N(3)-C(4)	1.347(9)	C(8)-C(9)	1.38(1)
N(4)-C(6)	1.35(1)	C(8)-C(17)	1.51(1)
N(5)-N(6)	1.373(8)	C(8)-C(18)	1.51(1)
N(5)-C(7)	1.33(1)		

Tabella VII - Angoli e distanze di legame per KTp*^{Me}

ANGOLI DI LEGAME			
N(3)-B(1)-N(1)	110.8(6)	C(24)-C(6)-C(5)	129.4(8)
N(5)-B(1)-N(1)	109.1(6)	C(8)-C(7)-N(5)	106.3(6)

continua

N(5)-B(1)-N(3)	109.7(5)	C(25)-C(7)-N(5)	122.9(7)
N(2)-N(1)-B(1)	121.5(6)	C(25)-C(7)-C(8)	130.5(7)
C(1)-N(1)-B(1)	128.5(7)	C(9)-C(8)-C(7)	106.6(7)
C(1)-N(1)-N(2)	109.7(6)	C(26)-C(8)-C(7)	127.9(8)
C(3)-N(2)-N(1)	105.9(6)	C(26)-C(8)-C(9)	125.4(7)
N(4)-N(3)-B(1)	121.4(6)	C(8)-C(9)-N(6)	110.7(7)
C(4)-N(3)-B(1)	129.4(6)	C(27)-C(9)-N(6)	120.3(7)
C(4)-N(3)-N(4)	109.0(6)	C(27)-C(9)-C(8)	128.8(7)
C(6)-N(4)-N(3)	104.9(6)	C(11)-C(10)-N(7)	111.4(7)
N(6)-N(5)-B(1)	121.5(5)	C(27)-C(10)-N(7)	121.6(7)
C(7)-N(5)-B(1)	127.2(6)	C(28)-C(10)-C(11)	126.9(7)
C(7)-N(5)-N(6)	111.2(6)	C(12)-C(11)-C(10)	105.4(7)
C(9)-N(6)-N(5)	105.0(6)	C(29)-C(11)-C(10)	128.5(8)
C(10)-N(7)-N(8)	104.6(6)	C(29)-C(11)-C(12)	126.0(7)
C(12)-N(8)-N(7)	111.7(6)	C(11)-C(12)-N(8)	106.6(7)
C(13)-N(9)-N(10)	103.1(7)	C(30)-C(12)-N(8)	119.9(7)
C(15)-N(10)-N(9)	111.7(7)	C(30)-C(12)-C(11)	133.3(7)
C(16)-N(11)-N(12)	111.8(7)	C(14)-C(13)-N(29)	112.7(8)
C(18)-N(12)-N(11)	103.7(6)	C(31)-C(13)-N(9)	118.8(8)
C(2)-C(1)-N(1)	107.8(8)	C(31)-C(13)-C(14)	128.4(8)
C(19)-C(1)-N(1)	122.6(8)	C(15)-C(14)-C(13)	104.8(8)
C(19)-C(1)-C(2)	129.4(7)	C(32)-C(14)-C(13)	127.5(9)
C(3)-C(2)-C(1)	105.1(7)	C(32)-C(14)-C(15)	127(1)
C(20)-C(2)-C(1)	128.1(9)	C(14)-C(15)-N(10)	107.5(9)
C(20)-C(2)-C(3)	126.7(9)	C(33)-C(15)-N(10)	119.1(9)
C(2)-C(3)-N(2)	111.2(8)	C(33)-C(15)-C(14)	133.2(9)
C(21)-C(3)-N(2)	121.0(8)	C(17)-C(16)-N(11)	106.6(8)
C(21)-C(3)-C(2)	127.6(8)	C(34)-C(16)-N(11)	120(1)
C(5)-C(4)-N(3)	110.0(7)	C(34)-C(16)-C(17)	133(1)
C(22)-C(4)-N(3)	121.3(8)	C(18)-C(17)-C(16)	105.7(9)
C(22)-C(4)-C(5)	128.5(8)	C(35)-C(17)-C(16)	126.1(9)
C(6)-C(5)-C(4)	104.4(7)	C(35)-C(17)-C(18)	128.0(9)
C(23)-C(5)-C(4)	129.2(8)	C(18)-C(18)-N(12)	111.9(8)
C(23)-C(5)-C(6)	126.2(8)	C(36)-C(18)-N(12)	120.1(8)
C(5)-C(6)-N(4)	111.5(7)	C(36)-C(18)-C(17)	127.9(9)
C(24)-C(6)-N(4)	119.0(7)	C(38)-C(37)-O(1)	107.1
LUNGHEZZE DI LEGAME			
O(1)-C(37)	1.31(2)	C(3)-C(21)	1.50(1)
B(1)-N(1)	1.53(1)	C(4)-C(5)	1.35(1)
B(1)-N(3)	1.54(1)	C(4)-C(22)	1.50(1)
B(1)-N(5)	1.56(1)	C(5)-C(6)	1.40(1)
N(1)-N(2)	1.37(1)	C(5)-C(23)	1.50(1)
N(1)-C(1)	1.35(1)	C(6)-C(24)	1.49(1)
N(2)-C(3)	1.33(1)	C(7)-C(8)	1.37(1)
N(3)-N(4)	1.391(8)	C(7)-C(25)	1.49(1)

continua

N(3)-C(4)	1.34(1)	C(8)-C(9)	1.36(1)
N(4)-C(6)	1.34(1)	C(8)-C(26)	1.53(1)
N(5)-N(6)	1.363(8)	C(9)-C(27)	1.51(1)
N(5)-C(7)	1.347(9)	C(10)-C(11)	1.39(1)
N(6)-C(9)	1.34(1)	C(10)-C(28)	1.51(1)
N(7)-N(8)	1.37(1)	C(11)-C(12)	1.38(1)
N(7)-C(10)	1.33(1)	C(11)-C(29)	1.51(1)
N(8)-C(12)	1.34(1)	C(12)-C(30)	1.49(1)
N(9)-N(10)	1.38(1)	C(13)-C(14)	1.40(2)
N(9)-C(13)	1.33(1)	C(13)-C(31)	1.51(1)
N(10)-C(15)	1.35(1)	C(14)-C(15)	1.36(1)
N(11)-N(12)	1.35(1)	C(14)-C(32)	1.49(1)
N(11)-C(16)	1.36(1)	C(15)-C(33)	1.52(1)
N(12)-C(18)	1.34(1)	C(16)-C(17)	1.36(1)
C(1)-C(2)	1.38(1)	C(16)-C(34)	1.51(1)
C(1)-C(19)	1.49(1)	C(17)-C(18)	1.38(1)
C(2)-C(3)	1.38(1)	C(17)-C(35)	1.51(1)
C(2)-C(20)	1.51(1)	C(18)-C(36)	1.50(1)
		C(37)-C(38)	1.47(2)

Tabella VIII- Angoli e distanze di legame intorno a K per KTp^{*Mc}

Distanze di legame ^a		Angoli di legame ^b	
B(1)	3.923(9)	N(2)-K-N(4)	69.0(1)
N(1)	3.691(6)	N(2)-K-N(6)	68.5(1)
N(2)	2.894(6)	N(2)-K-N(7)	80.0(1)
N(3)	3.727(6)	N(2)-K-N(9)	138.3(2)
N(4)	2.967(6)	N(2)-K-N(12)	75.6(2)
N(5)	3.736(6)	N(4)-K-N(6)	68.4(1)
N(6)	3.022(6)	N(4)-K-N(7)	76.5(1)
N(7)	2.946(6)	N(4)-K-N(9)	78.0(1)
N(8)	3.371(6)	N(4)-K-N(12)	140.0(2)
N(9)	2.872(7)	N(6)-K-N(7)	139.1(1)
N(10)	3.404(7)	N(6)-K-N(9)	76.1(1)
N(11)	3.411(8)	N(6)-K-N(12)	82.0(1)
N(12)	2.852(7)	N(7)-K-N(9)	116.7(2)
		N(7)-K-N(12)	115.3(2)
		N(9)-K-N(12)	121.1(2)

^a In Å ^b In gradi sessagesimali.

Tabella IX - Confronto di fattori strutturali per i composti organostannici $R_nSnX_{4-n-1}Tp^{\delta}$

Tp^{δ}		Tp^{*Cl}	Tp^{*Cl}	Tp^{*Me}	Tp^*	Tp^*	Tp^{Me}	Tp	Tp
R		-	Ph	Me	-	Ph	Ph	-	Ph
n		0	1	1	0	2	1	0	2
Sn-N	(Å)	2.213	2.249	2.242	2.198	2.296	2.249	2.234	2.285
Sn-C	(Å)	-	2.140	2.244	-	2.164	2.228	-	2.168
Sn-Cl	(Å)	2.345	2.422	2.438	2.382	2.456	2.429	2.376	2.445
N-Sn-N	(°)	81.8	81.7	82	83.9	80.1	81.6	81.6	78.0
Cl-Sn-Cl	(°)	96.9	95.5	94.5	93.6	-	93.8	98.5	-
α	(°)	121.3	121.3	120.4	120.4	120.2	120.1	119.5	120.4
β	(°)	123.1	123.8	122.7	122.5	121.8	-	-	-
γ	(°)	125.4	124.9	123.1	123.7	123.3	125.1	-	-
Rif.		12	12	5	9	10	11	10	10

Tp^* è idrotris(3,5-dimetil-1H-pirazol-1-il)borato; Tp è idrotris(1H-pirazol-1-il)borato; Tp^{Me} è idrotris(3-metil-1H-pirazol-1-il)borato.

BIBLIOGRAFIA

1. BUCHENER, *Ber. Beut. Chem. Ges* 22 (1889), 842.
2. BALBIANO, *ibidem* 23 (1890), 1103, *ibidem* p 2165.
3. G. GIOIA LOBBIA, F. BONATI, P. CECCHI, A. LORENZOTTI, C. PETTINARI, *J. Organomet. Chem.* 403 (1991), 317.
4. G. GIOIA LOBBIA, S. CALOGERO, B. BOVIO, P. CECCHI, *J. Organomet. Chem.* 440 (1992), 27-40.
5. G. GIOIA LOBBIA, P. CECCHI, R. SPAGNA, M. COLAPIETRO, A. PIFFERI, C. PETTINARI, *J. Organomet. Chem.* 485 (1995), 45-53.
6. BONATI, *Gazz. Chim. Ital.* 119 (1989), 291.
7. LOPEZ, R.M. CLARAMUNT, D. SANZ, C. FOCES-FOCES, F.H. CANO, R. FAURE, E. CAYON, J. ELGUERO, *Inorg. Chim. Acta* 176 (1990), 195.
8. BONDI, *J. Physical Chemistry* 68 (1964), 441.
9. COLLINSON, D.R. EARDLEY, F.E. MABBS, K. RIGBY, M.A. BRUK, J.H. ENEMARK, P.A. WEXLER, *J. Chem. Soc., Dalton Trans.* 1003 (1994).
10. S. CALOGERO, L. STIEVANO, G. GIOIA LOBBIA, A. CINGOLANI, P. CECCHI, G. VALLE; *Poliedron* in stampa.
11. G. GIOIA LOBBIA, S. CALOGERO, B. BOVIO, P. CECCHI, *J. Organomet. Chem.* 27 (1992), 440.
12. G. GIOIA LOBBIA, P. CECCHI, S. CALOGERO, G. VALLE, M. CHIARINI, L. STIEVANO, *J. Organomet. Chem.* 503 (1995), 297-305.

A RECURSIVE ALGORITHM SUITABLE FOR REAL-TIME MEASUREMENT

Giovanni Bucci* , Antonietta Germano* , Carmine Landi*

ABSTRACT - This paper deals with a recursive algorithm suitable for real-time measurement applications, based on an indirect technique, useful in those applications where the required quantities cannot be measured in a straightforward way. To cope with time constraints a parallel formulation of it, suitable to be implemented on multiprocessor systems, is presented. The adopted concurrent implementation is based on factorization techniques. Some experimental results related to the application of the system for carrying out measurements on synchronous motors are included.

INTRODUCTION

The application of high performance intelligent instruments helps implement complex measurement algorithms, such as those allowing for the determination of the structure of a mathematical model (identification) of the system or for the measurement of the corresponding unknown parameters (estimation), starting from the input and output data.

These new instruments can be advantageously applied for the parameter estimation, as some recent tendencies have shown, which can be practically considered as an indirect measurement of quantities also non-accessible or some what ill-favoured in their accessibility (SYDENHAM-THORN [1]). The indirect measurement of some quantities, such as rotor currents in squirrel-cage induction motors, shaft speed in asynchronous motors, thrust in linear motors, etc., can be mentioned as examples of applications (SZTIPANOVITS [2]). Besides, it is well known that control and compensating strategies generally need a careful on-line estimation of electrical quantities, which cannot be directly measured (VAN DEN BOS-EYKHOFF [3], JAWORSKA-SZULC [4], BACCIGALUPI-LANDI-SCARANO [5], BUCCI-CECATI-ZHANG [6]).

The performance of the instrument is strictly related to that of the adopted algorithm. In the past the Kalman Filter theory has been successfully applied for signal processing and model identification in many fields (SORENSEN-

* Dip. Ing. Elettrica, Loc. Montelucio, 67040 L'Aquila.

ET ALT.[7]); the advantages of its application to the electrical drive field have been recently analysed by some authors both for the estimation of non measurable quantities (AMMAR-PIERTRZAK-DE FORNEL-MIRZAIANI [8], ATKINSON-ACARNLEY-FINCH [9]) and for the signal filtering in presence of harmonic distortion and noise (ANDRIA-SALVATORE [10]).

The applicability of such techniques to real-time signal processing problems is generally limited by the complexity of mathematical operations necessary in computing the estimation algorithm. The real-time requirements are often the most critical constraints, which impose to acquire the input signals and to execute the measurement algorithm with sufficient speed to ensure an appropriate response within the required time.

To cope with these constraints, the solution of increasing the computational power by replicating the processors and by running some tasks concurrently on different processors appears to be very promising. However the use of parallel systems allows one to gain advantages when the parallelism is obtained by decomposing the algorithm into a number of blocks which can be executed concurrently. The sequential structure of standard algorithms generally does not allow for an efficient implementation; a reformulation of them, implementing concurrent programming concepts, is then required.

In the paper a parallel architecture for the Kalman Filter, based on factorization techniques, which allows for fast computation and permits the numerical instability problems to be avoided, has been reported. The algorithm has been implemented on a multiprocessor measurement apparatus, based on the INMOS T414/T800 transputers, and has been applied for carrying out measurements on a synchronous motor. The obtained results are reported, showing the measurement algorithm performances in terms of speed and accuracy of the estimation.

THE PARALLEL EXTENDED KALMAN FILTER

The Kalman Filter has been shown to be the optimal linear estimator, in the least square sense, for dynamic linear systems (KALMAN [11]).

Consider a discrete-time linear stochastic system where a n-dimensional state process $\{X_k, k \geq 0\}$ and a p-dimensional measurement process $\{Y_k, k \geq 0\}$ are given by the stochastic difference equations (KALMAN [11]):

$$X_{k+1} = F_k X_k + G_k W_k \quad (1)$$

$$Y_k = H_k X_k + V_k \quad (2)$$

where: $\{W_k, k \geq 0\}$ and $\{V_k, k \geq 0\}$ are assumed to be independent white noise processes with zero mean and time-varying covariance matrices Q_k and R_k respectively;

F_k , G_k and H_k are known time-varying matrices of suitable dimensions.

Kalman Filter theory provides recursive formulae for the best linear last-square estimate $\hat{X}_{k|k}$ of the state variable X_k , given observations $[Y_0, Y_1, \dots, Y_k]$, and for error covariance matrices. As it is well known, the Kalman Filter equations are the following:

TIME UPDATE EQUATION:

$$\hat{X}_{k+1|k} = F_k \hat{X}_{k|k} \quad (3)$$

$$P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (4)$$

MEASUREMENT UPDATE EQUATIONS:

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_{k+1} e_{k+1} \quad (5)$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - P_{k+1|k} H_k^T R_{e,k}^{-1} H_k P_{k+1|k} \quad (6)$$

$$e_{k+1} = Y_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_{k+1|k} \quad (7)$$

$$R_{e,k} = H_k P_{k+1|k} H_k^T + R_k \quad (8)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_k^T R_{e,k}^{-1} \quad (9)$$

where: $P_{k|k} = E[X_k - \hat{X}_{k|k}][X_k - \hat{X}_{k|k}]^T$ is the filter error covariance matrix;

$P_{k+1|k} = E[X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k}][X_{k+1} - \hat{X}_{k+1|k}]^T$ is the prediction error covariance matrix;

$\{e_k, k \geq 0\}$ and $\{K_k, k \geq 0\}$ are the innovation and Kalman gain sequences respectively.

Nonlinear models can be solved by using the Extended Kalman Filter (EKF), which gives an approximate filter. It is based on the linearization, at each time instant, of the model equations around the best estimation of the system state currently available. The EKF equations system is identical to the Kalman Filter one, with F and H Jacobian matrices (state dependent) calculated as follows:

$$(F_k)_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_{k+1|k}) \quad i, j = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$(H_k)_{i,j} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\hat{x}_{k+1|k}) \quad i, j = 1, \dots, n \quad (11)$$

where n is the number of state variables.

In order to make the algorithm suitable to be implemented on a multiprocessor system, it is necessary to introduce a different formulation, which also allows numerical instability problems of the filter to be avoided.

Algorithms based on matrices block partitioning are particularly suited to parallel implementation and, in particular, methods involving square root matrix factorization have superior numerical properties (BIERMAN [12]). By adopting this solution, it is possible to reformulate the EKF factors update as a matrix triangularization problem (JOVER-KAILATH [13]).

In our case, the use of this technique appears particularly advantageous in calculating the equations (4) and (6), allowing the algorithm structure to be modified in order to implement it on a multiprocessor computing system. The time update equation (4) may be computed by using a suitable orthogonal transformation to triangularize the augmented matrix $[F_k P_{k|k}^{1/2} \quad G_k Q_k^{1/2}]$.

To avoid the computation of square root of matrices and minimize the execution time, we have used a slight modification (U replaced by L matrix) of the Modified Weighted Gram-Schmidt orthogonalization method (MWG-S) (THORNTON-BIERMAN [14]). This procedure consists in the orthogonalization of n linearly independent vectors $w_1, \dots, w_n$ with respect to the weighted norm $\|w_j\|^2 = \sum_{k=1}^N D_k w_j(k)^2$ where N is vectors dimension and $j=1, \dots, n$.

$$\text{If we define: } \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} = [FL^+ \quad G] \quad (12)$$

$$D = \text{diag}(D_+ \quad Q) = \text{diag}(D_1 \dots D_N) \quad (13)$$

by using MWG-S algorithm and starting from the L-D factors of $P_{k|k}$, we can directly obtain the L-D factors of $P_{k+1|k}$, which in turn are used to calculate the measurement update equations.

In particular, to calculate the measurement update equation (6) the Modified Givens transformation introduced by GENTLEMAN [15] appears to be a good solution in terms of numerical stability and execution speed. The method consists in defining elementary orthogonal transformations Θ_D which allow any given vector $[p_1 \quad p_2]$ to be rotated to lie along $[1 \quad 0]$, keeping equality of weighted norms, that is:

$$[p_1 \quad p_2] \begin{bmatrix} d_{p1} & 0 \\ 0 & d_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} d_{q1} & 0 \\ 0 & d_{q2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

In most problems d_{p1} and d_{p2} are known but d_{q1} and d_{q2} have to be determined after the matrix Θ_D has been defined. If we choose:

$$\Theta_D = \begin{bmatrix} \frac{p_1 d_{p1}}{d_{q1}} & \frac{p_2 d_{p2}}{d_{q1}} \\ -p_2 & p_1 \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

after some algebraic manipulations, we obtain:

$$d_{q1} = p_1^2 d_{p1} + p_2^2 d_{p2} \quad (16)$$

$$d_{q2} = \frac{d_{p1} d_{p2}}{d_{q1}} \quad (17)$$

The above transformation Θ_D , applied to an arbitrary vector $[p'_1 \ p'_2]$, allows one to obtain a vector $[q'_1 \ q'_2]$ where:

$$q'_2 = -p_2 p'_1 + p_1 p'_2 \quad (18)$$

$$q'_1 = \frac{d_{p1}}{d_{q1}} p_1 p'_1 + \frac{d_{p2}}{d_{q1}} p_2 p'_2 \quad (19)$$

By systematically applying a sequence of such elementary transformations it is possible to triangularize any given matrix. In our case the use of the above method allows the factors L-D (unit lower triangular and diagonal) of the matrix $P_{k+1|k+1}$ to be obtained from the ones of the matrix $P_{k+1|k}$, according to the following transformation:

$$\begin{bmatrix} L_R & HL \\ 0 & L \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} L_{Re} & 0 \\ KL_{Re} & L_+ \end{bmatrix} \quad (20)$$

where:

Θ is the product of the elementary matrices Θ_D ;

L_+ , L , L_R and L_{Re} are lower triangular unit diagonal matrices such that

$P_{k+1|k+1} = L_+ D L_+^T$, $P_{k+1|k} = L D L^T$, $R_{kk} = L_R D_R L_R^T$ and $R_{ek} = L_{Re} D_{Re} L_{Re}^T$.

The method above, using Gentleman's square root free Givens rotation, may be seen to be equivalent to Bierman's U-D method for the case of scalar ents (BIERMAN [16]).

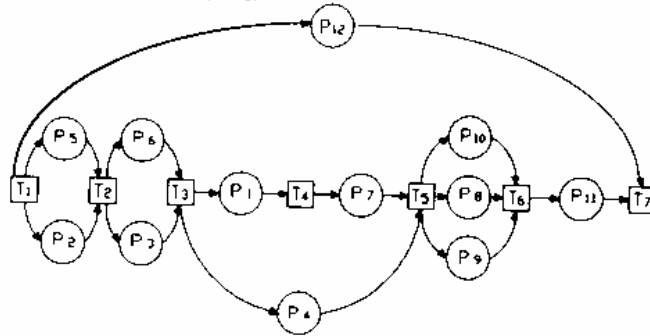


Fig.1 - Synchronization graph of the PEKF

The Parallel Extended Kalman Filter (PEKF) has been structured defining some elementary processes, $(P_1...P_{12})$, whose priority levels have been analyzed in order to synchronize their activities (BUCCI-GERMANO-TOFONI [17]). The synchronization graph, reported in Fig.1, has been used to represent processes and their time constraints; the circles, labelled as P_i , represent processes in execution and boxes, labelled as T_i , represent time constraints. Each process, starting at time T_i , must be executed before T_{i+1} ; concurrent processes generally require different execution times but they are synchronized by the final time constraint T_{i+1} . Processes which start from a synchronization point T_i generally use the results of processes which terminate before T_i .

THE MEASUREMENT APPARATUS

The proposed algorithm is suitable for implementation on a multiprocessor system. For the aim of investigating its performance, an actual measurement apparatus, composed by a signal processing unit and two acquisition sections (BUCCI-GERMANO-LANDI [18]), has been adopted.

The signal processing unit, a transputer network, allows measurement results to be obtained in real-time; it adopts a personal computer PC-AT both as host computer and user interface. The transputer network is composed, in its full extension, by an array of eight IMS T800 transputers. The network topology can be changed dynamically depending on the process requirements. In order to acquire signals with high and low dynamic two input sections have been implemented: the first one is connected via link adaptors and the second one makes use of the transputer external memory bus (BUCCI-GERMANO-LANDI [18], [19]).

The measurable quantities are caught from the object under test and then converted in numerical form by means of ADC sections. The samples, coming from the acquisition and conversion section, are elaborated on-line by the processing unit. The output quantities are then estimated by solving the equations relative to the model of the system under measurement.

APPLICATION

The knowledge of the instantaneous position of the rotor in a permanent magnet synchronous motor (PMSM) is needed to control the stator phase currents and the torque. It also allows a position or a speed controller to be implemented. An estimation of rotor position, starting from measurements of stator voltages and currents, allows the electro-mechanical sensor (encoder or resolver) to be removed, increasing the reliability and reducing the maintenance costs.

For better clarity in Fig.2 the block diagram of a PMSM drive is reported.

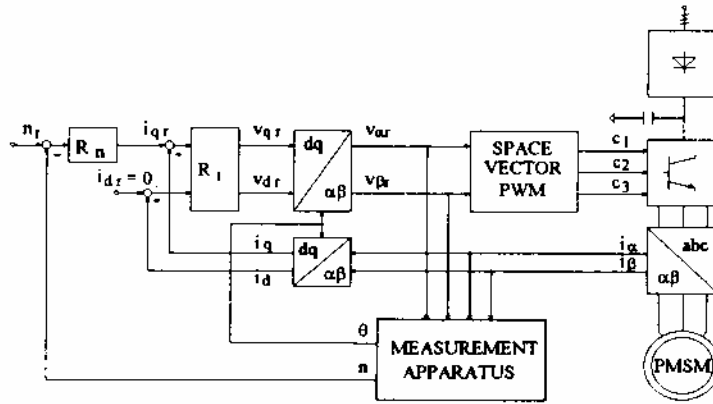


Fig.2 - Block diagram of a magnet permanent synchronous motor drive

The motor is fed by a PWM inverter whose switch command signals (c_1 - c_3) are generated by the controller blocks, adopting a space vector modulation strategy. The estimated rotor speed (n) and position (θ) are used as feedback signals for the controller. The speed controller generates the q-axis current reference i_{qr} (the torque reference), while the d-axis current reference i_{dr} is set to zero. A d-q transformation is applied in order to convert the measured values i_α and i_β into the d-q components i_d and i_q . The motor model is derived by taking the stator-fixed reference frame (α, β), assuming the currents i_α and i_β , the rotor speed n and the rotor position θ as state variables. In this case, denoting by:

$T_m = J\omega_b / pM_b$ the mechanical time constant;	r_s the stator resistance;
J the equivalent inertia;	x_s the stator reactance;
ω_b the angular frequency;	m_r the load torque;
p the pole pairs;	v_a, v_b the stator voltage a-b components;
M_b the reference value torque;	

the state space model assumes the following form:

$$X_k = [i_\alpha \ i_\beta \ n \ \theta]^T \quad (21)$$

$$f(X_k) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{T r_s \omega_b}{x_s}\right) i_\alpha(k) + \frac{T \omega_b}{x_s} n(k) \sin \theta(k) + \frac{T \omega_b}{x_s} v_\alpha(k) \\ \left(1 - \frac{T r_s \omega_b}{x_s}\right) i_\beta(k) - \frac{T \omega_b}{x_s} n(k) \cos \theta(k) + \frac{T \omega_b}{x_s} v_\beta(k) \\ -\frac{T}{T_m} i_\alpha(k) \sin \theta(k) + \frac{T}{T_m} i_\beta(k) \cos \theta(k) + n(k) - \frac{m_r T}{T_m} \\ T \omega_b n(k) + \theta(k) \end{bmatrix} \quad (22)$$

The observation equation is:

$$Y_k = [i_{\alpha}(k) \quad i_{\beta}(k)]^T + V_k \quad (23)$$

where the random vector V_k models measurement uncertainties.

The high speed of execution and the parametric variation sensitivity are critical aspects for the EKF application to the position and speed estimation. The performance of the proposed estimation algorithm has been analysed not only in the standard working conditions, but during critical states of the system too, as when the motor starts up or runs at low speed or when the load changes suddenly.

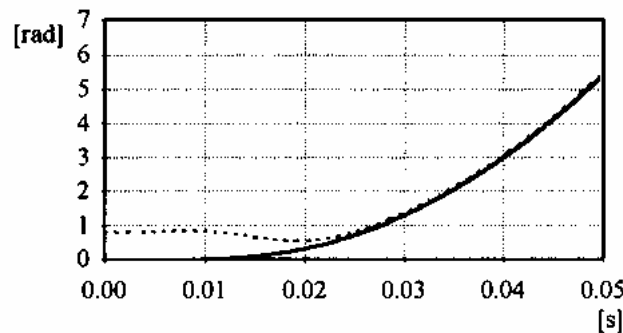


Fig.3 - Rotor position estimation at start-up

As an example, in Fig.3 the rotor position estimation (dashed line), directly compared to the actual value, has been reported during the start-up state of the motor. In order to analyze the effect of the uncertainty relative to the initial rotor position on the control system performance, an error (up to $\pi/4$ rad) has been supposed on the initial value of θ . As can be seen, the filter is still able to track the system state and after a brief transient (about 0.02 s) the estimation converges to the true value. In this case in the steady state the estimation error is lower than 0.1 rad.

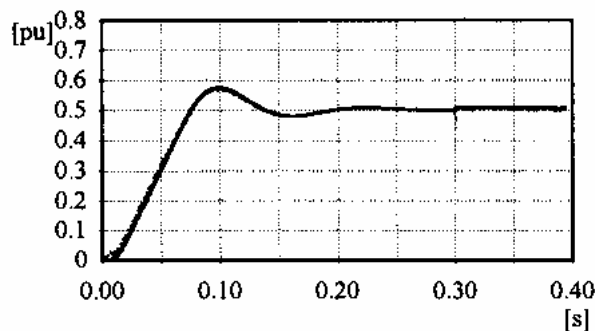


Fig.4 - Rotor speed estimation during a transient

The Fig.4 reports the estimated and actual rotor speed during a load variation ($m_r=0.7$ p.u. and $m_r=0.1$) and at low speed. As can be seen, the filter is insensible to the parametric variations due to load and the estimated

quantities perfectly track the dynamic of the system, following its changes quickly. In this case the estimation error is lower than 0.007 at $m_r=0.1$ p.u. and equal to 0.002 at $m_r=0.7$ p.u. However in this case a lower limit on the speed has been observed: if the reference speed falls to lower values than 0.5 p.u., the relative estimation error becomes unacceptable and, in this case, the filter cannot be applied in the control of the machine. When a speed lower than 0.5 p.u. is required, it is the authors' opinion that a better tuning of the filter allows the estimation error to be significantly reduced, so making it possible to extend the lower bound of applicability range.

CONCLUSIONS

In this paper the authors have presented a recursive algorithm suitable for on-line applications, such as the indirect measurement of quantities which are either non-accessible or ill-favoured in their accessibility. The measuring algorithm, a concurrent implementation of the Extend Kalman Filter, is based on factorization methods, which allow the algorithm structure to be modified in order to adopt a multiprocessor computing system. The PEKF performance has been tested in the estimation of speed and rotor position of a synchronous motor. The obtained results show a high accuracy and a good speed of convergence of estimation and confirm the effectiveness of the proposed algorithm.

ACKNOWLEDGEMENT

The authors wish to express their appreciation to Prof. Nicola Rotondale for his many useful suggestions during the development of these results.

REFERENCES

1. P.H.SYDENHAM, R.THORN, *Handbook of Measurement Science*, Vol. 3, John Wiley & Sons Ltd., 1992, pp.1923-1945.
2. J.SZTIPANOVITS, *Intelligent Instruments*, in *Measurement*, Vol. 7, No. 3, Jul-Sep 1989, pp. 98-108.
3. A.VAN DEN BOS, P.EYKHOFF, *Model Building and Parameter Estimation as Means for Intelligent Measurement*, in *Measurement* Vol.6, No. 1, Jan-Mar 1988, pp.25-32.
4. I.JAWORSKA, Z.SZULC, *A Measurement Technique for the Output Power in a Drive Motor System*, in *Measurement*, Vol. 8, No. 2, April 1990.
5. A.BACCIGALUPI, C.LANDI, M.SCARANO, *Indirect Measurement Techniques for Rotor Currents in Asynchronous Motors*, in *Proc. of ICEM '90*, Boston, Aug. 1990.

6. G.BUCCI, C.CECATI, D.Q.ZHANG, *Real-Time Implementation of Fault Detection and Control Algorithms on Electrical Drives*, in Proc. of EPE'91, Florence (I), Sept., 1991.
7. H.W.SORENSEN ET AL. *Special Issue on Applications of Kalman Filtering*, in IEEE Trans. on Automatic Control, V.AC-28, N.3.
8. F.B.AMMAR, M.PIERTRZAK, B.DE FORNEL, A.MIRZAIANI, *Field Oriented Control of High Power Induction Motor Drives by Kalman Filter Flux Observation*, Proc. of EPE'91, V.2, Florence (I), Sept. 1991.
9. D.J.ATKINSON, P.P.ACARNLEY, J.W.FINCH, *Method For The Estimation of Rotor Resistance in Induction Motors*, in Proc. of EPE'91, Florence (I), Sept. 1991.
10. G.ANDRIA, L.SALVATORE, *Inverter Drive Signal Processing Via DFT and EKF*, in IEE Proc. Vol. 137, Pt. B, No. 2, pp. 111-119.
11. R.E.KALMAN, *New Methods in Wiener Filtering Theory*, in Proc. of 1st Symp. Eng. Appl. Random Function Theory Probability, (J.L.Bogdanoff and F.Kozin eds), pp. 270-388, Wiley, New York, 1963.
12. J.G.BIERMAN, *Factorization Method for Discrete Sequential Estimation*, Academic Press, New York, 1977.
13. J.M.JOVER, T.KAILATH, *A Parallel Architecture for Kalman Filter Measurement Update and Parameter Estimation*, in Automatica, 22 (1), pp. 43-57, 1986.
14. C.L.THORNTON, G.J.BIERMAN, *Gram-Schmidt Algorithms for Covariance Propagation*, in Proc. of IEEE Conf. on Decision and Control, Houston (Texas), pp. 489-498, 1975.
15. W.M.GENTLEMAN, *Least Squares Computations by Givens Transformations Without Square Roots*, in J. Inst. Math. Appl., 12, 1973.
16. J.G.BIERMAN, *Measurement Updating Using the U-D Factorization*, in Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Houston (Texas), pp.337-346, 1975.
17. G.BUCCI, A.GERMANO, T.TOFONI, *Parallel Implementation of Kalman Filter with Application to Measurement on Electrical Drives*, Transactions of The Institute of Measurement and Control, Vol. 16 N. 2, 1994, pp.108-116.
18. G.BUCCI, A.GERMANO, C.LANDI, *Measuring Systems With Parallel Architecture For Electrical Drives*, in Proc. of 1st Europ. Conf. on Reliability, Standard. and Certif. on El. Drives, Milano (I), 25-27 May 1992.
19. G.BUCCI, A.GERMANO, C.LANDI, *Real-Time Transputer-Based Measurement Apparatus: Performance Testing*, in Proc. of IMTC/93, Irvine, California, May 1993.

QUASI-CONCAVITY PROPERTY OF MULTIVARIATE DISTRIBUTION FUNCTIONS

Luisa Tibiletti*

SUNTO - Si individuano condizioni sufficienti per garantire le proprietà di quasi-concavità per le funzioni di ripartizione multidimensionali. Si prova che la maggior parte delle distribuzioni ellittiche hanno funzione di ripartizione quasi-concava. Attraverso la caratterizzazione della copula altre famiglie di distribuzioni sono individuate. Alcune disuguaglianze probabilistiche sono infine messe in luce.

ABSTRACT - Conditions under which multivariate distribution functions are quasi-concave, are explored. We prove that many elliptically contoured distributions have quasi-concave distribution functions. By some characterisations of the copula, further classes are provided. A few probability inequalities are also suggested.

KEYWORDS - Elliptically contoured distributions, Archimedean copula, quasi-concavity conditions.

1. INTRODUCTION**

Many studies have been devoted to search for concavity properties of n -dimensional ($n \geq 2$) distribution functions (see TONG [17], IYENGAR-

* Dipartimento di Statistica e Matematica applicata alle scienze umane "Diego de Castro", Università di Torino, Piazza Arbarello 8, I-10122 Torino, Tel. +39-11-546805, fax +39-11-544004.

** *Acknowledgments*

The Author wishes to thank Luigi Montrucchio and Lorenzo Peccati for some valuable suggestions and comments. Obviously, she is completely responsible for any remaining error.

TONG [7], MARSHALL-OLKIN [10], TIBILETTI [14]).

In this note we restrict our attention to the quasi-concavity property. It is known that not all the n -dimensional ($n \geq 2$) distribution functions are quasi-concave (see TIBILETTI [14]). The aim of the present paper is to point out families of distributions which satisfy this property and to extend TIBILETTI [14]'s results.

The plan of this paper is as follows. In section 1 we prove that the distribution functions of a number of elliptical random vectors are quasi-concave. In Section 2 we consider distribution functions with elliptical and Archimedean copulas. Under some assumptions on one-dimensional marginals, their quasi-concavity is showed. In Section 3 a few probability inequalities for differentiable distribution functions are provided.

2. NOTATION AND PRELIMINARIES

Given the random vector $X = \{X_1, \dots, X_n\}$, we denote by

$$F(x) = \Pr \left[\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x_i) \right]$$

the joint distribution function of X and by

$$F_i(x_i) = \Pr(X_i \leq x_i)$$

the one-dimensional marginal associated to the random variable X_i .

Our purpose is to investigate whether F is quasi-concave, *i.e.*,

$$F(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min[F(x); F(y)] \quad (1)$$

holds for all $x, y \in \mathbb{R}^n$ and $0 \leq \alpha \leq 1$.

Condition (1) is equivalent to requiring that upper-level sets of F

$$U_q = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \geq q\}$$

are convex for all real q .

3. QUASI-CONCAVITY FOR ELLIPTICAL DISTRIBUTION FUNCTIONS

Let us recall the definition of elliptically contoured distribution.

Definition 1: Let Σ denote a $n \times n$ positive definite matrix. A random vector X is said to have an *elliptically contoured distribution* if its density function is of the form (with respect to Lebesgue measure)

$$f(x) = |\Sigma|^{-1/2} g(x' \Sigma^{-1} x), x \in \mathfrak{R}^n \quad (2)$$

where g satisfies

$$\int_0^\infty r^{n-1} g(r^2) dr < \infty$$

g is also called a density generator.

Multivariate normal distributions are the best-known ellipticals. For these, $g(s) \propto \exp(-s/2)$. Many other types are also possible. For example, the multivariate student t distribution with ν of freedom is characterised by $g(s) \propto (\nu + s)^{-(n+\nu)/2}$.

It is worth pointing out that any linear combination of elliptical variates is still elliptical (more details are given in FANG *et al.* [3]), and in virtue of this property the use of these distributions is very common in the Portfolio Theory (see, for example, INGERSOLL [8]).

Below we will confine our attention to the class of elliptical distributions such that

- a. the support of the density f is unbounded;
- b. the density generator g is a continuous function on $\mathfrak{R}$;
- c. the correlation matrix exists (consequently, it is proportional to Σ).

We need of the following proposition to prove Theorem 1.

Proposition 1. Let $T = (t_{ij})$ be the correlation matrix of X . If $t_{ij} = \max$ correlation between (X_i, X_j) for all $i, j = 1, \dots, n$, then F is quasi-concave.

Proof. Since $t_{ij} = \max$ correlation (X_i, X_j) for all $i, j = 1, \dots, n$, each of $X_1, \dots, X_n$ is almost surely a strictly increasing function of any of the others.

A property of distribution functions leads to

$$F(x) = \text{Min}[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)],$$

(for $n = 2$ the result is due to FRÉCHET [4], for $n > 2$ see SCHWEIZER-SKLAR [12]). Thus, it follows that

$$U_q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq F_1^{-1}(q), \dots, x_n \geq F_n^{-1}(q) \right\},$$

where $F_i^{-1}, i = 1, \dots, n$ are the quantile functions. Since U_q is convex for all q , F turns out to be quasi-concave and this completes the proof.

Theorem 1. *Let X have an elliptically contoured distribution with assumptions a.b.c. Then F is quasi-concave.*

Proof. Define the matrix

$$S_\vartheta = (1 - \vartheta)R + \vartheta T, \quad \vartheta \in [0, 1]$$

where $R = (r_{ij})$ is the positive definite correlation matrix of F and $T = (t_{ij})$ is a matrix with entries $t_{ij} = \max$ correlation (X_i, X_j) for all $i, j = 1, \dots, n$. Construct the distribution function F_ϑ having the same density generator of F and correlation matrix S_ϑ . Let

$$A = \{ \vartheta \in [0, 1] : F_\vartheta \text{ is not quasi-concave} \}.$$

Suppose *ad absurdum* that A be not empty. Denote

$$\vartheta^* = \sup A.$$

By Proposition 1., it results $\vartheta^* < 1$. Since F_{ϑ^*} is not quasi concave, there exist $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$ (depending on ϑ^*), such that

$$\text{Min}[F_{\vartheta^*}(x); F_{\vartheta^*}(y)] = q. \quad (3)$$

and

$$F_{\vartheta^*}(\alpha x + (1 - \alpha)y) < q.$$

Note that for all $\vartheta > \vartheta^*$, we have

$$s_{ij} \leq s_{ij}^* \text{ and } s_{ij} < s_{ij}^* \text{ holds for some } i, j \quad (4)$$

where $S_\vartheta = (s_{ij})$ and $S_{\vartheta^*} = (s_{ij}^*)$. In virtue of the assumption a and inequalities (4), we can apply a generalisation of Slepian's inequality due to DAS GUPTA, *et al.* [2] (as reported in TONG [16]), which gets¹

$$F_\vartheta > F_{\vartheta^*} \text{ for all } \vartheta > \vartheta^*,$$

so we have

$$\text{Min}[F_{\vartheta^*}(x); F_{\vartheta^*}(y)] > q, \text{ for all } \vartheta > \vartheta^*.$$

Since F_ϑ is quasi-concave, it results

$$F_\vartheta(\alpha x + (1-\alpha)y) > q, \text{ for all } \vartheta > \vartheta^* \quad (5)$$

Combining (3) and (5), it follows that $h(\vartheta) = F_\vartheta(\alpha x + (1-\alpha)y)$ is *not* a continuous function in ϑ^* . Nevertheless, assumption b guarantees the continuity of $h(\vartheta)$ on $[0, 1]$, which contradicts the above statement.

4. FURTHER CLASSES OF QUASI-CONCAVE DISTRIBUTION FUNCTIONS

In this section we propose a way to characterise other quasi-concave distributions. These results are related to the property of the copula (the notion was introduced by SKLAR [13], for a historical overview, the reader can refer to SCHWEIZER [11]). Copulas are functions that link multivariate distributions to their one-dimensional marginals $F_i, i = 1, \dots, n$, then there exists a continuous copula C such that

$$F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \text{ for all } x \in \mathfrak{R}^n,$$

¹ Strictly inequality is guaranteed by assumption a. (see, for example, Tong [16], Th. 4.3.6, page 74).

where C is a distribution function concentrated on the unit n -cube I^n , $I = [0, 1]$ with uniform marginals.

Our investigation will be carried out in two steps: (1) we point out classes of quasi-concave copulas, (2) we specify additional conditions on one-dimensional marginals to guarantee the quasi-concavity of F .

4.1 ELLIPTICAL AND ARCHIMEDEAN COPULAS

The result reached from Theorem 1 suggests a definition of a new class of copulas denoted by Ψ .

Definition 2. Let C be a copula. If there exist one-dimensional marginals $F_1, \dots, F_n$ such that

$$F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \text{ for all } x \in \mathbb{R}^n$$

is an elliptical distribution function which satisfies a.-b.-c. then $C \in \Psi$.

We have the following :

Proposition 2. If $C \in \Psi$, then C is a quasi-concave function.

The proof is omitted, because is quite similar to that of Theorem 1 (see also TIBILETTI [15]).

We consider now the Archimedean copulas. We recall their definition.

Definition 3. Let C be continuous copula such that

$$C(u) = \varphi^{-1}[\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)]$$

for some real function φ . Then C is called an *Archimedean copula*.

Note that in order that C be a copula, φ^{-1} has to be completely monotone, i.e.,

$$(-1)^k \frac{d^k \varphi^{-1}(t)}{d^k t} \geq 0, \text{ for all } k \geq 0, \quad (6)$$

(see SCHWEIZER-SKLAR [12], Theorem 6.3.6).

Proposition 3. If C is an Archimedean copula, then it is quasi-concave.

Proof. From condition (6), it follows that φ is convex. Thus, $H(u) = \varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)$ is convex, too. Since φ^{-1} is nonincreasing, the

composite function $C(u) = \varphi^{-1}(H(u))$ turns out to be quasi-concave (MANGASARIAN [9]).

Distributions with Archimedean copulas have been thoroughly investigated in the literature and many families have been defined. For instance, we recall those of Gumel, Cook-Johnson, Frank, Plankett and Mardia (for details see GENEST [5], GENEST-MacKAY [6]).

4.2 ADDITIONAL CONDITIONS ON ONE-DIMENSIONAL MARGINALS

Quasi-concavity of the copula does *not* guarantee the quasi-concavity of the distribution function (for a counter-example see TIBILETTI [14]). Additional conditions on marginals have to be added. We list two of them.

Proposition 4. (Tibiletti [14]) *Let F be a distribution function with a quasi-concave copula. If its one-dimensional marginal F_i is concave on the interval $[a_i, b_i], i = 1, \dots, n$, then F is quasi-concave on $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.*

Proposition 5. *Let F be a distribution function with copula C and continuous marginals $F_i, i = 1, \dots, n$. If there exist real functions $\Phi_i, i = 1, \dots, n$ such that $H = C(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ is an elliptical distribution function, and $\Phi_i^{-1}(F_i)$ is concave² on $[a_i, b_i], i = 1, \dots, n$ then F is quasi-concave on $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.*

Proof. Note that

$$F = C(F_1, \dots, F_n) = C(\Phi_1(\Phi_1^{-1}F_1), \dots, \Phi_n(\Phi_n^{-1}F_n)).$$

From Theorem 1, $H = C(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ is quasi-concave. Since $\Phi_i^{-1}(F_i), i = 1, \dots, n$ are concave, it follows that F is quasi-concave (see, for example, AVRIEL *et al.* [1]).

5. A FEW PROBABILITY INEQUALITIES

Consider now differentiable distributions³. Quasi-concavity of F yields some inequalities involving its marginals and conditional distributions. Denote by

² We denote by Φ_i^{-1} a quasi-inverse of Φ_i .

³ Obviously, if the density is continuous, then its distribution function is once-differentiable.

f_i the marginal density of X_i , by $f(\cdot|x_i)$ and $F(\cdot|x_i)$ the conditional density and distribution function of $X = (X_1, \dots, X_n)$ given $X_i = x_i$ ($i = 1, \dots, n$). It is straightforward to prove the following:

Proposition 6. *Let F be once-differentiable on the open convex set $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Then F is quasi-concave iff for every $x, y \in A$*

$$F(x) \geq F(y) \text{ implies that } (y-x)\nabla F(x) \geq 0 \quad (7)$$

where ∇F is the gradient of F and

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i(x) F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n | x_i). \quad (8)$$

Proof. Condition (7) is obvious, see, for example, AVRIEL *et al.* [1]. And (8) comes out by straightforward calculations.

Condition (7) is not trivial to verify. Therefore, its use for checking whether or not F is quasi-concave could not be easy. Alternatively, it could be profitable to use (7) in the reversed way. In fact, if we know that F is quasi-concave then (7) may produces some not trivial inequalities. For sake of simplicity, let $n = 2$. The right-hand side of (7) becomes

$$(y_1 - x_1)f_1(x_1)F(x_2|x_1) + (y_2 - x_2)f_2(x_2)F(x_1|x_2) \geq 0 \quad (9)$$

For example, if F is elliptical (9) can be rewritten in an explicit form (see, for example, TONG [17] for elliptical marginal and conditional probability for $n \geq 2$). An inequality which stems from (9) is stated below.

Proposition 7. *Let F be elliptical and satisfy a.-b.-c. If X_i has median μ_i and variance σ_i^2 , $i=1,2$, then*

$$F(\mu) \geq F(x) \text{ implies } \mu \frac{1}{\sigma_1} x_1 + \frac{\mu_2}{\sigma_2} x_2 \geq 0 \quad (10)$$

where $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ and $x = (x_1, x_2)$.

Proof. Straightforward calculations show that

$$f_i(\mu_i) = g(0)/\sigma_i \text{ and } F(\mu_j|\mu_i) = F(\mu_i|\mu_j)$$

where g is the density generator of F . By Theorem 1, F is quasi-concave, therefore (9) holds. Imposing $y = \mu$, our claim comes out.

Remark. Condition (10) is trivial whenever $\mu_1 \geq x_1$ and $\mu_2 \geq x_2$. On the contrary, if $\mu_1 \geq x_1$ and $\mu_2 \leq x_2$, it gives a condition on the "distance" between the vector μ of the medians and the vector x (see TIBILETTI [15]).

REFERENCES

1. M. AVRIEL, W. DIEWERT, S. SCHAIBLE, *Generalized Concavity*, Plenum Press, New York, 1988.
2. S. DAS GUPTA, M.L. EATON, L. OLKIN, M.D. PERLMAN, L.J. SAVAGE, L. SOBEL, *Inequalities on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., 2, (LeCam L.M., Neyman J., Scott E.L., eds.), Univ. of California, (1972), 241-265.
3. K.T. FANG, S. KOTZ, K.W. NG, *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, London, 1990.
4. M. FRÉCHET, *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*, Annales de l'Université de Lyon, Sec. A, (1951), 3-77.
5. C. GENEST, *Frank's family of bivariate distributions*, Biometrika, 74, 3, (1987), 549-555.
6. C. GENEST, R.J. MacKAY, *Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données*, The Canadian Journal of Statistics, 14, 2, (1986), 145-159.
7. S. IYENGAR, Y.L. TONG, *Convexity properties of elliptically contoured distributions with applications*, Sankhyā, 51, Series A, Pt. 1, (1989), 13-29.
8. J. INGERSOLL, *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield Publisher, New York, 1987.
9. O.L. MANGASARIAN, *Convexity, quasi-convexity and quasi-convexity of composite functions*, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, 12, (1970), 114-122. Reprinted in *Stochastic Optimization Models in Finance*, edited by Ziemba W.T. and Vickson R.G., Academic Press, New York, (1975).
10. A.W. MARSHALL, I. OLKIN, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, 1979.
11. B. SCHWEIZER, *Thirty years of copulas*, in G. Dall'Aglio, S. Kotz and G. Salinetti, *Advances in Probability Distributions with Given Marginals*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
12. B. SCHWEIZER, A. SKLAR, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York, 1983.
13. A. SKLAR, *Fonctions de répartition à n-dimensions et leur marges*, Inst. Statist. Univ. Paris Publ., 8, (1959), 229-231.

14. L. TIBILETTI, *Sulla quasi-concavità delle funzioni di ripartizione n -dimensionali*, Atti del XV Convegno AMASES, Grado, Italy, Sept., (1991), 26-29.
15. L. TIBILETTI, *On a new notion of multidimensional quantile*, Metron, vol. LI, n.3-4, (1993), 73-83.
16. Y.L. TONG, *Probability inequalities in multivariate distributions*, Academic Press, Inc., New York, 1980.
17. Y.L. TONG, *The Multivariate Normal Distribution*, Springer-Verlag, New York, 1990.

LA PROGRAMMAZIONE DELLA SPERIMENTAZIONE NELLO SVILUPPO DEI PROCESSI CHIMICI

Francesco Vegliò*

SUNTO - Nel presente lavoro sono mostrati i vantaggi che si possono ottenere, pianificando e realizzando una sperimentazione secondo i principi della sperimentazione fattoriale. In particolare vengono messi in evidenza i criteri generali per la realizzazione di una sperimentazione fattoriale completa e frazionata. Viene inoltre mostrato un esempio applicativo di fattoriale frazionato, riguardante uno studio di ottimizzazione di un terreno colturale, nel biolcaching di un minerale manganifero di interesse industriale.

ABSTRACT - In the present paper the main advantages obtained in the planning of experimental tests by using factorial design are shown. In particular the general criteria to perform a full and fractional factorial experiments are highlighted. A biotechnological application, regarding an optimisation study of a cultural media in the bioleaching of a manganiferous mineral of industrial interest, is shown as an example.

* Dipartimento di Chimica, Ing. Chimica e Mat., Università de L'Aquila

INTRODUZIONE

Le ricerche industriali hanno quasi sempre come oggetto la determinazione dell'effetto di una o più variabili in diverse gradazioni quantitative o qualitative (variabili indipendenti o fattori) su una o più grandezze di interesse, come qualità di un prodotto, rendimento di processo, costo, etc. (variabili dipendenti) [12-24].

L'esecuzione di un piano di prove risulta generalmente finalizzato alla identificazione di condizioni e proprietà ottimali di un determinato processo/prodotto, all'interno degli intervalli prescelti delle variabili indipendenti. Risulta rilevante l'importanza che assume nella ricerca industriale la valutazione della significatività in senso statistico. Infatti il ricorso a metodi statistici, è reso necessario dall'inevitabile dispersione associata alle misure sperimentali.

Una sperimentazione industriale, per la definizione ed ottimizzazione dei processi/prodotti, deve, il più delle volte, essere eseguita in quanto generalmente la conoscenza delle relazioni che intercorrono tra le variabili indipendenti e dipendenti risulta inadeguata.

Le tecniche statistiche che vengono impiegate nella analisi e nella conduzione di processi industriali, sono classificate in un settore culturalmente specifico di "Controllo Statistico di Processo (SPC)" [4].

Tali tecniche comprendono fra le altre:

- disegni fattoriali completi e frazionati [20];
- metodi di definizione ed analisi della superficie di risposta [1,13];
- analisi multivariata [5-7];
- analisi delle serie temporali;
- disegni di Taguchi [11];
- etc.

E' importante sottolineare che la SPC non risulta una metodologia efficiente senza un livello minimo di conoscenza del processo.

Tra le tecniche statistiche per il controllo di processo (ad esempio per l'ottenimento della qualità) assumono particolare importanza le tecniche di *design* sperimentale (DOE).

In particolare, verranno analizzate nel seguito le procedure statistico-matematiche legate alla definizione ed il trattamento dei dati, relative all'utilizzo di *factorial designs*. Esistono altre tecniche come ad es. il metodo della superficie di risposta di Box ed i metodi di Taguchi [11,13] che non verranno qui trattate.

Le tecniche dell' *Experimental Design* permettono di minimizzare il numero di prove massimizzando il contenuto di informazioni statisticamente significative da esse ricavabili.

In alternativa alla procedura sopra menzionata, sopravvive, un approccio sperimentale che risulta essere ancora ampiamente usato nella pianificazione di esperimenti, considerati nel senso piu' ampio del termine, e cioe ' quella di *One-at time Procedure* [1]: viene definito un piano sperimentale in cui l' effetto di un fattore viene valutato variando i livelli di quest'ultimo, tenendo costanti i livelli di tutti gli altri fattori coinvolti nella ricerca.

Questo metodo, com'e' noto, non garantisce il raggiungimento di condizioni ottimali. Infatti, come e' possibile constatare dalla figura 1, con la procedura di variare un fattore alla volta, generalmente non si arriva alla determinazione dell' ottimo, e comunque, se cio' verra' ottenuto, tale condizione non sara' stata raggiunta in maniera efficiente ma con notevole dispendio di numero di prove [1, 13].

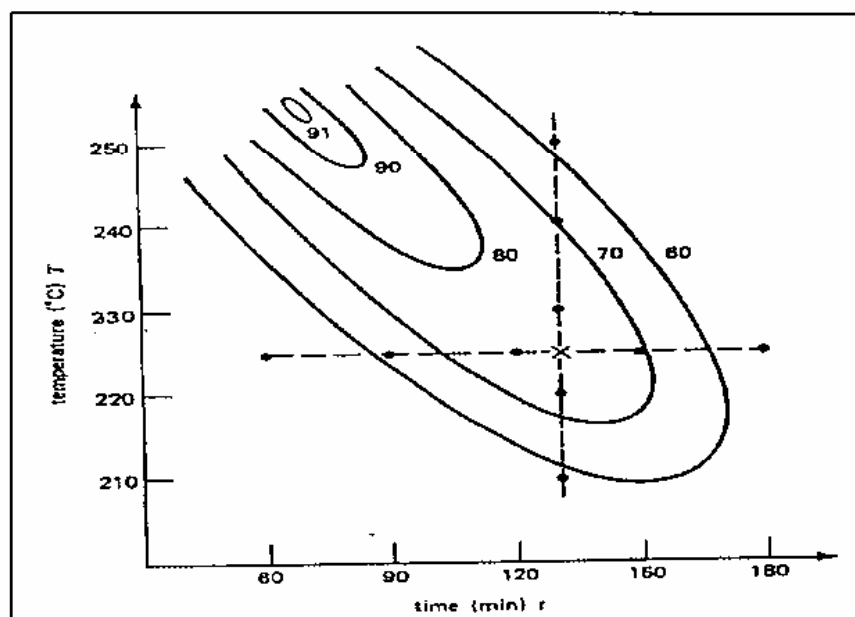


Fig.1 - Resa di reazione in funzione di temperatura e tempo di reazione: effetto di una sperimentazione variando un fattore alla volta sull'ottimizzazione di processo (Box G.E.P., [23]).

Si tenga presente che accanto alle tecniche di DOE nella sperimentazione industriale assumono particolare importanza anche l'analisi multivariata (MVA) che, tra l'altro, può in alcune applicazioni supportare il DOE [5-7].

E' stato menzionato l'utilizzo di questa tecnica in quanto l'analisi ed il trattamento dei dati di un determinato processo, le cui variabili dipendenti (risposte di processo) risultano funzione di numerose variabili indipendenti secondo leggi non completamente note, risulta differente a seconda se i dati sperimentali provengono da una sperimentazione espressamente pianificata, o se sono il risultato di una semplice collezione di dati di processo raccolti nella conduzione di un impianto. Nel primo caso e' possibile definire i dati endogeni, mentre nel secondo esogeni.

Questa apparente distinzione formale, risulta fondamentale in quanto si delineano due diverse procedure di analisi dei dati: per i dati endogeni vengono impiegate le procedure della sperimentazione fattoriale, analisi della varianza e così via, mentre per i dati esogeni risultano efficienti i metodi legati all'analisi multivariata, alla *cluster analysis*, *pattern recognition*, e quindi all'analisi fattoriale (ad esempio usando il metodo delle componenti principali) [5-7].

In questo lavoro e' stata eseguita un'analisi dei vantaggi che si ottengono quando una sperimentazione fattoriale viene realizzata nello studio di processi chimici. In particolare viene riportato un esempio di applicazione del *fractional design* relativo allo studio dell'ottimizzazione di un terreno colturale utilizzato in un processo di riduzione biologica di MnO_2 di interesse industriale, operato da una coltura mista eterotrofa [19-24].

LA SPERIMENTAZIONE FATTORIALE

La sperimentazione fattoriale viene condotta scegliendo e realizzando un reticolo di prove sperimentali, in cui in ogni nodo sono rappresentate le varie combinazioni dei valori assunti dai fattori (livelli) presi in esame [1,13,20].

Ogni combinazione dei livelli prescelti per i fattori presi in esame viene definita generalmente *trattamento*; in corrispondenza di un trattamento viene eseguito l'esperimento.

Una volta eseguita la sperimentazione i dati vengono analizzati mediante la tecnica dell'analisi della varianza (ANOVA), e successivamente

vengono eseguiti degli F-test per valutare la significativita' statistica degli effetti e delle interazioni dei fattori investigati.

L'effetto di un fattore rappresenta la variazione della risposta del processo al variare dei livelli del fattore stesso; la presenza di una interazione tra fattori viene riscontrata quando l'effetto di un fattore cambia al cambiare del livello di un'altro fattore.

I vantaggi che si ottengono nel programmare una sperimentazione secondo un reticolo fattoriale vengono mostrati nel seguito e sono legati all'ortogonalita' del disegno sperimentale, concetto che e' stato gia' discusso in altri lavori [20].

VANTAGGI DI UNA SPERIMENTAZIONE FATTORIALE

E' possibile mostrare che se vengono studiati gli effetti dei fattori ai diversi livelli presi in esame in un determinato processo produttivo, il piu' efficiente metodo di programmazione degli esperimenti e' quello della sperimentazione fattoriale.

Da un metodo efficiente si desidera ottenere informazioni con un prefissato grado di precisione e con il minimo sforzo possibile.

Se qualche conoscenza sugli effetti dei fattori e' nota e' possibile ridurre la quantita' di sforzi richiesti usando un design modificato, con l'utilizzo di quadrati latini o esperimenti parziali [1].

I vantaggi di un design fattoriale possono essere illustrati dal seguente semplice esperimento con due fattori e due livelli. Si considerino le prove che sono mostrate nella seguente tabella, finalizzate a verificare l'influenza di due fattori (temperatura e pressione) sulla resa di un generico processo chimico, mediante una sperimentazione effettuata variando un fattore alla volta.

	T_0	T_1
P_0	y_1	y_2
P_1	y_3	

I valori della superficie di risposta ai vari livelli siano y_1, y_2, y_3 .

L'effetto del cambiamento della temperatura ad una pressione P_0 e' dato da $(y_2 - y_1)$, e del cambiamento di pressione, alla temperatura T_0 , da $(y_3 - y_1)$.

Con questa sperimentazione, a causa degli errori sperimentali occorre replicare le prove almeno due volte, per avere una stima dell'errore, realizzando così un totale di 6 prove.

In alternativa si completi successivamente il piano sperimentale con il trattamento T_1, P_1 e si definisca la risposta con y_4 . In tal modo viene realizzato un fattoriale completo di due fattori con due livelli.

L'effetto della temperatura è stimato da $(y_2 - y_1)$ a P_0 e da $(y_4 - y_3)$ a P_1 . Se non esistono interazioni tra T e P queste stime differiscono solo dell'errore sperimentale e la media delle due differenze costituisce l'effetto della temperatura. Similmente l'effetto della pressione è stimata da $(y_3 - y_1)$ e $(y_4 - y_2)$ e valgono i ragionamenti fatti sopra.

In questa maniera se non esiste interazione tra i due fattori, con il modello fattoriale vengono realizzate 4 prove che hanno la stessa precisione delle 6 prove (3×2) condotte con il metodo di variazione di un fattore alla volta. Inoltre, mentre tutte e 4 le osservazioni sono utilizzate per stimare gli effetti dei due fattori nelle prove condotte con un reticolo fattoriale, nel caso del metodo di variazione di un fattore alla volta, solo i 2/3 vengono utilizzate per lo stesso scopo nella stima di un effetto principale ($4/6 = 2/3$).

Considerando il caso in cui i due fattori interagiscono, allora si comprendono ulteriormente i vantaggi relativi all'utilizzo di una sperimentazione fattoriale.

Due fattori interagiscono quando l'effetto di un fattore cambia al variare dei livelli del secondo fattore: tale interazione viene definita del primo ordine (ad es. AB); questa definizione può essere estesa anche alle interazioni di ordine più alto. In tal modo possono essere definite interazioni del secondo, terzo etc. ordine (es. ABC, CDEF).

Si consideri inoltre che se con il metodo di variazione di un fattore alla volta fosse stato ottenuto: $y_1 > y_2$ e $y_1 > y_3$ sarebbe stato possibile erroneamente concludere che y_4 è minore di y_1 . Questa assunzione risulta del tutto arbitraria in quanto non tiene minimamente conto della possibile presenza, nel fenomeno in esame, di una interazione tra due fattori.

Dall'analisi delle considerazioni sopra riportate, si può concludere che:

1) quando non si hanno interazioni il modello fattoriale dà la massima efficienza nella stima degli effetti;

2) quando esiste interazione, essendo la natura di queste incognita, un design fattoriale e' necessario per evitare conclusioni errate;

3) nel modello fattoriale, l'effetto di un fattore e' stimato a prescindere della scelta dei livelli degli altri fattori, essendo il *design* ortogonale [1,20];

A queste conclusioni si perviene solo considerando due fattori e due livelli e si comprende facilmente come questi risultati siano enfatizzati nel caso in cui il numero dei fattori risulta piu' elevato.

4 - FULL-FACTORIAL DESIGN

Generalmente quando si affronta uno studio preliminare di un processo chimico, ai fini di una sua maggiore conoscenza, e' opportuno cominciare lo studio con un fattoriale a due livelli (*screening*) [22,23].

A seconda del tipo di studio e degli obiettivi che si prefigge la sperimentazione si puo' decidere di eseguire un fattoriale completo (*Full-Factorial Design*) o uno frazionato (*Fractional Factorial Design*).

La scelta tra i due tipi di design viene effettuata generalmente considerando il numero di prove che deve essere realizzato e la difficolta' e/o il costo di esecuzione delle prove stesse.

In base ai risultati della sperimentazione preliminare, considerando i soli fattori significativi, si puo' procedere nello studio, massimizzando la risposta del processo, aumentando il numero di livelli (generalmente a tre) per apprezzare possibili "curvature".

Da queste considerazioni si comprende perche' siano maggiormente disponibili applicazioni di fattoriali a due ed a tre livelli, frazionati o no, rispetto al caso di $n > 3$ livelli.

Un tipico piano sperimentale fattoriale a due livelli viene definito da una matrice di segni come in Tab.1:

In particolare questo design e' relativo ad una sperimentazione di tre fattori (denotati con A, B, C) a due livelli; questo piano sperimentale prevede pertanto l'esecuzione di 8 trattamenti, che sono denotati con le lettere minuscole della prima colonna; questo tipo di notazione per i trattamenti e' quella di Yates [1]: ad es. il trattamento ac, rappresenta la prova con i fattori A e C al livello piu' alto, mentre il fattore B e' al livello piu' basso; esistono anche altre possibilita' di definire un trattamento come ad es. con 0,1 o con 1,2: ad esempio i trattamenti (1,0,1) e (2,1,2) non sono altro che altre possibili maniere per denotare il trattamento ac.

code	A	B	C	AB	BC	AC	ABC
(1)	-	-	-	+	+	+	-
a	+	-	-	-	+	-	+
b	-	+	-	-	-	+	+
ab	+	+	-	+	-	-	-
c	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	-	+	-	-	+	-
bc	-	+	+	-	+	-	-
abc	+	+	+	+	+	+	+

Tab.1 - 2^3 full-factorial design.

I segni delle prime tre colonne della matrice, indicano in maniera codificata i livelli dei fattori che devono essere considerati per la formulazione del piano sperimentale.

Le successive colonne indicano i segni da associare a vari trattamenti, per determinare le interazioni; questi vengono determinati dal prodotto dei segni contenuti nelle prime tre colonne.

Quindi considerando la Tab.1 nella sua globalita', una volta noti i valori della risposta in corrispondenza dei trattamenti, e' possibile determinare gli effetti e le interazioni associando i segni ai valori numerici delle risposte stesse. Ad es. l'effetto di A e dato da:

$$A = 1/4 [- (1) + a - b + ab - c + ac - bc + abc]$$

Il design sperimentale cosı' realizzato, ha la proprieta' della ortogonalita' tra gli effetti e le interazioni [20]; tale proprieta' comporta una importante implicazione fisica: ogni effetto o interazione risulta stimato indipendentemente dalla scelta dei livelli degli altri fattori. Se in una sperimentazione non si adotta un piano ortogonale, l'effetto di un dato fattore risente dell'influenza del valore dei livelli degli altri fattori rendendo i risultati dell'esperimento generalmente meno (o per niente) interpretabili.

Le fasi dell'organizzazione, esecuzione ed interpretazione dei dati ottenuti da un piano sperimentale fattoriale sono di seguito elencate:

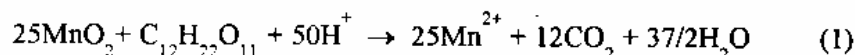
- 1) Selezione dei fattori e dei livelli da investigare;
- 2) Definizione della matrice dei segni e dei trattamenti da eseguire;
- 3) Esecuzione delle prove;
- 4) Analisi della varianza e tests di Significativita'.

In generale, se il numero di prove previsto per una sperimentazione fattoriale risulta troppo elevato, e' possibile estrarre dal reticolo sperimentale completo soltanto alcune prove che conservano l'importante proprieta' dell'ortogonalita' (*design* frazionati).

La generazione e le implicazioni di tali reticoli sperimentali sono stati gia' descritti in un precedente lavoro [20]. In ogni modo, risulta intuitivo che la riduzione del piano sperimentale comporta una certa confusione tra gli effetti e/o le interazioni. Tale riduzione di contenuto di informazione puo' essere effettuata scegliendo appropriatamente il piano sperimentale in base all'esigenze e le finalita' che sono richieste alla sperimentazione come e' riportato nell'esempio applicativo che segue.

ESEMPIO DI UNA SPERIMENTAZIONE FATTORIALE FRAZIONATA

L'esempio che segue riguarda lo studio di un processo di riduzione di MnO_2 per via microbiologica mediante una cultura mista eterotrofa [24]. In particolare il processo puo' essere descritto dalla seguente reazione globale:



Una parte del lavoro sperimentale ha riguardato un primo *screening* dei fattori che concorrono alla formazione del terreno colturale (denominato TS) che e' stato formulato inizialmente per l'operazione di selezione ed isolamento dei microorganismi utilizzati nel processo riduttivo.

Dopo tale fase si e' voluto pertanto procedere all'ottimizzazione del terreno stesso; per questo motivo e' stata realizzata una sperimentazione fattoriale frazionata: i fattori ed i livelli investigati sono mostrati in Tab.2. I fattori sono rappresentati dai principali sali utilizzati nella preparazione di TS, ed i livelli sono rappresentati dalle concentrazioni in g/L degli stessi: i livelli del fattore F (Estratto di Lievito) rappresentano invece il volume (mL) di Y.E. al 10% (w/v) usati nella preparazione del TS.

Fattori		Livelli (g/L)	
		-	+
A	$C_{12}H_{22}O_{11}$	25.00	50.00
B	NH_4NO_3	1.25	2.50
C	KH_2PO_4	0.75	1.50
D	$MgSO_4 \cdot 7H_2O$	0.51	1.02
E	$CaCl_2$	0.00	0.10
F	Y.E. (*)	2.50	5.00

Tab.2 - Fattori e livelli investigati;

Le condizioni sperimentali che sono state mantenute costanti sono di seguito riportate: contenuto di minerale del 15%, 100 mL di TS, inoculo del 10% (v/v), temperatura 30°C, velocità di agitazione in *sheaker* di 200 rpm. Le prove sono state realizzate in beute da 300 mL [20].

Sono stati pertanto considerati 6 fattori a due livelli: il numero di prove necessario per realizzare un fattoriale completo è di 64 trattamenti (2^n trattamenti; n= numero dei fattori). Considerando che, data la variabilità del fenomeno, risulta necessario almeno replicare due volte i trattamenti, risulterebbe necessario realizzare 128 prove sperimentali.

Il numero di prove per l'esecuzione dell'esperimento è stato considerato elevato e pertanto si è proceduto ad un frazionamento del piano sperimentale. Il frazionamento è stato eseguito realizzando un piano sperimentale idoneo a stimare correttamente almeno gli effetti principali, confondendo al più le interazioni del primo ordine (*two-factorial interactions*).

È stato deciso pertanto di studiare i 6 fattori con 16 prove replicate effettuando 1/4 del design completo. L'interazione generalizzata (*Defining Contrast*) scelta per generare il piano sperimentale è di seguito riportata: I, ABCE, BCDF, ADEF; i metodi per generare il piano fattoriale frazionati sono stati riportati nel lavoro [20].

Le alias degli effetti principali e delle interazioni sono riportate in Tab.3. È possibile osservare che le alias non rappresentano altro che classi di equivalenza [20]. Considerando le interazioni del secondo e del terzo ordine trascurabili, è possibile evidenziare che il piano sperimentale frazionato permette di valutare gli effetti principali senza confusione con le interazioni del primo ordine; le interazioni del secondo ordine risultano invece, confuse l'una con l'altra come riportato in Tab.4.

AB	=	(CE)		
AC	=	(BE)		
AD	=	(EF)		
(AE)	=	(DF)	=	BC
AF	=	(DE)		
BD	=	CF		
BF	=	CD		

Tab.4 - Confusione tra le interazioni del primo ordine.

In base a considerazioni di tipo fisico, che si basano sulla conoscenza del processo riduttivo, si e' ritenuto che alcune interazioni del primo ordine possono essere ipotizzate come non significative; tale ipotesi non risulta essere limitativa, in quanto risulterebbe sempre possibile aggiungere prove sperimentali per dividere le alias, secondo un approccio sperimentale tipicamente sequenziale [1]. In ogni modo tale modo di procedere risulta perfettamente in linea con il metodo sperimentale costituito dalle seguenti fasi: ipotesi, esperimento, analisi risultati, formulazione di una successiva ipotesi. Per questo motivo le interazioni tra parentesi, mostrate in Tab.4 sono state ritenute trascurabili.

Con tali considerazioni, il design sperimentale cosi' organizzato, risulta soddisfacente per lo studio del processo in esame.

In Tab.5 sono riportati i 16 trattamenti realizzati nella sperimentazione; per la definizione codificata dei trattamenti (e' stata impiegata la notazione di Yates [1]). La generazione del piano sperimentale e' stata gia' descritta in un precedente lavoro [20].

In particolare questo design e' relativo ad una sperimentazione di tre fattori (denotati con A, B, C) a due livelli; questo piano sperimentale prevede pertanto l'esecuzione di 8 trattamenti, che sono denotati con le lettere minuscole della prima colonna; questo tipo di notazione per i trattamenti e' quella di Yates [1]: ad es. il trattamento ac, rappresenta la prova con i fattori A e C al livello piu' alto, mentre il fattore B e' al livello piu' basso; esistono anche altre possibilita' di definire un trattamento come ad es. con 0,1 o con 1,2: ad esempio i trattamenti (1,0,1) e (2,1,2) non sono altro che altre possibili maniere per denotare il trattamento ac.

run	code	A	B	C	D	E	F
1	(1)	25	1.25	0.75	0.51	0.0	2.5
2	bc	25	2.50	1.50	0.51	0.0	2.5
3	ae	50	1.25	0.75	0.51	0.1	2.5
4	abce	50	2.50	1.50	0.51	0.1	2.5
5	df	25	1.25	0.75	1.02	0.0	5.0
6	bcd	25	2.50	1.50	1.02	0.0	5.0
7	ade	50	1.25	0.75	1.02	0.1	5.0
8	abcde	50	2.50	1.50	1.02	0.1	5.0
9	abd	50	2.50	0.75	0.51	0.0	2.5
10	acd	50	1.25	1.50	0.51	0.0	2.5
11	bde	25	2.50	0.75	0.51	0.1	2.5
12	cde	25	1.25	1.50	0.51	0.1	2.5
13	abf	50	2.50	0.75	1.02	0.0	5.0
14	acf	50	1.25	1.50	1.02	0.0	5.0
15	bef	25	2.50	0.75	1.02	0.1	5.0
16	cef	25	1.25	1.50	1.02	0.1	5.0

Tab.5 - Trattamenti della sperimentazione fattoriale frazionata

In Tab.6 e' stata riportata l'analisi della varianza (ANOVA): dall'analisi dei risultati ottenuti e' possibile valutare il valore degli effetti e la significativita' degli effetti principali ed interazioni del primo ordine, relativi al *design* sperimentale impiegato [1,20]

La significativita' degli effetti viene determinata mediante F-test [1]; si tenga presente che l'ipotesi alla base di questo test e' che gli errori sperimentali sono distribuiti normalmente con media nulla e varianza costante al variare dei livelli dei fattori [1]. Assumere pertanto a priori che l'errore sia distribuito normalmente puo' non risultare sempre lecito, per cui in alcuni casi andrebbe verificata la forma della distribuzione dell'errore casuale.

L'errore sperimentale utilizzato nella ANOVA e' stato valutato da 2 replicazioni effettuate per ogni trattamento realizzato nella sperimentazione; il valore di S^2 risulta pari a 3.11 con 16 g.d.l..

Tratt.	Effetto	Resa (%)	Effetto (%)	MS ^a	MS/S ²
(1)	-	36.5	-	-	-
a	A	43.6	22.4	2007.0	646.4(**)
b	B	45.7	18.4	1357.9	437 (**)
ab	AB	79.6	11.4	517.6	166.7(**)
c	C	33.5	-8.2	270.6	86.9 (**)
ac	AC	43.9	0.4	0.6	0.2
bc	BC	35.1	-2.35	22.1	7.1 (*)
abc	E	68.2	0.45	0.8	0.3
d	D	35.1	-1.3	6.5	2.1
ad	AD	50.2	1.3	6.5	2.1
bd	BD	45.6	0.7	1.7	0.5
abd		77.6	-1.0	4.0	1.3
cd	CD	26.5	-2.1	16.8	5.4 (*)
acd		38.0	-0.3	0.3	0.1
bcd	F	33.4	2.5	24.5	7.9 (*)
abcd		69.5	1.5	8.8	2.8

(**) Altamente significativo ($\alpha < 0.01$); (*) Significativo ($0.01 < \alpha < 0.05$)

^a mean square (MS)

Tab.6 - Tabella Analisi della Varianza

In Tab.6 sono stati riassunti i valori degli effetti dei fattori altamente significativi ($p > 99\%$) e di quelli significativi ($p > 95\%$) con i relativi intervalli fiduciali. Dall'analisi dei risultati dell'ANOVA e' possibile constatare che:

1) il saccarosio (A) ha un effetto positivo sul processo estrattivo; l'effetto di tale fattore era d'altronde prevedibile considerando la reazione (1) ma se si tiene conto della complessita' dei fenomeni che intervengono nel processo microbiologico si comprende che la stima del valore di tale effetto risulta necessaria per la stechiometria del processo globale (reazione (1) + crescita microbica); in ogni modo e' possibile riscontrare che, nel range di condizioni sperimentali investigato, si ottiene un incremento di resa all'aumentare della concentrazione di zucchero;

2) la fonte di azoto B ha un effetto positivo, leggermente minore dell'effetto del fattore A; si tenga presente che esiste anche una considerevole interazio-

ne positiva AB: la presenza di tale interazione indica che oltre all'incremento del processo riduttivo con l'incremento dei livelli dei fattori A e B rispettivamente, si ha un contributo ulteriore al processo estrattivo a causa di un sinergismo dei due fattori;

3) la sorgente di fosforo (C) ha un effetto negativo sulla superficie di risposta; inoltre, anche se di minore importanza, esistono anche due interazioni negative di questo fattore con la sorgente di azoto (B) ed l'MgSO₄ (D);

4) la presenza di Y.E. incrementa significativamente la risposta del sistema, ma tale incremento risulta dello stesso ordine di grandezza delle interazioni BC e CD;

5) i fattori D, E e tutte le altre interazioni del primo ordine sono non significative;

In realta' meriterebbe una certa attenzione l'interazione CD in quanto risulta confusa con una interazione (BF) che e' stata ritenuta a priori come potenzialmente importante; considerando comunque che l'effetto del fattore B risulta scarsamente importante si puo' accettare questo risultato con una certa sicurezza. Si tenga presente comunque che in una sperimentazione fattoriale, in generale, pur non essendo significativi gli effetti principali di alcuni fattori, possono essere significative le interazioni del primo ordine tra questi; nel caso in esame, data la natura del problema, sono state fatte considerazioni anche sull'interazione CD.

A prescindere dalle considerazioni di tipo fisico sul significato degli effetti e delle interazioni, e' possibile constatare da questo esperimento quali sono stati i vantaggi dell'avere eseguito una sperimentazione fattoriale:

a) sono state effettuate 16 x 2 prove invece di 64 x 2, determinando senza confusione gli effetti principali;

b) e' stato possibile valutare la presenza di interazioni tra fattori, cosa che non risulta possibile fare effettuando sperimentazioni variando un fattore alla volta. Pur essendo presente una certa confusione tra tali interazioni, sono state ottenute sicuramente piu' informazioni dai dati sperimentali che possono essere utilizzate nella definizione di un nuovo piano sperimentale finalizzato all'ottimizzazione del terreno culturale.

CONCLUSIONI

Nel presente lavoro sono stati descritti i vantaggi che si possono ottenere nello studio e nello sviluppo di processi chimici mostrando alcuni esempi applicativi in sperimentazioni condotte dagli A.A.

In particolare si e' voluto evidenziare l'importanza dell'organizzazione delle prove secondo piani sperimentali fattoriali completi o frazionati in termini di capacita' di apprezzare la presenza di interazioni ed in termini di efficienza della sperimentazione stessa.

Dall'analisi delle considerazioni fin qui svolte risulta spontaneo chiedersi, come metodi cosi' efficienti non sono cosi' diffusi ed utilizzati sia nell'ambito della ricerca di base che in quella industriale. Si tengano presente i notevoli risultati che sono stati ottenuti dall'industria giapponese dal dopoguerra in poi, dove questi metodi statistici sono stati ampiamente applicati nella ricerca industriale, soprattutto grazie al notevole sviluppo dato dal DOE con i metodi di Taguchi, che non sono stati trattati in questa sede, ma che hanno come base di riferimento *designs* sperimentali frazionati.

I motivi di questa mancanza dell' applicazione del DOE nella sperimentazione industriale possono essere riassunti nei seguenti punti:

- 1) la maggior parte degli studiosi e' restia a cambiare piu' di una variabile alla volta;
- 2) l'efficienza di un piano fattoriale non e' cosi' ovvia;
- 3) non esiste una sufficiente "cultura" del DOE sia per carenze nella formazione universitaria e sia nella difficolta' da parte dei responsabili industriali di percepire i vantaggi di queste tecniche;
- 4) non esiste un sufficiente interscambio culturale tra settori teorici ed applicativi del DOE; si tenga presente le notevoli difficolta' di comunicazione che esitano, in genere tra matematici, ed in particolare statistici, ed ingegneri.

In questo lavoro sono stati mostrati esempi applicativi del DOE allo studio di processi idrometallurgici; si tenga presente comunque a scanso di equivoci, che in generale, nessun metodo statistico, anche il piu' sofisticato, puo' risultare efficiente se vengono elaborati risultati di prove sperimentali condotte in maniera non corretta.

BIBLIOGRAFIA

1. O.L. DAVIES, *The Design and Analysis of Industrial Experiments*, ICI, II^a edizione, 1979.
2. R.C. BOSE, *Combinatorial Problems of Experimental Design II: Factorial Design*, in *Annals of Discrete Mathematics* (1980), 6.
3. M.N. DAS, N.C. GIRI, *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, 1986.
4. J. F. MAC GREGOR, *On-Line Statistical Process Control*, *Chemical Engineering Progress*, p.21, Ottobre 1988.
5. L. TORO, *L'Analisi Fattoriale nello Sviluppo dei Processi Chimici*, *La Chimica e L'Industria*, p.165, n.11-12 Nov./Dic., 1975.
6. VON HUONG NGUYEN, L. TORO, L. TORO, *A Factorial Technique for Selecting Dimension of Hougen-Watson Models*, *Chemical Engineering Science*, (1977), Vol.32, 1345.
7. A. COPPACCHIOLI, A.R. GIONA, L. TORO, *Stima Economica di Impianti di Trattamento Acque con il Metodo delle Componenti Principali*, *ICP*, no III, n.5, Maggio 1975.
8. R. CALCUTT, *Putting Process Changes to the Factorial Test*, *Process Engineering*, (1990), Luglio, 44.
9. R. CALCUTT, *Setting Design on Quality for Stronger Processes*, *Process Engineering*, (1990), Agosto, 45.
10. J. MATA ALVAREZ et al., *Experimental Design: Comparative Study of their Effectiveness*, *Anales de Quimica*, p.100, vol.8, Aprile 1984.
11. G. TAGUCHI, *Linear Graphs for Orthogonal Arrays and Their Applications to Experimental Design with the Aid of Various Techniques*, *Rep. Stat. Res.*, p.1, Vol.6, No.4, 1959.
12. C. GODAWA et al., *Palladium Catalized Hydrogenation of Furan: Optimization of Production Conditions for tetrahydrofuran*, *Resources, Conservation and Recycling*, p.201, V.3, Issue:4, Giugno 1990.
13. G.E.P. BOX, W.G. HUNTER, J.S. HUNTER, *Statistics for Experimenters*, John Wiley & Sons, 1989.
14. G. BELARDI, N. SHEAU, A. MARABINI, F. VEGLIO', *Surface response method in the optimization study of a multi-gravity separator: concentration of chromite fines*. XIX International Mineral Processing Congress, 22-27 Ottobre, S. Francisco (USA) 1995 (in press).
15. A. BONOLI, F. VEGLIO', *Testing and data processing as optimisation and control tool in the mineral processing plants: a preliminary study using statistical methods of experimental design*. in: *Computer Applications and Operations Research in the Mineral Industries*, 1993 (in press).

16. C. CANTALINI, F. VEGLIO', M. PELINO, *The electrical properties of hematite humidity sensor investigated by fractional factorial design*, Third Euro-Ceramics Symp., P. Duran and J.F. Fernandez eds., Faenza editrice Iberica S.L., Spain, (1993), V.2, pp.443-448
17. C. CANTALINI, F. VEGLIO', H.T. SUN, M. PELINO, *Microstructural features of microporous-hematite ceramics investigated by fractional factorial design*. in ECERS IV 1995, (in press).
18. S. UBALDINI, R. MASSIDDA, C. ABBRUZZESE, F. VEGLIO' , M. CENTOFANTI, dL. TORO, *Factorial experiments in the study of a biooxidative pretreatment for a conventional cyanidation of a Turkey arsenical gold ore*. In: Progress in Mineral Processing Technology, (H. Demirel and S. Ersayn Eds), Balkema Publisher, Rotterdam (1994), 403-409.
19. F. VEGLIO', L. TORO, M. TERRERI, C. ERCOLE, A. LEPIDI, *The surface response method in the study of a bioleaching of MnO₂ by heterotrophic mixed cultures*. In: Progress in Mineral Processing Technology, (H. Demirel and S. Ersayn Eds), Balkema Publisher, Rotterdam (1994), 379-385.
20. F. VEGLIO' e L. TORO, *Determinazione del piano sperimentale di una sperimentazione fattoriale a 2 e 3 livelli con confusione e frazionata*, Ratio Mathematica (1992), 4, 195-210.
21. F. VEGLIO', A. PAGLIARINI, L. TORO, *Factorial experiments for the development of a kaolin bleaching process*, International Journal of Mineral Processing (1993), 39, 87-99.
22. F. VEGLIO', M. RECINELLA, P. MASSACCI e L. TORO, *Screening tests in the study of the iron oxide leaching by sucrose in sulphuric acid solutions using statistical methods*, Hydrometallurgy, (1994), 35, 293-311.
23. F. VEGLIO' e L. TORO, *Fractional factorial experiments in the development of manganese dioxide leaching by sucrose in sulphuric acid solution*, Hydrometallurgy, (1994), 36, 215-230.
24. F. VEGLIO', M. TERRERI and L. TORO, *Factorial experiments in the development of a pyrolusite bioleaching process using heterotrophic cultures*, Biohydrometallurgical Technologies, A.E. Torma, J.E.Wey and V.I. Lakshmanan (Eds.), TMS, Warrendale (Pennsylvania) (1993), 1, 269-276.

SISTEMI DIGITALI MULTICANALE E TEORIA DELL'INFORMAZIONE I. ENTROPIA, RIDONDANZA E CODIFICA

Fabio Mercanti*

SUNTO - Si analizzano le possibilità di applicazione della *Teoria dell'informazione* alla *Teoria dei Sistemi Digitali Multicanale (SDM)*.

ABSTRACT - The possibility of applications of the *Information Theory* to the *Multichannel Digital Systems (SDM) Theory* has been analyzed.

0. In questa nota si indagano, e in qualche caso si anticipano, i risultati degli studi sui rapporti tra *energia* ed *informazione* in un *Sistema Digitale Multicanale (SDM)*, con particolare riguardo alle sue interpretazioni *biologiche* ed *economiche*. Più precisamente si pongono le basi per mostrare come nel fenomeno biologico della *percezione*, studiata in MERCANTI [6], la quantità di informazione trasmessa dall'SDM sia misurabile in termini di *entropia* e di *ridondanza*, nel senso di SHANNON [9], [10], [11].

I risultati ottenuti possono essere utilizzati per lo studio di altri sistemi biologici ed economici, come quelli descritti in MERCANTI [7]. Più in generale, il senso di una ricerca su oggetti astratti del tipo degli SDM è quello che un sistema percettivo, un ecosistema, un reattore chimico, un distretto fisiologico, un sistema economico, una rete nervosa o addirittura un

gruppo animale od umano si lascino descrivere spontaneamente, a parte le inevitabili precisazioni, come un SDM (MELZI [2]).

1. Per comodità del lettore, questo paragrafo è dedicato ad alcuni prerequisiti indispensabili per il prosieguo, riguardanti le teorie relative agli SDM.

1.1. Un SDM (MELZI [2], MELZI-MERCANTI [4]) è un *sistema dinamico* (RINALDI [8]), lo *stato iniziale* e l'*input-output* del quale sono costituiti da *informazione codificata*, secondo certe *parole* su un dato alfabeto; queste parole interagiscono secondo il seguente meccanismo *algebrico-combinatorio* (MELZI-MERCANTI [3]).

1.1.1. Data una *grammatica* $\mathcal{G}$, costituita dalle *parole* su un *alfabeto* T ad un numero finito di caratteri, gli elementi dell'insieme $P(\mathcal{G})$, insieme delle parti di $\mathcal{G}$, formano un'algebra di Boole B . Introducendo, oltre alle operazioni di B , altre opportune relazioni ed operazioni, dette *$\mathcal{A}$ -operazioni*, tra le parole di $\mathcal{G}$, si ottiene una *struttura algebrica* $\mathcal{A}$, estensione di B .

1.1.2. Con l'insieme dei *termini* dell'algebra $\mathcal{A}$ è possibile costruire certe *$\mathcal{A}$ -funzioni* da $P(\mathcal{G})$ a $P(\mathcal{G})$, le *variabili indipendenti* e il *valore* delle quali sono, rispettivamente, insiemi di parole ed *$\mathcal{A}$ -espressioni* (insieme dei termini dell'algebra $\mathcal{A}$).

1.2 Sulla base di quanto detto precedentemente, un SDM può essere definito come un *vettore*

$$S = [C_0, C_1, \dots, C_n], \quad (1)$$

ad elementi in $P(\mathcal{G})$ (cfr. 1.1) e funzione di un tempo *discreto* t_i , dove C_0 è lo *stato* dell'SDM al tempo t_i , $C_1, C_2, \dots, C_r$ sono i *canali di entrata* al tempo t_i e $C_{r+1}, \dots, C_n$ sono i *canali di uscita* sempre al tempo t_i .

Tra lo stato C_0 e i canali di entrata e di uscita valgono le *relazioni funzionali*

$$C_0(t_{i+1}) = F(C_0(t_i), \dots, C_r(t_i)), \quad i=1, 2, \dots \quad (2)$$

e

$$C_j(t_{i+1}) = F_j(C_0(t_i)), \quad j=r+1, r+2, \dots, n, \quad (3)$$

esprimenti, rispettivamente, come d'uso nella teoria dei sistemi dinamici, che C_0 al tempo t_{i+1} è funzione dello stato C_0 e delle entrate al tempo

precedente, e che le uscite, ad un dato tempo, sono funzioni dello stato C_0 , al tempo precedente.

Le funzioni (2) e (3) sono funzioni da $P(\mathcal{G})$ a $P(\mathcal{G})$ (cfr. 1.1.2), indipendenti dal tempo, e definiscono un'applicazione σ dell'insieme $\mathcal{S}$ dei vettori (1) in sé, detta funzione caratteristica

$$F_{SDM} \quad (4)$$

dell'SDM.

2. Si ricordano, per sommi, capi le nozioni fondamentali della Teoria dell'informazione, relativamente ai concetti di *entropia* e *ridondanza* di un linguaggio ([9], [10], [11]). Senza approfondire i principi e le regole che guidano questo studio, si può dire, intuitivamente, che essi si riassumano nella constatazione di fondo che un linguaggio (o un messaggio), che comprende parole poco usate, se da un lato potrà aumentare le conoscenze del destinatario, dall'altro stonerà, per così dire, la sua attenzione e le sue capacità percettive. Analogo ragionamento vale nel caso di un *messaggio disturbato* (*canale disturbato*, [10]), per esempio nel caso di una trasmissione via radio disturbata da interferenze. Esiste un legame tra il *contenuto del messaggio* e la sua *comprensibilità*, legame che si estrinseca nelle due funzioni di entropia e di ridondanza.

Si può immaginare l'entropia di un linguaggio (o di un messaggio) come il *contenuto medio di informazione* del linguaggio (o del messaggio), e la ridondanza come un indice della maggiore o minore facilità di comprensione del linguaggio (o del messaggio) stesso.

2.1. Ogni linguaggio, e quindi ogni messaggio, può essere considerato come una sorgente *ergodica d'informazione*. Come tale, essendo puramente casuale la successione dei simboli che lo compongono, la quantità di informazione, in esso contenuta, dipenderà esclusivamente dalla probabilità statistica di un determinato simbolo. La "curiosità" di un simbolo P_i , per il ricevitore del messaggio, è tanto più grande, quanto più raramente egli è abituato a incontrarlo. Di conseguenza tale curiosità sarà inversamente proporzionale alla frequenza p_i , con cui si incontra il simbolo generico P_i . Il numero adottato, per misurare la curiosità di un simbolo P_i , è rappresentato dal logaritmo in base 2 del reciproco della frequenza p_i di P_i ; tale numero prende il nome di *contenuto parziale di informazione* di P_i , e si scrive

$$c_i = \lg \frac{1}{p_i} = -\lg p_i. \quad (5)$$

In particolare la (5) soddisfa l'esigenza di divenire 0 per $p_i=1$ (probabilità massima), cioè alla comparsa di un unico *simbolo stereotipo*, e di crescere

indefinitivamente al diminuire della frequenza p_i , in concordanza col fatto che l'informazione aumenta col *diminuire della frequenza* (e quindi con l'aumento della curiosità).

2.2. Nel caso studiato in SHANNON [11], si considera dapprima l'alfabeto inglese di ventisei caratteri, esclusi quindi i *blank*. Qualora i caratteri compaiano con eguale frequenza p_i , cioè nel caso di equiripartizione statistica dei simboli, alla sommatoria

$$H_0 = \sum_{i=1}^{26} p_i c_i = - \sum_{i=1}^{26} p_i \log p_i, \quad (6)$$

essendo c_i il contenuto parziale di informazione dato dalla (5), si dà il nome di *entropia¹ teorica* del linguaggio inglese. Analogamente si possono calcolare $H_1, H_2, \dots, H_w$, dove i simboli usati sono, rispettivamente, per il calcolo di H_1 i *singoli caratteri* che compaiono nel linguaggio, per H_2 le *coppie di caratteri*, ..., per H_w le *parole* del linguaggio².

Al rapporto

$$\rho_1 = \frac{H_0 - H_1}{H_0} \quad (7)$$

si dà il nome di *ridondanza del linguaggio* per caratteri. Analogamente si definisce una *ridondanza per coppie di caratteri*, e così via fino a definire una *ridondanza per parole*³. In generale ogni linguaggio è caratterizzato da una propria *ridondanza*: così per esempio la lingua inglese è meno ridondante di quella italiana e, all'interno di quella italiana, è meno ridondante il linguaggio tecnico-scientifico, rispetto a quello storico-letterario, e così via (MANFRINO [1], MERCANTI [5]).

3. I concetti di entropia (6) e di ridondanza (7) possono essere utilizzati nello studio degli SDM, nel senso che, dato che gli SDM sono elaboratori di informazione codificata, secondo la funzione caratteristica (4) da $P(\mathcal{G})$ a $P(\mathcal{G})$ (cfr. 1.2), allora esisterà una *codifica* di ogni *linguaggio* che sia

¹ La coincidenza puramente formale della espressione matematica dell'entropia termodinamica con H_0 indusse Shannon ad utilizzare la parola entropia anche nella Teoria dell'informazione.

² I risultati ottenuti da Shannon sono $H_0=4.7, H_1=4.14, H_2=3.56, \dots, H_w=2.62$.

³ La ridondanza può essere assunta come indice della comprensibilità di un messaggio o di un linguaggio. Essa varia da linguaggio a linguaggio e a secondo che la si consideri per simboli che siano singoli caratteri, oppure coppie di caratteri, e così via sino a considerare simboli le singole parole.

utilizzabile dall' SDM. Si tratterà di calcolare, per ogni processo nell'SDM, la corrispondente entropia (6), nel caso delle parole di $\mathcal{G}$ (cfr. 1.1.1), e la rispettiva ridondanza (7), sempre nel caso delle parole di $\mathcal{G}$.

Dette allora H_w^* e ρ_w^* , rispettivamente, tali entropia e ridondanza, risulterà, in perfetta analogia con le (6) e (7), rispettivamente,

$$H_w^* = \sum_{i=1}^n q_i d_i \quad (8)$$

c

$$\rho_w^* = \frac{H_{w_0}^* - H_w^*}{H_{w_0}^*}, \quad (9)$$

essendo nella (8) e nella (9), rispettivamente, n il numero delle parole (o degli insiemi di parole) di $\mathcal{G}$ prese in considerazione, q_i un *peso* da attribuire ad ogni parola (o insieme di parole), legato da una relazione funzionale, del tipo (4), alle frequenze p_i delle parole P_i di $\mathcal{G}$, d_i il contenuto di informazione parziale (cfr. (5))

$$d_i = \text{ld} \frac{1}{q_i} = -\text{ld} q_i, \quad (10)$$

c $H_{w_0}^*$ l'entropia teorica (cfr. 2.2) dell'algebra $\mathcal{A}$ (cfr. 1.1.1), sui meccanismi algebrico-combinatori della quale l'SDM regola il proprio funzionamento.

Tenendo conto della (10), la (8) diventa

$$H_w^* = - \sum_{i=1}^n q_i \text{ld} q_i. \quad (11)$$

4. Le conclusioni contenute nelle (8), (9), (10), (11) consentono una descrizione, dal punto di vista della teoria dell'informazione, degli SDM. In particolare sarà possibile dare una nuova interpretazione dei fenomeni biologici ed economici studiati nei già citati lavori [6] e [7].

La funzione caratteristica (4) regola anche le quantità di informazione che individuano stato, canali di entrata e canali di uscita di un SDM (cfr. 1.2), con le conseguenti implicazioni.

BIBLIOGRAFIA

1. R. MANFRINO, *L'entropia della lingua italiana ed il suo calcolo*, Alta Frequenza, 30 (1960), 4-29.
2. G. MELZI, *Sistemi dinamici digitali e loro possibili applicazioni*, Ratio Mat., Univ. Pescara, 2 (1991), 157-160.
3. G. MELZI e F. MERCANTI, *An algebraic-combinatory Theory of real nervous System*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 9 (1988), 107-121.
4. G. MELZI e F. MERCANTI, *Teoria dei sistemi e Sistemi Digitali Multicanale*, Sinopie, Politecnico di Milano, 2 (1989), 34-35.
5. F. MERCANTI, *Gli effetti del linguaggio pubblicitario: "approach" matematico di un problema psicologico*, Marketing e Pubblicità, F. Angeli Ed., Milano, 8 (1966), 131-135.
6. F. MERCANTI, *Una suggestiva analogia fra fenomeni biologici e fenomeni economici a soglia*, Ratio Mat., Univ. Pescara, 2 (1991), 161-165.
7. F. MERCANTI, *Interpretazione economica dei predicati di canale in un Sistema Digitale Multicanale*, Ratio Mat., Univ. Pescara, 3 (1992), 81-84.
8. S. RINALDI, *Teoria dei sistemi*, Clup., Politecnico di Milano, 1977.
9. C.E. SHANNON, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Techn. J., 27 (1948), 379-423.
10. C.E. SHANNON, *Communication in the Presence of Noise*, Proc. IRE Sect. II, Waves and Electrons, 37 (1949), 10-21.
11. C.E. SHANNON, *Prediction and Entropy of printed English*, Bell System Techn. J., 30 (1951), 50-64.

PRACTICAL ASPECTS IN SOME NOT CLASSICAL METHODS FOR THE NUMERICAL EVALUATION OF CPV- INTEGRALS

Franca Caliò^{*}, Elena Marchetti^{*}

SUNTO - In questo lavoro presentiamo due metodi non classici per la valutazione numerica di integrali pesati e con singolarità di tipo Cauchy (CPV). Il primo metodo è una quadratura interpolatoria di tipo gaussiano sul semidisco unitario. Il secondo è una integrazione numerica quasi interpolatoria basata sull'approssimazione spline.

ABSTRACT - Two different not classical approaches are given for the numerical evaluation of weighted Cauchy principal value integrals. The first approach is an interpolatory Gaussian integration over the unit half disc. The second method is a quasi interpolatory integration rule based on spline approximation.

^{*} *Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano - Via Bonardi 9*

INTRODUCTION

Frequently real systems modeling, e.g. aerodynamics or structural related problems, leads to integral equations having irrational kernel with real poles of first order in the integration interval.

Precisely, finding solutions of these equations, often yields singular integrals as:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{w(x)}{x - \lambda} f(x) dx \quad (1)$$

where $w(x) = (1-x^2)^{\alpha-1/2}$ with $\alpha = 0, 1/2, 1$, and $-1 < \lambda < 1$.

In this work we shall discuss some approaches to the numerical evaluation of integrals (1). In particular we present some not classical methods to approximate (1), in alternative to classical methods which we briefly recall.

This paper is organized as follows: in section 1 we consider classical and not classical Gaussian methods and in section 2 classical and not classical quadrature based on particular approximating splines. Here we present a short survey of them, with the aim to collect the most significant results and make comments on the computational aspects, which may be useful to the reader.

1. GAUSSIAN METHODS

Let us consider integral (1), defined in the Cauchy principal value sense:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{\lambda-\varepsilon} \frac{w(x)}{x - \lambda} f(x) dx + \int_{\lambda+\varepsilon}^1 \frac{w(x)}{x - \lambda} f(x) dx$$

A classical way for the numerical computation of integrals (1) is the following.

Using the transformation:

$$x = \frac{t + \lambda}{t\lambda + 1}$$

we obtain:

$$I = w(\lambda) p.v. \int_{-1}^1 w(t) g(\lambda, t) t^{-1} dt \quad (2)$$

where:

$$g(\lambda, t) = \frac{f\left(\frac{t+\lambda}{t\lambda+1}\right)}{(t\lambda+1)^{2\alpha}}$$

Then we generate quadrature formulas, based on the interpolation of the function $g(\lambda, t)$ on n distinct points x_i ($i=1, 2, \dots, n$) belonging to $[-1, 1]$, with a polynomial of degree $n-1$. From the integration of the polynomial the following quadrature formula holds:

$$I \cong \sum_{i=1}^n w_i g(\lambda, x_i) \quad (3)$$

In (3) x_i ($i=1, 2, \dots, n$) are called nodes of the quadrature; w_i ($i=1, 2, \dots, n$) are the weights depending on $w(t)$, on λ , and on x_i (in particular $w_i = w'/x_i$ when $x_i \neq 0$). The formula (3) is exact at least for all polynomials of degree $n-1$ (polynomial order $n-1$).

When the nodes are the zeros of the polynomial of degree n orthogonal with respect to $w(t)$ in $[-1, 1]$ (in the case of (1) the orthogonal polynomials are called Chebyshev polynomials of first kind, for $\alpha = 1$, of second kind, for $\alpha = 0$, and Legendre polynomials, for $\alpha = 1/2$) the corresponding quadrature formulas (3) are called Gaussian, and are exact for $g(\lambda, t) \in P_{2n-1}(t)$ (polynomial order $2n-1$).

Many authors proposed formulas of interpolatory type and related algorithms to evaluate the weights (for instance Delves, Hunters, Elliot, Paget, and Monegato). For an accurate bibliography see Monegato [11].

As it is well known, the accuracy—which is of high polynomial order—of the Gaussian formulas is related to the regularity of the function $f(x)$.

Nevertheless the non uniform distribution of the nodes x_i ($i=1, 2, \dots, n$) and some cancellation problems affect sometimes adversely the accuracy of this type of quadrature formulas.

Gautschi and Milovanovic in [9] proposed an alternative Gaussian technique which makes the degree of the numerical cancellation in the computation of the quadrature 1-2 orders of magnitude smaller.

This technique approximates integrals (2) by a Gaussian quadrature formula on the semicircle in the complex plane.

With the assumption that $f(z)$ is an analytic function on the closed upper unit half disc, it follows:

$$I = w(\lambda) i(\pi f(\lambda) - \int_0^\pi w(e^{i\theta}) g(\lambda, e^{i\theta}) d\theta)$$

If $f(z)$ is real for real z , then:

$$I = w(\lambda) \operatorname{Im} \int_0^\pi w(e^{i\theta}) g(\lambda, e^{i\theta}) d\theta$$

To approximate integral (1) Gautschi and Milovanovic in [9] and Milovanovic in [10] proposed the application of the following complex gaussian quadrature formula:

$$I \cong w(\lambda) \operatorname{Im} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i g(\lambda, \xi_i) \right) \quad (4)$$

where ξ_i ($i=1, 2, \dots, n$) are the zeros of a suitable complex polynomial $\pi_n(z)$ and δ_i ($i=1, 2, \dots, n$) are the corresponding weights.

$\{\pi_k(z)\}$ of degree precisely k is the class of the polynomials orthogonal with respect to the non hermitian inner product:

$$\langle p, q \rangle = \int_{\Gamma} (iz)^{-1} w(z) p(z) q(z) dz$$

where $w(z)$ is as in (1) and Γ is the circular part of the boundary of D_+ , where:

$$D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

The comparison between formulas (4) and (3) shows the better behaviour of (4) in terms of rounding errors and consequently better algorithmic stability. Unfortunately formula (4) concentrates again the nodes in the neighbourhood of the extremes of the integration interval.

In [2] and [3] we proposed an extension of formula (4) which provides a better distribution of the quadrature nodes.

Precisely considering the complex polynomial $E_{n+1}(z)$ of degree $n+1$ satisfying the following orthogonality conditions:

$$\int_{\Gamma} (iz)^{-1} w(z) \pi_n(z) E_{n+1}(z) z^k dz = 0, k = 0, 1, \dots, n$$

to approximate (2) we proposed the application of the following extended complex Gaussian quadrature formula:

$$I \cong w(\lambda) \operatorname{Im} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i g(\lambda, \xi_i) + \sum_{j=1}^{n+1} \tau_j g(\lambda, \zeta_j) \right) \quad (5)$$

where ξ_i ($i=1, 2, \dots, n$) are the zeros of the complex polynomial $\pi_n(z)$, ζ_j ($j=1, 2, \dots, n+1$) are the zeros of the complex polynomial $E_{n+1}(z)$, σ_i, τ_j the corresponding weights.

In [1, 2] we have proved that the zeros of $E_{n+1}(z)$ are non real, simple, contained in the upper unit half disc D_+ and located symmetrically with respect to the imaginary axis; in [3] we have also tested formula (5) and compared it with (4) in the approximation of some integrals of type (1). In particular, for λ belonging to a neighbourhood of the extremes of the integration interval, we showed the better behaviour of (5), which has a suitable distribution of nodes in the upper unit half disc.

3. APPROXIMATING SPLINE METHODS

We point out that the above mentioned "Gaussian" or "extended Gaussian" methods as n increases converge very rapidly, when they do, if applied to integrals (1) with analytical functions. However very frequently the regular behaviour of function $f(x)$ is lost in practical applications.

Moreover, those formulas require that the function be calculated at the zeros of particular polynomials, what is not always convenient.

Facing such problems, recently an alternative approach, to evaluate (1), based on the spline approximation has been selected.

We recall that the spline functions of order p on $[a, b]$ are the piecewise polynomials of degree p in subintervals of $[a, b]$, with conditions of regularity in the connection points, which build the vector of definition of the splines [8].

A typical expression for such approximation is the following:

$$I \cong \sum_{i=1}^n w_i(\lambda) f(x_i)$$

where the set of points x_i ($i=1, 2, \dots, n$) is the so called mesh and $w_i(\lambda)$ ($i=1, 2, \dots, n$) are the weights evaluated through spline approximation.

In an early paper [6] an interpolating cubic spline ($p=3$), is proposed to approximate integral (1). To have convergence, the integrand function $f(x)$ is required to be continuous with its first derivative, in the integration interval, and the mesh to be equally spaced. Therefore, paper [6] doesn't effectively overcome the two drawbacks of Gaussian formulas.

In a subsequent paper [7] restrictions, as far as the function to be integrated is concerned, are slightly relaxed. However some strong limitations on the mesh are still present. Besides, some restrictions on the spline order and on border conditions are required.

Recently, in paper [12], Rabinowitz gives a new idea. Namely he proposes to apply, to approximate integral (1), a class of approximating splines of order p :

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) B_{i,p}(x)$$

where $B_{i,p}(x)$ are the B-splines [8] of order p , forming a basis for the spline space determined by p and by the vector of nodes $\Pi_n = (t_i, i = 1, 2, \dots, n)$, and x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are arbitrary points subjected only to the condition that x_i lies in the support of $B_{i,p}(x)$.

Consequently, as $f(x)$ is approximated by $S_n(x)$, then:

$$w_i(\lambda) = p.v. \int_{-1}^1 w(x) \frac{B_{i,p}(x)}{x - \lambda} dx$$

A particular case occurs when x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are the so-called Schoenberg points, precisely

$$x_i = \frac{t_{i+1} + t_{i+2} + \dots + t_{i+p-1}}{p-1}$$

in which case the spline is called variational diminishing Schoenberg spline (SVD).

In [4] we draw that the conditions on $f(x)$ for the convergence of the quadrature formula are the same as for the interpolating spline method [7].

We note that this method does not place any restriction neither on the order of the approximating spline, nor on the mesh. So the nodes of the mesh can have multiplicity greater than one and an arbitrary distribution.

This property is very useful because a suitable distribution of the nodes in the integration interval enables us to perform the irregularities of the function, (what is impossible with Gaussian formulas).

Some examples showing the advantages of the formula based on the SVD splines are also presented in [4, 5].

Moreover a new application of these formulas is presented in [5]. Precisely we have approximated the solution of the particular integro-differential equation known as Prandtl's equation. It must be noted that, as this equation presents the derivative of the unknown function in the CPV integral, then it has been necessary to provide a suitable adaptation of the formulas used in [4].

CONCLUDING REMARKS

In view of the application of quadrature formulas to the solution of integral equations with weighted CPV integrals the following remarks can be useful. If the model can be described by a sufficiently regular function, then gaussian or quasi-gaussian formulas realize computational advantages by a reduction of the order of the system (said collocation system), which provides the values of the unknown function.

On the contrary, if the model is described by a function of low order of regularity, then approximating splines perform better.

REFERENCES

1. F. CALIÒ, E. MARCHETTI, *Su alcune proprietà di una famiglia di polinomi in campo complesso*, Rend. Ist. Lombardo (Rend. Sc.), A 123 (1989), 207-213.
2. F. CALIÒ, E. MARCHETTI, *On the zeros of complex polynomials related to particular Gauss-Kronrod quadrature formulas*, Facta Universitatis (Nis), Ser. Math. Inform. 7 (1992), 49-57.
3. F. CALIÒ, E. MARCHETTI, *Complex Gauss-Kronrod integration rules for certain Cauchy principal value integrals*, Computing 50 (1993), 165-173.
4. F. CALIÒ, E. MARCHETTI, *Application of approximating splines to certain Cauchy principal value integrals*, Rend. Ist. Lombardo (Rend. Sc.), A 128 (1994), 139-146.
5. F. CALIÒ, E. MARCHETTI, P. RABINOWITZ, *The numerical solution of the Prandtl integral equation using variation diminishing splines*, To appear on J. Comp. Appl. Math.
6. C. DAGNINO, E. SANTI, *Spline product quadrature rules for Cauchy singular integrals*, J. Comp. Appl. Math. 33 (2) (1990), 133-140.
7. C. DAGNINO, E. SANTI, *On the convergence of spline product quadratures for Cauchy principal value integrals*, J. Comp. Appl. Math. (1993)
8. C. DE BOOR, *A practical guide to splines*, Appl. Math. Sci. 27 (Springer-Verlag, New York, (1978).
9. W. GAUTSCHI, G. V. MILOVANOVIC, *Polynomials orthogonal on the semicircle*, J. Approx. Theory 46 (1986), 230-250.
10. G. V. MILOVANOVIC *Complex orthogonality on the semicircle with respect to Gegenbauer weight: Theory and applications*, Topics in Mathematical Analysis (Th. M. Rassias, ed), World Scientific Publ. Co., Singapore (1989), 695-722.

11. G. MONEGATO, *The numerical evaluation of one dimensional Cauchy principal value integrals*, Computing 29 (1982), 337-354.
12. P. RABINOWITZ, *Numerical integration based on approximating splines*, J. Comp. Appl. Math. 33 (1990), 73-83.

SU ALCUNI q^2 - INSIEMI DI $AG(3,q)$ A TRE CARATTERI RISPETTO AI PIANI

Osvaldo Ferri^{*}, Stefania Ferri^{*}

SUNTO - Si studiano i q^2 -insiemi K di $AG(3,q)$ di classe $[1,q,n]_2$, rispetto ai piani. Si dimostra che deve necessariamente essere $n=q+1$, che K è di tipo $(1,q,q+1)_2$ e che è una q^2 -calotta e quindi, se q è dispari, è un paraboloide ellittico.

ABSTRACT - In this paper the q^2 -sets K of $AG(3,q)$ of class $[1,q,n]_2$ are studied. We prove that it has to be: $n=q+1$, K of type $(1,q,q+1)_2$ and K a q^2 -cap, and hence, if q is odd, an elliptic paraboloid.

INTRODUZIONE

0. Sia K un q^2 -insieme di uno spazio affine di Galois di dimensione tre e di ordine q , $AG(3,q)$. Seguendo le notazioni di [6], chiameremo carattere di indice i , rispetto ai piani, di K , il numero t_i dei piani di $AG(3,q)$ che intersecano K esattamente in i punti. Se $m_0, m_1, \dots, m_s$ sono interi tali che $m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_s$, diremo che K è di classe $[m_0, m_1, \dots, m_s]_2$, rispetto ai piani di $AG(3,q)$ se essi possono intersecare K solamente in $m_0, m_1, \dots, m_s$ punti, cioè $t_m = 0$ per ogni $m \neq m_0, m_1, \dots, m_s$; diremo che è di tipo $(m_0, m_1, \dots, m_s)_2$ se è di classe $[m_0, m_1, \dots, m_s]_2$ e $t_m \neq 0$ per ogni $m = m_0, m_1, \dots, m_s$. Inoltre l'intero m_s si chiama grado g_d di K .

In questo lavoro prendiamo in considerazione i q^2 -insiemi di classe $[1,q,n]_2$ e proviamo che deve essere necessariamente $n=q+1$ e che K è di tipo $(1,q,q+1)_2$ ed è una q^2 -calotta di $AG(3,q)$.

^{*} Dipartimento di Matematica, Università de L'Aquila.

SU ALCUNI q^2 -INSIEMI DI $AG(3,q)$

1. Vogliamo provare il seguente:

TEOREMA 1 - *Un q^2 -insieme di $AG(3,q)$ di classe $[1,q,n]_2$, rispetto ai piani, è tale che necessariamente $n=q+1$, risulta di tipo $(1,q,q+1)_2$ ed è una q^2 -calotta, cioè, se q è dispari, un paraboloide ellittico.*

DIMOSTRAZIONE: E' noto, cfr. [8], che tra i caratteri di un k -insieme di dimensione d di $AG(r,q)$ sussistono le relazioni:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{m_1} t_m = q^{r-d} \gamma_{r-1,d-1} \\ \sum_{m=1}^{m_1} m t_m = k \gamma_{r-1,d-1} \\ \sum_{m=2}^{m_1} m(m-1) t_m = k(k-1) \gamma_{r-2,d-2} \end{cases} \quad (1.1)$$

in cui, cfr. [6],

$$\gamma_{r,d} = \prod_{i=0}^d \frac{\theta_{r-i}}{\theta_{d-i}} \quad \text{per } d \geq 0 \quad \gamma_{r,1} = 1 \quad (1.2)$$

$$\text{e } \theta_n = \sum_{i=0}^n q^i.$$

Le (1.1) nel nostro caso diventano:

$$\begin{cases} t_1 + t_q + t_n = q^3 + q^2 + q \\ t_1 + q t_q + n t_n = q^2 (q^2 + q + 1) \\ q(q-1) t_q + n(n-1) t_n = q^2 (q^2 - 1)(q+1) \end{cases} \quad (1.3)$$

da cui si ricava:

$$t_1 = \frac{q^3}{n-1}, \quad t_q = q(q^2 + q + 1) - \frac{q^3}{n-q}, \quad t_n = \frac{q^3(q-1)}{(n-1)(n-q)}. \quad (1.4)$$

Facciamo ora vedere che per ogni punto P di K passa almeno un piano unisecante e quindi $t_1 \geq q^2$.

Infatti sia t una retta per P unisecante K , certamente esistente in quanto le rette che congiungono P con gli altri q^2-1 punti di K sono al massimo q^2-1 , mentre le rette di $AG(3,q)$ per P sono q^2+q+1 e $q^2+q+1 > q^2-1$ per ogni q .

I piani per t sono s -secanti, q -secanti o n -secanti K . Denotati con v_i ($i=1, q, n$) i numeri di tali piani, si ha:

$$\begin{cases} v_1 + v_q + v_n = q + 1 \\ (q-1)v_q + (n-1)v_n = q^2 - 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Se fosse $v_1=0$ si avrebbe dalla (1.5)_I $v_q+v_n=q+1$ e cioè $v_n=q+1-v_q$ che sostituito nella (1.5)_{II} dà $v_q=q+1$ e $v_n=0$, cioè tutti i piani per t sarebbero q -secanti K ed i punti di K sarebbero $(q+1)q-1=q^2+q-1 > q^2$ che è assurdo. Quindi per ogni punto di K passa almeno un piano 1-secante K e cioè $t_1 \geq q^2$.

Allora dalla prima delle (1.4) si ha:

$$\frac{q^3}{n-1} \geq q^2 \Rightarrow n-1 \leq q \Rightarrow n \leq q+1.$$

Ma essendo, per ipotesi, $n \geq q+1$ ne segue $n=q+1$.

Sempre dalle (1.4) si ha allora:

$$t_1=q^2, \quad t_q=q^2+q, \quad t_{q+1}=q^2(q-1),$$

e quindi il q^2 -insieme risulta, essendo i caratteri tutti diversi da zero, di tipo $(1, q, q+1)_2$.

Dimostriamo ora che K è una calotta cioè i suoi punti sono a tre a tre non allineati.

Sia s una retta h -secante K , con $2 \leq h \leq q$, certamente esistente perché K possiede piani q -secanti ($q \geq 2$). Detti w_q e w_{q+1} i numeri dei piani, per s , che siano rispettivamente q -secanti e $(q+1)$ -secanti K , si ha:

$$\begin{cases} w_q + w_{q+1} = q + 1 \\ (q-h)w_q + (q+1-h)w_{q+1} = q^2 - h \end{cases} \quad (1.6)$$

Dalle (1.6)_{II} si ha: $(q-h)(w_q+w_{q+1})+w_{q+1}=q^2-h$ e, per la (1.6)_I, segue: $(q-h)(q+1)+w_{q+1}=q^2-h$ cioè $w_{q+1}=(h-1)q$.

Essendo $w_{q+1} \leq q+1$ si ha $(h-1)q \leq q+1$ e cioè $h \leq 2+1/q$ cioè $h \leq 2$. Avendo supposto $h \geq 2$ ne segue che $h=2$ e quindi K è una q^2 -calotta. Tale q^2 -calotta di $AG(3, q)$ è in $PG(3, q)$, ampliamento di $AG(3, q)$, necessariamente incompleta e si completa in una (q^2+1) -calotta mediante un punto del piano improprio che risulta tangente alla (q^2+1) -calotta.

Se q è dispari la (q^2+1) -calotta di $PG(3, q)$ è una quadrica ellittica e quindi la q^2 -calotta di $AG(3, q)$ è un paraboloide ellittico.

Il teorema 1 risulta così provato.

BIBLIOGRAFIA

1. O. FERRI, *Sulle caratteristiche grafiche delle quadriche nello spazio affine*. Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993) 325-330.
2. B. SEGRE, *Lectures of modern geometries*. Cremonese Roma 1961.
3. G. TALLINI, *Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti*. 1.2. Atti Acc. Naz. Lincei Rend. 20 (1956) 311-317, 442-466.
4. G. TALLINI, *Sulle k -calotte di uno spazio lineare finito*. Ann. Mat. Pura Appl. 42 (1956), 119-164.
5. G. TALLINI, *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti*, Rend. Mat. Appl. 16 (1957) 328-351.
6. G. TALLINI, *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, relaz. n. 30 Ist. Mat. Univ. Napoli (1973) 1-30.
7. G. TALLINI, *Grafici e characterization of algebraic varieties in a Galois spaces*, Teorie combinatorie (Roma, settembre 1973) Accad. Naz. Lincei 1976.
8. G. TALLINI, *k -insiemi e blocking-set in $PG(2,q)$ ed $AG(2,q)$* . Quaderni di Geometrie Comb. Dipartimento Mat. Univ. L'Aquila, dicembre 1982.
9. G. TALLINI, *Teoria dei K -insiemi in uno spazio di Galois, Teoria dei codici correttori*. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. Univ. Roma La Sapienza. Quaderno 64, 1985.

SU UNA CLASSE DI MODELLI MATEMATICI PER L'URBANISTICA

Antonio Maturo^{*}, Loredana Renzullo^{*}

SUNTO - Si studia una classe molto generale di *modelli matematici* per l'Urbanistica, dipendente da due parametri. Essa ha come casi particolari il *modello gravitazionale* e le sue più note generalizzazioni ed il *modello esponenziale*. Si esaminano le varie proprietà del modello al variare dei parametri. Successivamente si fissano le *proprietà matematiche* più generali che si ritiene debbano essere soddisfatte dai modelli matematici relativi agli spostamenti di individui.

ABSTRACT - In this paper a two parameter general *mathematical model* for the urbanistic applications is considered. The *exponential* and *gravitational models* are very particular cases. We examine the properties of the model with all the possible values of the parameters. Therefore we assign the most general *mathematical properties* that we think must be satisfied by the mathematical models concerning the people flows.

INTRODUZIONE

L'architetto interviene con un progetto per modificare, migliorandola, la situazione di un edificio, di una strada, di una parte della città, oppure per costruire qualcosa ex-novo. Esiste tuttavia il problema, spesso ignorato, di vedere l'effetto che gli interventi producono sulle altre parti della città, della regione e del territorio. Molti architetti intuiscono tale effetto descrivendolo in maniera qualitativa o empirica. Tuttavia, di solito, l'entità delle

^{*} Dipartimento di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro, Università G. d'Annunzio, Viale Pindaro 42, Pescara

conseguenze a distanza spaziale o temporale di un intervento può essere correttamente valutata solo per mezzo di adeguati modelli matematici che prendono in considerazione le variabili quantitative che influenzano il sistema e le relazioni fra esse. Può capitare che il singolo architetto, assillato dalla necessità di portare a termine rapidamente e con competenza tecnica i vari progetti, non abbia l'occasione di approfondire lo studio degli effetti *lontani* causati dalla casa che fa costruire o della strada che fa modificare. Spesso tale compito è lasciato ai politici e agli amministratori. Questi ultimi, a loro volta, capiscono che la singola opera ha un impatto su tutto l'ambiente circostante, ma riescono a percepirne la portata solo parzialmente senza riuscire a valutare quantitativamente in quale misura l'intervento interagisce con il complesso delle altre attività e dell'esistente e come cambiano tali interazioni al variare delle grandezze in gioco.

Una sufficiente comprensione del comportamento del sistema urbano sottoposto a modifiche è possibile solo se si utilizza un modello matematico in cui sono ben precisate le *variabili più significative* e le *più importanti relazioni quantitative* fra esse. Tali modelli sono spesso oggetto di numerose critiche basate in gran parte sul fatto che di solito vengono trascurate molte variabili ritenute *non essenziali*. Ciò, però, è necessario per non appesantire il modello rendendolo poco comprensibile, di uso complesso e quindi, in definitiva, di scarsa utilità pratica. Inoltre sono semplificate, spesso linearizzate, le relazioni fra le variabili. Di solito vengono prese in considerazione relazioni valide solo a livello macroscopico o statistico, spesso esprimendo dei comportamenti di massa intuiti dal ricercatore, in base a osservazioni, e che solo parzialmente possono essere sottoposti a verifica sperimentale.

Tuttavia, ricalcando una nota *pseudodefinizione di ricerca operativa*, i modelli matematici indicano come *fare male* quelle valutazioni che *altrimenti verrebbero fatte peggio*. Infatti un modello matematico dà comunque delle valutazioni quantitative che, se si rivelano insoddisfacenti ad un'analisi sperimentale, possono essere rese più corrette analizzando meglio, alla luce dell'esperienza, le ipotesi che sono alla base del modello, cercando quali delle variabili trascurate può essere necessario inserire nel modello ed analizzando con i metodi statistici e probabilistici come valutare, per mezzo di variabili casuali, l'effetto delle variabili trascurate, considerando ad esempio una distribuzione di probabilità per la loro somma ed infine istituendo dei metodi di controllo, ad esempio per mezzo della simulazione, dell'effetto delle variabili extrasperimentali.

I modelli si basano su delle ipotesi che danno luogo a delle equazioni differenziali, talvolta di tipo stocastico, e quindi a soluzioni rappresentate da famiglie di curve, superfici e varietà, dipendenti da parametri.

Per formulare un modello è importante capire:

- (a) come si formulano le ipotesi;
- (b) come si ottengono le varietà che descrivono il modello;
- (c) come si generalizza il modello, ampliando le possibilità di utilizzazione e trattando modelli apparentemente diversi come casi particolari;
- (d) come si passa da un modello deterministico ad uno probabilistico, ossia come si tiene conto delle variabili trascurate, valutando l'effetto di tante piccole variabili per mezzo di poche variabili aleatorie;
- (e) come si confrontano i dati ottenuti sperimentalmente con quelli teorici del modello.

In questo lavoro si affrontano i vari problemi e si propongono delle soluzioni. Per far capire la metodologia suggerita, i criteri logici proposti etc., si parte dalla considerazione di un modello noto e abbastanza usato come quello gravitazionale, si analizza la logica su cui esso si basa e si mostra come esso possa essere generalizzato per vari scopi, ottenendo così modelli che hanno come casi particolari oltre a quelli gravitazionali altri di notevole interesse.

1 - ANALISI DEGLI SPOSTAMENTI PER MEZZO DEL MODELLO GRAVITAZIONALE

Siano $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ n zone e sia $S_{i,j}$ il numero di persone che si sposta (per lavoro, acquisti o altro, in via provvisoria o definitiva) dalla zona Z_i alla zona Z_j , con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Se si è interessati solo a spostamenti fra due zone diverse, si pone $S_{ii} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sia

$$S_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} \quad (\text{n}^\circ \text{ di persone che si spostano a partire da } Z_i),$$

$$S_j = \sum_{i=1}^n S_{ij} \quad (\text{n}^\circ \text{ di persone che si spostano arrivando in } Z_j).$$

Allora il numero totale di persone che si spostano è

$$S = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{j=1}^n S_j.$$

Indichiamo con A_i il numero di abitanti della zona Z_i . Si ottiene la matrice Σ degli spostamenti :

zona di partenza ↓	arrivo →	Z_1	Z_2			Z_j			Z_n	colonna marginale
abitanti ↓ →		A_1	A_2			A_j			A_n	
Z_1	A_1	S_{11}	S_{12}			S_{1j}			S_{1n}	$S_{.1}$
Z_2	A_2	S_{21}	S_{22}			S_{2j}			S_{2n}	$S_{.2}$
Z_i	A_i	S_{i1}	S_{i2}			S_{ij}			S_{in}	$S_{.i}$
Z_n	A_n	S_{n1}	S_{n2}			S_{nj}			S_{nn}	$S_{.n}$
riga marginale		$S_{.1}$	$S_{.2}$			$S_{.j}$			$S_{.n}$	S

Dalla matrice Σ , valutando le probabilità in senso frequentista, si ottengono le probabilità dei seguenti eventi :

$$E_{ij} = \text{" un individuo di } Z_i \text{ va in } Z_j \text{ "}$$

$$H_i = \text{" un individuo di } Z_i \text{ si sposta "}$$

$$E_{ij} / H_i = \text{" un individuo di } Z_i \text{, se si sposta, va in } Z_j \text{ "}$$

$$F_{ij} = \text{" un individuo che arriva in } Z_j \text{ proviene da } Z_i \text{ "}$$

Risulta

$$p(E_{ij}) = \frac{S_{ij}}{A_i}, \quad p(H_i) = \frac{S_{.i}}{A_i},$$

$$p(E_{ij} / H_i) = \frac{S_{ij}}{S_{.i}}, \quad p(F_{ij}) = \frac{S_{ij}}{S_{.j}}.$$

Dalla matrice degli spostamenti si possono allora ottenere le matrici delle probabilità:

$$p_{ij} = p(E_{ij}), \quad q_{ij} = p(E_{ij} / H_i), \quad f_{ij} = p(F_{ij}).$$

Ponendo $h_i = p(H_i)$, segue:

$$p_{ij} = q_{ij} h_i,$$

formula che si poteva dedurre dal teorema della probabilità composta essendo $E_{ij} \subseteq H_i$ e quindi:

$$p(E_{ij}) = p(E_{ij} H_i) = p(E_{ij} / H_i) p(H_i).$$

Per spiegare gli spostamenti da un punto di vista teorico alcuni hanno assunto l'ipotesi che l'entità S_{ij} degli spostamenti da Z_i a Z_j sia proporzionale al numero degli abitanti di Z_i , a quello di Z_j e all'inverso del quadrato delle distanze. Quindi è stata considerata la formula:

$$S_{ij} = c \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2} \quad (1)$$

con r_{ij} distanza fra Z_i e Z_j .

La formula (1) può essere giustificata dal fatto di considerare i numeri di abitanti delle zone Z_i e Z_j come misure di due *masse* che si attraggono. Applicando la *legge di gravitazione universale*, la forza di attrazione fra la massa in Z_i e quella in Z_j è allora:

$$F_{ij} = k \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}. \quad (2)$$

Ammettendo per le *masse degli individui* un comportamento simile a quello dei *corpi elastici*, per la legge di Hooke si ha una deformazione S_{ij} , conseguenza della forza F_{ij} del tipo:

$$S_{ij} = h F_{ij}. \quad (3)$$

Ponendo $h k = c$ si ottiene la (1).

Indichiamo, in seguito, con α^* la stima di una grandezza α in base al modello teorico considerato.

Il confronto fra il modello teorico (1) ed una distribuzione di spostamenti osservata può essere fatto utilizzando le probabilità

$$q_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_i} \quad \text{e} \quad q_{ij}^* = \frac{S_{ij}^*}{S_i^*}.$$

Si ha $S_i^* = c \sum_{j=1}^n \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}$, $S_{ij}^* = c \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}$, per cui

$$q_{ij}^* = \left(\frac{A_j}{r_{ij}^2} \right) / \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{r_{ij}^2}. \quad (4)$$

Il confronto fra le q_{ij} e le q_{ij}^* , dati, rispettivamente, *empirici e teorici*, ci permette di valutare la bontà del *modello*.

La costante c può essere determinata imponendo che

$$\sum_{i=1}^n S_i^* = \sum_{j=1}^n S_j^* = S.$$

Infatti si ha

$$S = c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}$$

e quindi

$$c = S / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}. \quad (5)$$

2 - UNA ANALISI ED UNA GENERALIZZAZIONE DEL MODELLO GRAVITAZIONALE

Nella formula (1) A_i è la *massa attratta* e A_j è la *massa che attrae*. Dal punto di vista urbanistico non necessariamente tali grandezze devono essere omogenee.

Può essere ragionevole accettare che la massa attratta sia rappresentata dal numero di persone, ma probabilmente la massa che attrae può essere data dalla misura di certe caratteristiche della zona di arrivo. In generale, per ogni zona Z_i , indichiamo con $m(Z_i)$ la *massa attratta* posta in Z_i e con $a(Z_j)$ la *misura dell'attrattività* della zona. Il modello gravitazionale, allora, si può generalizzare ammettendo la formula:

$$S_{ij} = c \frac{m(Z_i) a(Z_j)}{r_{ij}^2}. \quad (6)$$

Ammettiamo che le zone Z_i formino una partizione di una certa regione considerata ed indichiamo con δ il diametro della partizione. Al tendere di δ a zero le zone tendono a diventare puntiformi. Poniamo

x = punto di partenza;
 y = punto di arrivo;
 $\mu = \mu(x)$ = densità in x della massa attratta;
 $\alpha = \alpha(y)$ = densità in y della misura di attrattività;
 $r = r(x,y)$ = distanza fra x ed y ;
 $\sigma = \sigma(x,y)$ = densità degli spostamenti fra x ed y .

Per ogni ij indichiamo con ΔZ_i l'area della zona Z_i e con $S(Z_i, Z_j)$ il numero di spostamenti dalla zona Z_i alla zona Z_j . Si ottiene

$$\mu(x) = \lim_{Z_i \rightarrow x} \frac{m(Z_i)}{\Delta Z_i}, \quad (7)$$

$$\alpha(y) = \lim_{Z_j \rightarrow y} \frac{a(Z_j)}{\Delta Z_j}, \quad (8)$$

$$\sigma(x,y) = \lim_{\substack{Z_i \rightarrow x \\ Z_j \rightarrow y}} \frac{S(Z_i, Z_j)}{\Delta Z_i \Delta Z_j}. \quad (9)$$

Dividiamo ambo i membri della (6) per $\Delta Z_i \Delta Z_j$. Facendo tendere il diametro δ della partizione a zero, tenuto conto della (7), (8) e (9), si ottiene

$$\sigma(x,y) = c \frac{\mu(x)\alpha(y)}{r^2(x,y)}. \quad (10)$$

Dalla (10), derivando, segue

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} = c \frac{\alpha}{r^2} = \frac{\sigma}{\mu}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = \frac{\sigma}{\alpha}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = (-2) \frac{\sigma}{r}; \quad (13)$$

da cui

$$d\sigma = \frac{\sigma d\mu}{\mu} + \frac{\sigma d\alpha}{\alpha} - 2 \frac{\sigma dr}{r}. \quad (14)$$

Dalla (14), dividendo ambo i membri per σ ed integrando si risale alla (10).

Una immediata generalizzazione del modello gravitazionale si ottiene sostituendo la (13) con la

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = (-h) \frac{\sigma}{r}, \text{ con } h > 0 \quad (15)$$

e lasciando invariate le (11) e (12). Si ottiene

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\alpha}{\alpha} + (-h) \frac{dr}{r}, \text{ con } h > 0, \quad (16)$$

e integrando si ha

$$\sigma(x,y) = c \frac{\mu(x)\alpha(y)}{r^h(x,y)}. \quad (17)$$

Per $h=2$ si ha il modello gravitazionale. La costante h misura, in un certo senso, l'avversione ai lunghi spostamenti. Per h elevato si verificano, in pratica, solo piccoli spostamenti. Ciò avviene, ad esempio, se si vogliono effettuare acquisti di poco conto. Per h piccolo si verificano facilmente anche lunghi spostamenti. Ad esempio è il caso di acquisti importanti come un'automobile o di spostamenti per motivi di lavoro.

Chiamiamo *modelli quasi gravitazionali* quelli che verificano la (17).

3 - SU UN 'AMPIA CLASSE DI MODELLI ATTRATTIVI

Una generalizzazione della (13) abbastanza ampia si ottiene ponendo

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = -\frac{h}{r^\beta} \sigma, \text{ con } \beta \in \mathcal{R} \text{ e } h > 0 \quad (18)$$

e lasciando invariate la (11) e la (12).

Il rapporto $\frac{\partial \sigma}{\partial r} / \sigma$ è negativo, come nel modello quasi gravitazionale. Il suo valore assoluto decresce al crescere di r per $\beta > 0$, cresce al crescere di r per $\beta < 0$ ed è costante rispetto ad r per $\beta=0$.

Si ottiene :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\alpha}{\alpha} + (-h) \frac{dr}{r^\beta}, \text{ con } h > 0, \quad (19)$$

da cui

$$\log \sigma = \log \mu + \log \alpha + \int -\frac{h}{r^\beta} dr. \quad (20)$$

Per $\beta \neq 1$ si ha

$$\int -\frac{h}{r^\beta} dr = \frac{-h}{-\beta+1} r^{-\beta+1} + k. \quad (21)$$

Per $\beta = 1$ si ha

$$\int -\frac{h}{r} dr = -h \log r + k \quad (22)$$

Poniamo in ambo i casi $k = \log c$, con c costante positiva. Si ottiene allora:

$$\log \sigma = \log c \mu \alpha + F(r), \quad (23)$$

con

$$F(r) = \begin{cases} -\frac{h}{-\beta+1} r^{-\beta+1} & \text{per } \beta \neq 1 \\ -h \log r & \text{per } \beta = 1 \end{cases} \quad (24)$$

e quindi

$$\sigma = c \mu \alpha e^{F(r)}. \quad (25)$$

Analizziamo i vari casi:

(a) caso $\beta < 1$

Si ha che $-\frac{h}{-\beta+1} < 0$. Inoltre $r^{-\beta+1}$ è strettamente crescente. Si ha che $F(r)$ è non positiva e strettamente decrescente e risulta $F(0) = 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = -\infty$. Allora, per la (25), σ è strettamente decrescente, uguale a $c \mu \alpha$ per $r=0$ e nullo per $r=+\infty$.

Per $\beta = 0$, la (25) si riduce alla :

$$\sigma = c \mu \alpha e^{-hr} \quad (26)$$

e si ottiene il **modello esponenziale**.

(b) caso $\beta > 1$

Si ha che $-\frac{h}{-\beta+1} > 0$. Inoltre $r^{-\beta+1}$ è strettamente decrescente.

La $F(r)$ è non negativa e strettamente decrescente. Inoltre $\lim_{r \rightarrow +0} F(r) = +\infty$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$. Allora, per la (25), σ è strettamente decrescente, uguale a $+\infty$ per $r=0$ e uguale a $c \mu \alpha$ per $r=+\infty$.

(c) caso $\beta = 1$

E' il caso di frontiera fra i due precedenti. La $F(r)$ è positiva per $r < 1$, si annulla per $r=1$ ed è negativa per $r > 1$. Inoltre è strettamente decrescente e si ha $\lim_{r \rightarrow +0} F(r) = +\infty$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = -\infty$, per cui σ è strettamente decrescente, uguale a $+\infty$ per $r=0$, uguale a $c \mu \alpha$ per $r=1$ e si annulla per $r = +\infty$. Si ottiene il modello quasi gravitazionale.

4 - CONSIDERAZIONI GENERALI

La (18) è un caso particolare della

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = -f(r)\sigma \quad (27)$$

con le condizioni :

(a) $f(r) > 0$, $\forall r > 0$;

(b) $f(r)$ è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso contenuto in $(0, +\infty)$.

Dalla (27), fissato $r_0 \in (0, +\infty)$, si ottiene :

$$\log \sigma = - \int_{r_0}^r f(t) dt + \log \lambda, \quad \text{con } \lambda = \lambda(\alpha, \mu),$$

e quindi

$$\sigma = \lambda e^{-\int_{r_0}^r f(t) dt} \quad (28)$$

Se ammettiamo le condizioni :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \sigma, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu} \sigma \quad (29)$$

si ottiene

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} \lambda, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu} \lambda \quad (30)$$

da cui

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} d\alpha + \frac{1}{\mu} d\mu,$$

$$\log \lambda = \log \alpha + \log \mu + \log c, \quad \text{con } c \text{ costante,};$$

$$\lambda = c \alpha \mu$$

e quindi

$$\sigma = c \alpha \mu e^{-\int_{r_0}^r f(t) dt} \quad (31)$$

La funzione:

$$F(r) = -\int_{r_0}^r f(r) dr. \quad (32)$$

è continua e, poiché $f(r) > 0$, $\forall r > 0$, è strettamente decrescente. Inoltre è positiva per $r < r_0$ ed è negativa per $r > r_0$. Se esiste un intervallo $[0, a]$,

con $a > 0$, in cui $f(r)$ è limitata allora si può assumere, nella (32), $r_0 = 0$. In tal caso, per ogni $r > 0$, risulta $F(r) < 0$ e $F(0) = 0$.

Un caso notevole è quello in cui $f(r)$ è *monotona*. Allora è necessariamente soddisfatta la condizione di integrabilità (b).

Se la $f(r)$ è crescente (in particolare costante), essendo non negativa, esiste un intervallo $[0, a]$, con $a > 0$, in cui $f(r)$ è limitata. Assumendo $r_0 = 0$ segue che $F(0) = 0$. Inoltre $\forall n \in N_1$ risulta:

$$\int_{r_0+n}^{r_0+n+1} f(t) dt \leq \int_{r_0+n+1}^{r_0+n+2} f(t) dt, \text{ per cui } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = +\infty$$

e quindi $F(+\infty) = -\infty$. In tal caso σ è *strettamente decrescente*, uguale a $c \mu \alpha$ per $r=0$ e nullo per $r=+\infty$.

In particolare si ottiene questo caso per

$$f(r) = -\frac{h}{r^\beta}, \quad \text{con } \beta \leq 0, \quad h > 0.$$

Se la $f(r)$ è strettamente decrescente risulta $F(0) > 0$ e può verificarsi che tale valore sia finito o infinito. Inoltre

$$\int_{r_0+n}^{r_0+n+1} f(t) dt > \int_{r_0+n+1}^{r_0+n+2} f(t) dt,$$

per cui può essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = k,$$

con k numero reale positivo. Nel primo caso è ancora $F(+\infty) = -\infty$ e quindi $\sigma(+\infty) = 0$, nel secondo caso risulta $\sigma(+\infty) = c \mu e^{-k}$.

In particolare si ottiene il primo caso per

$$f(r) = -\frac{h}{r^\beta}, \quad \text{con } 0 < \beta \leq 1, \quad h > 0$$

ed il secondo caso per

$$f(r) = -\frac{h}{r^\beta}, \quad \text{con } \beta > 1, \quad h > 0.$$

BIBLIOGRAFIA

1. C. BERTUGLIA, G. RABINO, *Modello per l'organizzazione di un comprensorio*, Guida Editori Napoli, 1975
2. J. BOUDEVILLE, *Lo spazio e i poli di sviluppo*, Franco Angeli, 1977
3. R. CAMAGNI, *Economia Urbana, Principi e modelli teorici*, La Nuova Italia Scientifica Edizioni
4. N. CERA, A. MATURO, *Calcolo delle probabilità e statistica con applicazioni allo studio del territorio*, Montefeltro Edizioni Urbino, 1980
5. F. FORTE E ALTRI, *Metodologia urbanistica, ricerca operativa, modellistica urbana*, Guida Editori Napoli, 1972
6. J. MASSER, *Modelli analitici per la pianificazione urbana e regionale*, Officina Edizioni Roma, 1976

WHAT IS INSIDE A PROBABILISTIC EXPERT SYSTEM ?*

Giuseppe Di Biase**

SUNTO - Si illustra il funzionamento di un sistema esperto probabilistico senza soffermarsi sugli aspetti teorici che sono stati studiati in molti lavori, tra i quali vedi quelli citati in bibliografia. Ci si muove nell'ambito della teoria della probabilità soggettiva di de Finetti. Una volta verificata la coerenza di un assegnamento di probabilità su pochi eventi condizionati presi inizialmente in considerazione in merito ad un problema che si vuole studiare, il teorema fondamentale della probabilità soggettiva ci assicura l'esistenza di un prolungamento coerente della probabilità a nuovi eventi che rappresentano nuove informazioni che si acquisiscono durante l'analisi del problema. Il procedimento viene illustrato attraverso cinque esempi che possono rappresentare alcune situazioni tipiche in cui ci si può imbattere durante l'analisi di casi concreti collocati nell'ambito dell'incertezza.

ABSTRACT - This paper is an outline of how a probabilistic expert system works, therefore the theoretical details have been omitted. They have been widely dealt with e. g. in the quoted references. The framework is the one of de Finetti's theory. His fundamental theorem allows us to consider at first only the probability distribution on some of the events of interest and then, when new information gets into the system, to extend to other conditional events in a coherent way. Five examples that consider several typical situations one can come up against are illustrated. They allow us to have a general understanding of how a probabilistic expert system works.

* Work partly supported by C.N.R.- research grant "Matematica per la tecnologia e la società" (Resp. Prof. G. Coletti), contributed paper at Workshop "Modelli decisionali per sistemi intelligenti", Perugia 16-18 Novembre 1995.

** Dipartimento di Scienze - Viale Pindaro 42 - 65127 Pescara.

INTRODUCTION

A probabilistic expert system is a tool of Artificial Intelligence that should help, but not substitute, a decision maker with reference to an analyzing problem in various fields of science.

We assume that the judgements of the experts in their own fields of interest can be synthesized by means of conditional events. The framework is the subjective probability theory, introduced by de Finetti. His fundamental theorem allows us to consider at first only the probability distribution on some of the events of interest and then, when new information gets into the system, to extend to other conditional events in a coherent way. This is in opposition to the classical probability theory which considers the complete space of all possible cases.

THE FRAMEWORK

The knowledge base of the expert system is formed by a finite family of conditional events $\{E_i / H_i, i \in I\}$, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ plus the logical constraints (equivalences, implications, compatibility relations, etc.) among the family of standard events $\{E_i, H_i, i \in I\}$. Moreover a probability distribution on the family must be assessed. We denote by $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ such an assessment. As far as the notation is concerned we use the symbol without subscript to indicate a vector and the same symbol with subscript for the components of the vector.

We recall that a conditional event E / H (E given H , that is the event E supposing that the event H is true) is regarded as a three valued event. Denoting by EH the logical product between E and H and by $\neg E$ the logical negation of the event E , it is true if EH occurs, false if $(\neg E)H$ occurs and indefinite if $\neg H$ does not occur. If we consider the indicator function of E given H , it assumes the values 1, 0 or $p(E / H)$ respectively in the three cases mentioned above.

It is helpful to introduce the concept of atoms associated with E / H . They are the elements of the set $\{EH, (\neg E)H, \neg H\}$. This is a partition of the certain event Ω . So the atoms associated with the family assessed can be represented by the logical products in all possible way. In others words each atom can be represented by $A_1 A_2 \dots A_n$, different from the impossible event $\emptyset$, where, for each i belonging to I , A_i belongs to $\{E_i H_i, (\neg E_i) H_i, \neg H_i\}$.

The cardinality of the family of atoms is at most equal to 3^n . So it increases in an exponential way when the conditional events of interest rises and then a computational difficulty appears.

We have implemented an expert system on the Mathematica software that reduces this expansion because the knowledge base is updated step by step by considering each time the logical constraints among the standard events. Obviously the efficiency is related to the size of the family of events considered, or even more to the logical constraints among them.

Since we handle conditional events in different probability spaces their consistency is not trivial. The coherence of the probability assessment must be checked. For the theoretical aspects see i. e. COLETTI [1], CRISMA [3], DE FINETTI [4], DI BIASE-MATURO [7], GILIO [9], HOLZER [14], REGAZZINI [16], SCOZZAFAVA [17], VIGIG [21].

RIGHT TO THE HEART OF THE PROCEDURE

Let $\{C_i, i \in J\}$, $J = \{1, 2, \dots, s\}$, $s \leq 3^n$ the family of the atoms associated with our conditional events. Assessed p we need to see if there exist s real numbers q_i 's such that

$$\begin{cases} \sum_{C_k \subseteq E_i H_i} q_k - p_i \sum_{C_k \subseteq H_i} q_k = 0, & i \in I \\ \sum_{k \in J - \{s\}} q_k + q_s = 1 \\ q_k \geq 0 \quad \forall k \in J \end{cases} \quad (1)$$

The system (1) is a constrained linear system of $n+1$ equations in s unknowns and s constraints. If the system (1) is compatible then the assessment p is coherent and the unknowns can be regarded as the probabilities of the atoms. Let S be the set of solutions q of system (1).

Notice that the unknown associated with the atom C_s appears only once in system (1). This variable is useful to run our algorithm, see DI BIASE [6] and DI BIASE-MATURO [8], and so it will not be dropped, although the probabilistic consistency imposes $q_s = 0$ in both cases $C_s = \emptyset$ and $C_s \neq \emptyset$.

Notice that the first n equations of (1) apply the multiplication theorem of probability which represents a necessary and sufficient condition for the coherence. But some equations could be satisfied in a trivial way, that is it could happen $p(H_i) = 0$ for some $i \in I$. In other words the set A defined below could be different from the empty one:

$$A = \left\{ i \in I : \exists q_k \in q : \sum_{C_k \subseteq H_i} q_k = 0 \right\} \neq \emptyset.$$

In this case the multiplication theorem for $i \in A$ still holds, but not in a signifying way because all assessments p are coherent. Nevertheless checking the coherence of $\{p_i, i \in A\}$ is enough, as proved by COLETTI [2] and GILIO [10]. Whereas their algorithms repeat the procedure by considering each time the subsystems formed by equations corresponding on the $i \in A$ and by finding each time the family of the atoms associated with $\{E_i | H_i, i \in A\}$, here many computational problems are solved; for details see DI BIASE [5] and DI BIASE-MATURO [7].

In order to do this we consider the null space associated with each solution q belonging to S :

$$K(q) = \{k \in J - \{s\} : q_k = 0\}$$

Obviously if $K(q) = \emptyset$ then the components are all positive real numbers and the procedure stops, else we search for other solutions of system (1) by means of the following results proved in DI BIASE [6] and DI BIASE-MATURO [8].

Result 1. The trivial solution $q = (0, 0, \dots, 1)$ always exists.

Result 2. Each convex combination of two vectors q belonging to S is a solution too.

Result 3. There exists a solution of system (1) with $q_s < 1$ if and only if another solution in which $q_s = 0$ exists.

From a numerical viewpoint solving the following optimization problems is enough:

$$\begin{cases} \min_{q \in S} q_s \\ \text{subject to system (1)} \end{cases} \quad (2)$$

By applying result 3, if such minimum is less than one we put it equal to zero. Let q_0 be that minimum.

In particular in DI BIASE [6] we coded a module which allows to determine two types of solutions: a q_1 -type by solving a problem (2) and a q_2 -type through a convex combination of solutions previously found. Let q_1 and q_2 be such solutions.

Since $K(q_2) = K(q_0) \cap K(q_1)$ it is $K(q_2) \subseteq K(q_1)$. It follows

$$\text{card}K(q_2) \leq \text{card}K(q_1) \quad (3)$$

Now if in (3) the strictly inequality holds the procedure will stop after a finite number of steps because we will find a $K(q_2) = \emptyset$. Else if equality holds, being $A \neq \emptyset$, we have

$$\{E_i | H_i, i \in A\} \subset \{E_i | H_i, i \in I\}$$

and then the algorithm will stop after a finite number of steps too.

In such a case we search for the solutions by updating the auxiliar atom putting

$$C_s = C_s \cup \left(\bigcup_{i \in K(q)} Y C_i \right)$$

and minimizing q_s subject to system (1) in which we swap $i \in I$ with $i \in A$.

SOME EXAMPLES

For a theoretical solution of the following examples see GILIO [12] and SCOZZAFAVA [18]. Here we show their automatic solution implemented on the Mathematica software. For details of this implementation see DI BIASE [5] and [6]. The symbols $\&\&$ and $!$ indicate respectively the logical product and the logical negation, see i.e. MAEDER [15]. For explanation we write only some items of the implementation. Finally we would like to emphasize the use of Mathematica system especially for its ability to compute a large number of logic operations and problems of linear programming that are tedious to code and difficult to code correctly. The typical interactivity of this program, while handling expert systems, also is appreciated. Last but not least we find out that this software is very fit for checking the coherence of probability assessments, in fact its way of thinking is similar to our own, especially as far as the probabilistic and logical problems are concerned. Moreover it can simplify these problems identifying the events and their numerical values (the probabilities) with the same symbol.

Example 1. There are four conditional events e_1 / h_1 , e_2 / h_2 , e_3 / h_3 , e_4 / h_4 , such that $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$, $h_3 = h_1 \&\& h_2$. Given $p = (0.8, 0.01, 0.04, 0.1)$ it happens every time card $K(q_2) < K(q_1)$, then the module "solutions" run many time until it finds a solution with all positive components, see Out[18]. Notice that the items related to the building of the family of the atoms associated with the given events are left out. The atoms are collected in the

vector d which appears beginning from `ln[12]`. The same happens in all other reported examples.

```

In[1]:=
  F={{e,h1},{e,h2},{e,h3},{e,h4}};
  prob={0.8,0.01,0.04,0.1};

In[2]:=
  h3=p[h1,h2];

In[12]:=
  p=ConstrainedMin[ob1,equations,d];
  sol1=d/.p[[2]]

Out[12] =
  {0, 0, 0.0222222, 0.777778, 0, 0, 0.2, 0, 0, 0,
   0, 0, 0, 0, 0}

In[15]:=
  solutions[x_,y_]:=Module[{ob,mx,sol,verasol},
    ob=Apply[Plus,x];
    mx=ConstrainedMax[ob,equations,d];
    sol1=d/.mx[[2]]; verasol=(y+sol)/2]

In[16]:=
  auto=solutions[nul[d,sol1],sol1]

Out[16]=
  {0, 0, 0.0111111, 0.388889, 0, 0, 0.1,
   0, 0.005, 0, 0.045, 0.45, 0, 0, 0}

In[17]:=
  While[Count[auto,0] > 0,
    auto=solutions[nul[d,auto],auto]]; Print[auto]

Out[18]=
  {0.000641026, 0.00128205, 0.0172676, 0.221675,
   0.0153846, 0.0307692, 0.0015625, 0.0125,
   0.000078125, 0.005, 0.144934, 0.502031,
   0.0015625, 0.0140625, 0.03125}

```

Example 2. There are three conditional events e_1 / h_1 , e_2 / h_2 , e_3 / h_3 , such that $e_1 = e_3 = A$, $h_1 = e_2 = B$, $h_2 = h_3 = C$, where $A \Rightarrow B \Rightarrow C$. Given

$p = (0.2, 0.3, 0.1)$ it happens the probability of auxiliar atom is equal to one, see Out[15], then the assessment is not coherent.

```

In[1]:=
  family={ {A,B},{B,C},{A,C}};
  prob={0.2,0.3,0.1};

In[6]:=
  d={A, B && !A, C && !B, !B && !C}

In[12]:=
  equations[ Append[equations, normalize]

Out[12]=
  {0.2 (A + (B && !A)) == A,
   0.3 (A + (B && !A) + (C && !B))
   == A + (B && !A),
   0.1 (A + (B && !A) + (C && !B) == A,
   A+(B && !A)+(C && !B)+(!B && !C) == 1}

In[13]:=
  obl = !B && !C

In[14]:=
  p = ConstrainedMin[obl,equations,d];

In[15]:=
  sol1=d/.p[[2]]

Out[15]=
  {0, 0, 0, 1}

In[16]:=
  If[Last[sol1]==0,Print["MUST FIND OTHER SOL."],
  Print["THE ASSESSMENT IS NOT COHERENT"]]

Out[16]=
  THE ASSESSMENT IS NOT COHERENT

```

Example 3. Same family of conditional events of previous example, but different probability assessment: $p = (0.2, 0.3, 0.06)$. In this case the last component of vector q_0 in Out[29] is less than one, then assessment p could be coherent. Because we find all essential atoms with positive

probabilities the procedure could be stopped, but for explanation we search for the null space associated. Since it is empty, see Out[34], there is coherence.

On the other hand it is easy to prove that the assessment is coherent if and only if $p_3 = p_1 p_2$.

```

In[21]:=
  family={{e1,h1},{h1,h2},{e1,h2}};
  prob={0.2,0.3,0.06};

In[28]:=
  p = ConstrainedMin[obl,equations,d];

In[29]:=
  sol1=d/.p[[2]]

Out[29]=
  {0.06, 0.24, 0.7, 0}

In[30]:=
  If[Last[sol1]==0,Print["MUST FIND OTHER SOL."],
    Print["THE ASSESSMENT IS NOT COHERENT"]]

Out[30]=
  MUST FIND OTHER SOL.

In[31]:=
  sol1=Drop[sol1,-1];

In[32]:=
  null[x_,y_]:=Part[x,Flatten[Position[y,0]]]

In[33]:=
  facs=Table[d[[i]]->i, {Length[d]}];
  ddfacs=Dispatch[facs];

In[34]:=
  null[d,sol1] /. ddfacs

Out[34]=
  {}

In[35]:=
  If[Length[%]==0,Print["Coherent"],Print["Goes on"]]

```

Out[35]=
Coherent

Example 4. We update the family of example 3 with a fourth conditional event E / B such that $E \Rightarrow !A \ \&\& \ B$ where E is different from the impossible event. We have a collection of five atoms, see In[10], usually denoted by d . Given $p = (0.2, 0.3, 0.06, 0.5)$ we find a solution with their last component less than one, see Out[12]. Since the other components are all positive numbers the coherence is assured, see Out[18].

```
In[1]:=
  F={ {A,B}, {B,C}, {A,C}, {E,B} };
  prob={0.2,0.3,0.06,0.5};

In[10]:=
  d={A, E, B && !A && !E, C && !B, !B && !C};

In[11]:=
  p = ConstrainedMin[obl,equations,d];

In[12]:=
  sol1=d/.p[[2]]

Out[12]=
  {0.06, 0.15, 0.09, 0.7, 0}

In[15]:=
  sol1=Drop[sol1,-1];

In[16]:=
  null[x_,y_]:=Part[x,Flatten[Position[y,0]]]

In[17]:=
  facts=Table[d[[i]]->i, {Length[d]}];
  ddfacs=Dispatch[facts];

In[18]:=
  null[d,sol1] /. ddfacs

Out[18]=
  {}
```

```
In[19]:=
  If[Length[%]==0,Print["COHERENT"],
    Print["CONTINUE"]]
```

```
Out[19]=
  COHERENT
```

Example 5. Same family of conditional events of example 4, but different probability assessment: $p = (0.2, 0, 0, 0.5)$. In this case there exists a solution with the last component less than one, but many components are equal to zero, see Out[29]. We must find other solutions of q_1 -type and q_2 -type, see Out[33] and Out[34]. Since they have the same cardinality we go on and we find a control set A different from the empty one, see Out[35]. In this case we consider a control subfamily, denoted by symbol G , by imposing to the index i to belong to A , instead of to I . By analyzing the corresponding equations we can say that the assessment is coherent. On the other hand it is easy to prove that the assessment is coherent if and only if $p_3 = p_1 p_2$ and p_4 belong to the interval $[0, 1 - p_1]$.

```
In[21]:=
  F={{A,B},{B,C},{A,C},{E,B}};
  prob={0.2,0,0,0.5};
```

```
In[28]:=
  p = ConstrainedMin[ob1,equations,d];
```

```
In[29]:=
  sol1=d/.p[[2]]
```

```
Out[29]=
  {0, 0, 0, 1., 0}
```

```
In[32]:=
  solutions[x_,y_]:=Module[{ob,mx,sol,verasol},
    ob=Apply[Plus,x];
    mx=ConstrainedMax[ob,equations,d];
    sol=d/.mx[[2]]; verasol=(y+sol)/2]
```

```
In[33]:=
  autol=solutions[nul[d,sol1],sol1]
```

Out[33]=

```
{0, 0, 0, 0.5, 0.5}
```

In[34]:=

```
auto2=solutions[nul[d,auto1],auto1]
```

Out[34]=

```
{0, 0, 0, 0.75, 0.25}
```

In[35]:=

```
If[Count[auto1,0]==Count[auto2,0],
  typeA=nul[d,sol1];gg=Table[F[[i,2]],
    {i,1,Length[prob]}];
  AA={0,0,0,0};facs=Table[d[[i]]->i,
    {i,Length[d]}]; ddfacs=Dispatch[facs];
Do[If[Apply[Plus,
  auto2[[event[gg[[i]]]/.ddfacs]]]==0,
  AA[[i]]=1, AA[[i]]=0], {i,Length[gg]}];
AA=Flatten[Position[AA,1]];
Print["A not empty =====>",AA];
control=Part[equations,AA];
Hc=Complement[d,typeA];obj1=Apply[Plus,Hc];
ctrlrdfam=Flatten[Append[Drop[typeA,-1], Hc]];
ctrlnorm=Apply[Plus,ctrlrdfam]==1;
G=Append[control,ctrlnorm];
Print["G not empty =====>", G];
pp=ConstrainedMin[obj1,G,ctrlrdfam];
solut=ctrlrdfam/.pp[[2]],
Print["find other solutions"]]
```

Out[35]=

```
A not empty =====> {1, 4}
```

```
G not empty =====>
```

```
{0.2 (A + E + (B && !A && !E)) == A,
 0.5 (A + E + (B && !A && !E)) == E,
 A + E + (C && !B) + (B && !A && !E) == 1}
```

```
{0.2, 0.5, 0.3, 0}
```


REFERENCES

1. G. COLETTI, *Coherent numerical and ordinal probabilistic assessments*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 24, no. 12 (1994), 1747-1754.
2. G. COLETTI, *Numerical and qualitative judgement in probabilistic expert systems*, in Probabilistic Methods in Expert Systems, ed. R. Scozzafava, SIS, Roma, 1993, 37-55.
3. L. CRISMA, *Prolungamenti di probabilità condizionate localmente coerenti*, Quaderni del Dip. di Mat. Appl. "B. de Finetti", Università di Trieste, no. 5, 1993.
4. B. DE FINETTI, *Theory of probability*, Wiley & Sons, London, 1974.
5. G. DI BIASE, *Sulla ricerca di un insieme di probabilità condizionate coerenti nei sistemi esperti*, in AMASES/94, pp. 357-368, Atti del XVIII Convegno AMASES, Modena, Italia, Pitagora, Bologna, 1994.
6. G. DI BIASE, *Handling conditional events and probability assessments by Mathematica*, in Mathematics with Vision, eds. V. Keranen & P. Mitic, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995, 133-140.
7. G. DI BIASE, & A. MATURO, *Checking the coherence of conditional probabilities in expert systems: remarks and algorithms*, Mathematical Models for Handling Partial Knowledge in Artificial Intelligence, ed G. Coletti, R. Scozzafava & D. Dubois, Plenum Press, New York, 1994, 191-200.
8. G. DI BIASE, & A. MATURO, *Updating knowledge through conditional events: theory and implementation*, in Wupes/94, pp. 29-40, Proceedings of the 3rd Workshop on Uncertainty Processing in Expert Systems, Trest, Czech Republic, University of Economics, Praha, 1994.
9. A. GILIO, *Criterio di penalizzazione e condizioni di coerenza nella valutazione soggettiva della probabilità*, Bollettino UMI, n. 7- 4-B (1990), 645-660.
10. A. GILIO, *Probabilistic consistency of knowledge bases in inference systems*, in Lecture Notes in Computer Sciences, eds. M. Clarke, R. Kruse & S. Moral, pp. 160-167, Springer Verlag, Berlin and New York, 1993.
11. A. GILIO, *Classi quasi additive di eventi e coerenza di probabilità condizionate*, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Univ. di Trieste, XXI (1989), 22-38.
12. A. GILIO, *Algorithms for conditional probability assessments*, Journal of Information & Optimization Sciences, Analytic Publishing Co., Delhi, (1995), to appear.

13. A. GILIO, & R. SCOZZAFAVA, *Le probabilità condizionate coerenti nei sistemi esperti*, in *Ricerca Operativa e Intelligenza Artificiale*, Giardini, Pisa, 1988, 22-29.
14. S. HOLZER, *Sulla nozione di coerenza per le probabilità subordinate*, *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Univ. di Trieste*, XVI (1984), 46-62.
15. R. MAEDER, *Programming in Mathematica*, 2nd. ed., Addison Wesley, New York, 1991.
16. E. REGAZZINI, *Sulle probabilità coerenti nel senso di de Finetti*, CLUEB, Bologna, 1983.
17. R. SCOZZAFAVA, *A real life approach to the teaching of probability*, *Ratio Mathematica*, 1994, 7, 75-82.
18. R. SCOZZAFAVA, *How to solve some critical examples by a proper use of coherent probability*, in *Uncertainty in Intelligent Systems*, eds. B. Bouchon-Menier, L. Valverde and R. Yager, North Holland-Elsevier, Amsterdam, 1993, 121-132.
19. R. SCOZZAFAVA, *A survey of some common misunderstandings concerning the role and meaning of finitely additive probabilities in statistical inference*, *Statistica*, vol. 44 (1984), 21-45.
20. G. SHAFER, *Conditional probability*, *International Statistical Review*, vol. 53, no. 3 (1985), 261-277.
21. P. VICIC, *Proprietà di relazioni riguardanti il confronto fra eventi*, *Quaderni del Dip. di Mat. Appl. "B. de Finetti"*, Università di Trieste, no. 11, 1993.

UNA NOTA SU GLI IPERGRUPPOIDI CICLICI

Domenico Freni *

SUNTO - In questo articolo si intraprende lo studio degli ipergruppidi ciclici. In particolare, nel caso finito, utilizzando l'insieme $C_x = \{ n \in \mathbb{N}^* \mid x^{(n+1)} \subseteq \cup_{k=1}^n x^{(k)} \}$ e il massimo del complementare in N di C_x , si caratterizza la struttura del sotto-ipergruppoide ciclico $\langle x \rangle$ generato da x .

ABSTRAT - In this paper one begins to study cyclic hypergroupoids. In particular, in the finite case, by using the set $C_x = \{ n \in \mathbb{N}^* \mid x^{(n+1)} \subseteq \cup_{k=1}^n x^{(k)} \}$ and the maximum element of the set $N - C_x$, one characterizes the structure of the cyclic subhypergroupoid $\langle x \rangle$ generated by x .

In tutto questo lavoro con $(H, \bullet)$ si indicherà un ipergruppoide, e spesso, con abuso di notazione, si utilizzerà il simbolo H per indicare non solo il sostegno del corrispondente ipergruppoide, ma l'ipergruppoide stesso.

Definizione: In ogni ipergruppoide $(H, \bullet)$ e per ogni elemento x di H si pone:

$$x^{(1)} = \{x\};$$

$$x^{(2)} = x \bullet x = x^{(1)} \bullet x^{(1)};$$

$$x^{(3)} = (x \bullet x) \bullet x \cup x \bullet (x \bullet x) = x^{(2)} \bullet x^{(1)} \cup x^{(1)} \bullet x^{(2)};$$

e ricorsivamente, per ogni $n \geq 1$, sia

$$x^{(n+1)} = \cup_{k=1}^n x^{(k)} \bullet x^{(n-k+1)}.$$

In seguito, per ogni elemento x di un ipergruppoide $(H, \bullet)$, l'insieme $\cup_{k \geq 1} x^{(k)}$ si indicherà con $\langle x \rangle$.

* Dipartimento di Matematica e informatica, via delle scienze 206, 33100 Udine

Chiaramente, per ogni coppia (z, w) di elementi di $\langle x \rangle$, esiste una coppia (r, s) di elementi di N^* tale che $z \in x^{(r)}$ e $w \in x^{(s)}$, quindi $z \bullet w \subseteq x^{(r)} \bullet x^{(s)} \subseteq x^{(r+s)}$, per cui $\langle x \rangle \bullet \langle x \rangle \subseteq \langle x \rangle$ ed $\langle x \rangle$ è un sotto-ipergruppoide di H .

Definizione: Il sotto-ipergruppoide $\langle x \rangle$ si chiama *sotto-ipergruppoide ciclico generato da x* .

Se, in particolare, esiste $x \in H$ tale che $H = \langle x \rangle$, allora l'ipergruppoide H si dice *ciclico, generato da x* .

Si osservi che $\langle x \rangle$ è contenuto in tutti i sotto-ipergruppidi contenenti l'elemento x , e quindi è il più piccolo sotto-ipergruppoide contenente x .

Ovviamente, per ogni $y \in \langle x \rangle$ si ha $\langle y \rangle \subseteq \langle x \rangle$.

Ecco due esempi che permettono di determinare classi di ipergruppidi ciclici:

Esempio 1: Sia $F_1 = \{A_i\}_{i \in N^*}$ una famiglia numerabile di insiemi non vuoti e $H_1 = \cup_{i \in N^*} A_i$. Inoltre, per ogni $x \in H_1$, sia $n_x = \min\{n \in N^* \mid x \in A_n\}$.

Con queste notazioni, si definisce sull'insieme H_1 il seguente iperprodotto:

$$x \bullet_1 y = A_{n_x + n_y}$$

Esempio 2: Siano $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $F_2 = \{A_i\}_{i \in I_n}$ una famiglia finita di insiemi non vuoti, $H_2 = \cup_{i=1}^n A_i$ e $n_x = \min\{k \in I_n \mid x \in A_k\}$, per ogni $x \in H_2$. Chiaramente, per ogni coppia (x, y) di elementi di H_2 , si ha $n_x + n_y \leq 2n$, e se $n_x + n_y > n$ allora $n_x + n_y - n \in I_n$, sicché su H_2 si può definire il seguente iperprodotto:

$$x \bullet_2 y = \begin{cases} A_{n_x + n_y} & \Leftrightarrow n_x + n_y \leq n \\ A_{n_x + n_y - n} & \Leftrightarrow n_x + n_y > n \end{cases}$$

Si supponga, adesso, che gli insiemi A_i di F_1 siano tali che

$$A_i^* = A_i - (\cup_{j \in N^*, j \neq i} A_j), \text{ per ogni } i \in N^*.$$

Se $\{x_i\}_{i \in N^*}$ è un sottoinsieme di H_1 tale che $x_1 \in A_1$ e $x_i \in A_i^*$, per ogni $i \geq 2$, allora si ha $n_{x_i} = i$, per ogni $i \in N^*$, e quindi:

$$A_2 = x_1^{(1)} \bullet_1 x_1^{(1)} = x^{(2)};$$

$$A_3 = x_1 \bullet_1 x_2 \subseteq x_1 \bullet_1 A_2 = x_1 \bullet_1 x_1^{(2)} \subseteq x_1^{(3)};$$

e ricorsivamente si prova che

$$A_{n+1} \subseteq x_1^{(n+1)}$$

Pertanto, si ha l'inclusione $\cup_{k \geq 2} A_k \subseteq \langle x_1 \rangle$.

Inoltre, se esiste $x_1^{(r)} \in \langle x_1 \rangle \cap (A_1^* - \{x_1\})$, allora esiste un intero positivo $n \geq 2$ ed esiste $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $x_1^{(r)} \in x_1^{(r)} \bullet_1 x_1^{(n-r)}$, e presi $a \in x_1^{(r)}$ e $b \in x_1^{(n-r)}$ tali che $x_1^{(r)} \in a \bullet_1 b$, si ha $x_1^{(r)} \in A_{n_a+n_b} \subseteq \cup_{k \geq 2} A_k$, ma ciò è impossibile perché $x_1^{(r)} \in A_1^*$.

Quindi $\langle x_1 \rangle \cap (A_1^* - \{x_1\}) = \emptyset$ e $\langle x_1 \rangle = \{x_1\} \cup (\cup_{k \geq 2} A_k)$.

Dunque si ha:

Se $F_1 = \{A_i\}_{i \in N^}$ è una famiglia numerabile di insiemi non vuoti tali che $A_i^* \neq \emptyset$, per ogni $i \in N^*$, allora $\langle x_1 \rangle = \{x_1\} \cup (\cup_{k \geq 2} A_k)$, per ogni $x_1 \in A_1$. E se, in particolare, $A_1 - \{x_1\} \subset \cup_{k \geq 2} A_k$ oppure l'insieme A_1 è il singleton $\{x_1\}$, allora H_1 è ciclico generato da x_1 .*

Ed analogamente, si prova la seguente proprietà:

Se gli insiemi di F_2 sono tali che $A_i^ \neq \emptyset$, per ogni $i \in I_m$, allora si ha sempre $H_2 = \langle x_1 \rangle$, cioè $(H_2, \bullet_2)$ è ciclico generato da ogni elemento di A_1^* .*

Osservazione: Siano S una relazione binaria e non vuota su un insieme A e $C = \{n \in N^* \mid S^{n+1} \subseteq \cup_{k=1}^n S^k\}$.

Se $C = \emptyset$, le relazioni S_i^j , per ogni $i \in N^*$, sono tutte distinte e non vuote, dunque la famiglia $F_1 = \{S_i^j\}_{i \in N^*}$ è costituita da sottoinsiemi non vuoti e distinti di $A \times A$.

Analogamente, se $C \neq \emptyset$, posto $C_s = \min C$, la famiglia $F_2 = \{S_i^j\}_{i \in N^*}$ è anch'essa costituita da sotto-insiemi non vuoti e distinti di $A \times A$.

In $H_1 = \cup_{i \in N^*} S_i^j$ o su $H_2 = \cup_{i \in N^*} S_i^j$ si possono considerare gli iperprodotti definiti, rispettivamente, negli esempi (1) e (2), ottenendo così degli ipergruppidi, detti C_T -ipergruppidi, perché H_1 o H_2 costituiscono la chiusura transitiva $C_T(S)$ di S .

Chiaramente, se S è transitiva si ha $C_s = 1$ e $(H_2, \bullet_2)$ è l'ipergruppo totale su S .

Adesso si dimostrano alcuni risultati sui sotto-ipergruppoidi ciclici, ma prima si osservi che in seguito, in ogni ipergruppoide $(H, \bullet)$ e per ogni $x \in H$, con C_x e N_x si indicano i due seguenti insiemi:

$$C_x = \{s \in N^* \mid x^{(s+1)} \subseteq \bigcup_{k=1}^s x^{(k)}\}, N_x = N - C_x.$$

Definizione: Un elemento x di un ipergruppoide H si dice *debolmente idempotente* se $x \in x \bullet x$, e si dice *idempotente* se si ha l'uguaglianza $x \bullet x = \{x\}$.

Proposizione 1: Sia H un ipergruppoide ed x un suo qualunque elemento, allora si ha:

- 1) Se $C_x = \emptyset$, allora $|\bigcup_{k=1}^{n+1} x^{(k)}| \geq n+1$, per ogni $n \geq 1$;
- 2) Se H è un ipergruppoide finito, allora $C_x \neq \emptyset$;
- 3) $C_x = N^*$ se, e solo se, x è idempotente;
- 4) $N_x \neq \{0\}$ se, e solo se, x non è idempotente.

Dimostrazione

(1) Siccome $x^{(2)} \not\subseteq x^{(1)}$, ovviamente, si ha $|x^{(1)} \cup x^{(2)}| \geq 2$. Ed induttivamente, se $|\bigcup_{k=1}^{n+1} x^{(k)}| \geq n+1$, poiché $x^{(n+2)} \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1} x^{(k)}$, si ottiene:

$$|\bigcup_{k=1}^{n+2} x^{(k)}| \geq |\bigcup_{k=1}^{n+1} x^{(k)}| + 1 \geq n+2.$$

(2) Se esiste un elemento $x \in H$ tale che $x^{(s+1)} \not\subseteq \bigcup_{k=1}^s x^{(k)}$, per ogni $s \geq 1$, allora, per (1), si ha $|\bigcup_{k=1}^{H+1} x^{(k)}| \geq |H| + 1 > |H|$, e ciò è impossibile.

(3) Se $C_x = N^*$, in particolare, si ha $x \bullet x = x^{(2)} \subseteq x^{(1)} = \{x\}$ e quindi x è idempotente.

Viceversa, se x è idempotente, si ha $x^{(2)} = x \bullet x = \{x\} = x^{(1)}$ e ricorsivamente si prova che $x^{(s)} = x^{(1)}$, per ogni $s \geq 1$. Dunque $C_x = N^*$.

(4) segue subito da (3).

Osservazione: E' chiaro che $c_x = \min C_x = 1$ se, e solo se, x è idempotente se, e solo se, $\langle x \rangle = \{x\}$.

Ovviamente, se x non è idempotente si ha $c_x \geq 2$ e $\{0, 1, 2, \dots, c_x - 1\} \subseteq N_x$.

Teorema 1: Sia H un ipergruppoide finito ed x un suo elemento, allora si ha:

1) L'insieme N_x ha un massimo m_x .

2) Per ogni $i \geq 1$, si ha $m_x + i \in C_x$.

3) Per ogni $i \geq 1$, si ha $\bigcup_{k=1}^{m_x+i} x(k) = \bigcup_{k=1}^{m_x+1} x(k)$ e $\langle x \rangle = \bigcup_{k=1}^{m_x+1} x(k)$.

Dimostrazione

(1) Se x è idempotente si ha $\max N_x = 0$. Allora, sia x non idempotente.

Per la proposizione 1(4), la cardinalità $|N_x|$ di N_x è maggiore di uno. Ora, se N_x è privo di massimo, ordinando i suoi elementi con l'ordine naturale di N , l'insieme N_x costituisce una catena $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$.

Chiaramente, per ogni $j \geq 1$, si ha:

$$\bigcup_{k=1}^{n_j} x(k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_{j+1}} x(k)$$

e se si ha l'uguaglianza $\bigcup_{k=1}^{n_j} x(k) = \bigcup_{k=1}^{n_{j+1}} x(k)$, allora, essendo $n_j + 1 \leq n_{j+1}$, si ha:

$$x(n_j+1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_{j+1}} x(k) = \bigcup_{k=1}^{n_j} x(k)$$

e ciò è impossibile perché $n_j \notin C_x$.

Pertanto $\bigcup_{k=1}^{n_j} x(k)$ è strettamente contenuto in $\bigcup_{k=1}^{n_{j+1}} x(k)$.

Allora in H si trova una catena di sottoinsiemi l'uno strettamente contenuto nell'altro

$$\bigcup_{k=1}^{n_1} x(k) \subset \bigcup_{k=1}^{n_2} x(k) \subset \dots \subset \bigcup_{k=1}^{n_j} x(k) \subset \dots$$

che non si blocca, e ciò è impossibile perché H è finito.

(2) Se esiste un intero $i \geq 1$ tale che $m_x + i \notin C_x$, allora $m_x + i \in N_x$ e per la massimalità m_x si ha $m_x + i \leq m_x$, e quindi $i = 0$, contro l'ipotesi.

(3) Se $i=1$, siccome $m_x + 1 \in C_x$, si ha $x(m_x + 2) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_x+1} x(k)$ e dunque

$$\bigcup_{k=1}^{m_x+2} x(k) = \bigcup_{k=1}^{m_x+1} x(k).$$

Pertanto, posto $\bigcup_{k=1}^{m_x+i} x(k) = \bigcup_{k=1}^{m_x+1} x(k)$, siccome $m_x + i \in C_x$, si ha

$$x^{(m_{x^i+1})} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_{x^i+1}} x^{(k)}$$

e quindi

$$\bigcup_{k=1}^{m_{x^i+1}} x^{(k)} = \bigcup_{k=1}^{m_{x^i+1}} x^{(k)} = \bigcup_{k=1}^{m_{x^i+1}} x^{(k)}$$

per cui

$$\langle x \rangle = \bigcup_{k=1}^{m_{x^i+1}} x^{(k)}.$$

Corollario 1: Sia H un ipergruppoide finito ed x un suo elemento debolmente idempotente, allora si ha $\langle x \rangle = x^{(m_{x^i+r})}$, per ogni $r \geq 1$.

Dimostrazione

Ovviamente si ha $x^{(1)} \subseteq x^{(2)}$ e $x^{(2)} = x^{(1)} \bullet x^{(1)} \subseteq x^{(1)} \bullet x^{(2)} \subseteq x^{(3)}$.

Inoltre, se, per ogni intero positivo m tale che $1 \leq m < n$, si suppone che $x^{(m)} \subseteq x^{(m+1)}$, allora si ha

$$x^{(n)} = \bigcup_{k=1}^{n-1} x^{(k)} \bullet x^{(n-k)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} x^{(k)} \bullet x^{(n-k+1)} \subseteq \bigcup_{k=1}^n x^{(k)} \bullet x^{(n-k)} = x^{(n+1)},$$

per cui $x^{(n)} \subseteq x^{(n+1)}$, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. E dunque, per il teorema 1.(3), si ottiene:

$$x^{(m_{x^i+1})} \subseteq \langle x \rangle = \bigcup_{k=1}^{m_{x^i+1}} x^{(k)} \subseteq x^{(m_{x^i+1})}$$

e quindi

$$\langle x \rangle = x^{(m_{x^i+1})}$$

Infine, siccome $m_x + 2 \in C_x$, si ha

$$x^{(m_{x^i+2})} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_{x^i+1}} x^{(k)} = x^{(m_{x^i+1})} \subseteq x^{(m_{x^i+2})},$$

cioè $x^{(m_{x^i+1})} = x^{(m_{x^i+2})}$, e ricorsivamente si prova che $x^{(m_{x^i+1})} = x^{(m_{x^i+r})}$, per ogni $r \geq 1$.

Teorema 2: Se A è un insieme finito e non vuoto ed S è una relazione binaria e non vuota su A , allora $C_S = \{ n \in \mathbb{N}^* \mid S^{n+1} \subseteq \bigcup_{k=1}^n S^k \} \leq |A|$. Inoltre, se $S^h \cap S^k = \emptyset$, per ogni coppia (h, k) di elementi distinti di I_{C_S} , allora il C_T -ipergruppoide $(H, \bullet)$ è un ipergruppoide ciclico e completo, generato da ogni elemento X di S , la ciclicità di X è $\text{Cicl}_X(X) = C_S + 1$, e il cuore ω_H di $(H, \bullet)$ è S^{C_S} .

Dimostrazione

Sia $|A| = n$ e $T = \cup_{k=1}^n S^k$.

Per ogni $(x, y) \in S^{n+1}$, esiste $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ tale che

$$x S a_1 S a_2 S \dots S a_n S y$$

Se esiste $r \in I_n$ tale che $x = a_r$, allora si ha

$$x = a_r S a_{r+1} S \dots S a_n S y$$

dunque $(x, y) \in S^{n-r+1}$ e di conseguenza $(x, y) \in T$, perché $1 \leq n-r+1 \leq n$. E se, per ogni $r \in I_n$, si ha $x \neq a_r$, siccome $\{x, a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ e $|A| = n$, esiste una coppia (r, s) di elementi di I_n tale che $1 \leq r < s \leq n$ e $a_r = a_s$. Pertanto si ha

$$x S a_1 S a_2 S \dots S a_r S a_{s+1} S \dots S a_n S y,$$

e quindi $(x, y) \in S^{n-(s-r)+1} \subseteq T$.

Dunque $S^{n+1} \subseteq T = \cup_{k=1}^n S^k$, e di conseguenza $C_S \leq n = |A|$.

Adesso, sia $H = \cup_{i \in I_S} S^i$ e $(H, \bullet_2)$ l'ipergruppoide definito nell'esempio 2. Se $S^h \cap S^k = \emptyset$ per ogni coppia (h, k) di elementi distinti di I_{C_S} , allora per ogni $X \in H$, si ha :

$$n_X = \min\{k \in I_{C_S} \mid X \in S^k\} = h \Leftrightarrow X \in S^h$$

e l'iperprodotto così definito:

$$X \bullet_2 Y = \begin{cases} S^{h+k} \Leftrightarrow h+k \leq c_s \\ S^{h+k-c_s} \Leftrightarrow h+k > c_s \end{cases}$$

Sicchè, se S non è transitiva, considerando il gruppo ciclico Z_{C_S-1} , si può porre $S(0) = S^{C_S}$, $S(1) = S$, $\dots$, $S(C_S-1) = S^{C_S-1}$, e si prova che

$$X \bullet_2 Y = S(h+k) \Leftrightarrow X \in S(h), Y \in S(k)$$

e $(H, \bullet_2)$ è un ipergruppo completo (vedi [2])

Inoltre, $(H, \bullet_2)$ è ciclico, g**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**enerato da ogni elemento $X \in S$, la ciclicità di X è C_S+1 e $\omega_H = S^{C_S}$ (vedi [3]).

Se S è transitiva, $(H, \bullet_2)$ è l'ipergruppo totale su H e la tesi è immediata.

Proposizione 2 : *Se H è un semi-ipergruppo finito, per ogni elemento x di H si ha $c_x = m_x + 1$*

Dimostrazione

Il risultato è evidente se x è idempotente. Allora, sia x non idempotente, ovviamente, per ogni $n \geq 1$, si ha $x^{(n)} = x^n$ e, per la proposizione 1(2), $C_x \neq \emptyset$ (per semplicità il singleton $\{x\}$ si identifica con l'elemento x , sicché $x^{(1)} = x$). Inoltre

$$x^{c_x+2} = x^{c_x+1} \bullet x \subseteq (\cup_{k=1}^{c_x} x^k) \bullet x = \cup_{k=2}^{c_x+1} x^k \subseteq \cup_{k=1}^{c_x+1} x^k$$

e induttivamente si prova che

$$x^{c_x+s} \subseteq \cup_{k=1}^{c_x+s-1} x^k, \text{ per ogni } s \geq 1.$$

Dunque $n \in C_x$ se e solo se $n+1 \in C_x$, e siccome $\{0, 1, 2, \dots, c_x - 1\} \subseteq N_x$, si ha $c_x - 1 = \max N_x$ e quindi $c_x = m_x + 1$.

Osservazione: Se H non è un semi-ipergruppo, in generale, non si ha l'uguaglianza $c_x = m_x + 1$. Ecco un esempio:

Sia H un insieme finito di cardinalità ≥ 3 e siano x, a, b tre elementi distinti di H .

Si definisce su H il seguente iperprodotto:

$$(H, \bullet) = \begin{cases} x \bullet x = x \bullet a = a \bullet x = \{a\}; \\ a \bullet a = \{a, b\}; \\ z \bullet w = H, \quad \forall (z, w) \in H^2 - \{x, a\}^2. \end{cases}$$

Facilmente si prova che $\{a\} = x^{(2)} \subsetneq x^{(1)} = \{x\}$, $x^{(3)} = x^{(2)} = \{a\}$ e quindi $c_x = \min C_x = 2$. Inoltre $x^{(4)} = \{a, b\} \subsetneq x^{(3)} = \{a\}$, per cui $3 \in N_x$ e $m_x = \max N_x \geq 3$. Pertanto $c_x \neq m_x + 1$.

Proposizione 3: *Sia H un ipergruppoide finito tale che $x \bullet \langle x \rangle = \langle x \rangle \bullet x = \langle x \rangle$, per ogni $x \in H$. Allora esiste in H almeno un sottoquasi-ipergruppo ciclico.*

Dimostrazione

Sia $F = \{\langle x \rangle\}_{x \in H}$ la famiglia dei sotto-ipergruppidi ciclici di H . Per la finitezza di H , esiste in F un sotto-ipergruppoide ciclico $\langle e \rangle$ di cardinalità minima.

Per ogni $y \in \langle e \rangle$, si ha $\langle y \rangle \subseteq \langle e \rangle$ e per la minimalità della cardinalità di $\langle e \rangle$, si ricava $\langle y \rangle = \langle e \rangle$.

Ma, per ipotesi, si ha:

$$y \bullet \langle y \rangle = \langle y \rangle \bullet y = \langle y \rangle,$$

e quindi

$$y \bullet \langle e \rangle = y \bullet \langle y \rangle = \langle y \rangle = \langle e \rangle = \langle y \rangle \bullet y = \langle e \rangle \bullet y$$

Pertanto, per ogni $y \in \langle e \rangle$, si ha

$$y \bullet \langle e \rangle = \langle e \rangle = \langle e \rangle \bullet y.$$

Corollario 2: Sia H un semi-ipergruppo finito tale che ogni elemento x di H sia debolmente idempotente, allora in H esiste almeno un sotto-ipergruppo ciclico.

Dimostrazione

Per il corollario 1, si ha $\langle x \rangle = x^{m_x+1}$ e quindi

$$\langle x \rangle \bullet x = x^{m_x+1} \bullet x = x^{m_x+2} = x^{m_x+1} = \langle x \rangle.$$

Allo stesso modo si prova che $x \bullet \langle x \rangle = \langle x \rangle$, e la proposizione 3 completa la dimostrazione.

Osservazione: Nell'articolo [9] si è definita la relazione Δ di associatività negli ipergruppidi, e si è dimostrato (vedi teoremi 2.1 e 2.2) che nei quasi-ipergruppi la relazione è transitiva e il quoziente H/Δ è un gruppo rispetto all'operazione:

$$\Delta(x) \otimes \Delta(y) = \Delta(z), \quad \forall z \in x \bullet y.$$

Inoltre, la proiezione canonica $q : H \rightarrow H/\Delta$ è un omomorfismo buono, e se ω è l'identità di H/Δ , allora $W = q^{-1}(\omega)$ è un sottoquasi-ipergruppo di H .

Teorema 3: Sia H un quasi-ipergruppo, $x \in H$ e $P_x = \{n \in \mathbb{N}^* \mid x^{(n)} \subseteq W\}$. Se $P_x \neq \emptyset$, posto $p_x = \min P_x$ si ha:

$$1) q(\langle x \rangle) \cong \mathbb{Z}_{p_x};$$

$$2) p_x = \min P_x \leq c_x = \min C_x;$$

$$3) \text{ Se } H \text{ è finito, allora } p_x = \min P_x \leq \max N_x + 1 = m_x + 1.$$

Dimostrazione

(1) Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, e per ogni $a \in (\dots((x \bullet x) \bullet x) \bullet x \dots) \bullet x$, con x ripetuto k -volte, si ha $q(a) = q(x)^k$. Inoltre, per ogni $b \in x^{(k)}$, si ha $b \Delta a$, dunque $q(a) = q(b) = q(x)^k$ e quindi $q(x^{(k)}) = q(x)^k$, e poiché $\langle x \rangle = \cup_{k \geq 1} x^{(k)}$, si ottiene:

$$q(\langle x \rangle) = q(\cup_{k \geq 1} x^{(k)}) = \cup_{k \geq 1} q(x^{(k)}) = \{q(x)^k\}_{k \geq 1}.$$

Del resto si ha $x^{(p_x)} \subseteq W$, quindi $(q(x))^{p_x} = \omega$ e l'ordine $r = |\langle q(x) \rangle|$ di $q(x)$ divide p_x .

Ora, se $p_x > r$ si ha $h = p_x - r \geq 1$, e poiché $q(x)^{p_x} = \omega = q(x)^r$, si ottiene $q(x)^h = \omega$. Pertanto, per ogni $a' \in (\dots((x \bullet x) \bullet x) \bullet x \dots) \bullet x$, con x ripetuto h volte, e per ogni $b' \in x^{(h)}$ si ha $b' \Delta a'$, di conseguenza $q(a') = q(b') = q(x)^h = \omega$, per cui $x^{(h)} \subseteq W$ e ciò è impossibile per la minimalità di p_x . Dunque $r = p_x$ e quindi si ha:

$$q(\langle x \rangle) = \{q(x)^k\}_{k \geq 1} \cong Z_{p_x}.$$

(2) Se x è idempotente si ha $q(x) \otimes q(y) = q(x)$, dunque $q(x) = \omega$, $x \in W$ e $p_x = 1$. Inoltre, per la proposizione 1(3), $c_x = \min C_x = 1$ e quindi

$$p_x = c_x = 1$$

Se x non è idempotente, si ha $c_x \geq 2$, e siccome $x^{c_x+1} \subseteq \cup_{k=1}^{c_x} x^{(k)}$, si ha

$$q(x)^{c_x+1} \in \{q(x)^k\}_{k=1}^{c_x},$$

e quindi esiste un intero positivo s tale che $1 \leq s \leq c_x$ e $q(x)^{c_x+1} = q(x)^s$. Pertanto si ha $q(x)^{c_x-s+1} = \omega$, dunque $x^{(c_x-s+1)} \subseteq W$, cioè $c_x - s + 1 \in P_x$, e, chiaramente, si ottiene

$$p_x = \min P_x \leq c_x - s + 1 \leq c_x = \min C_x.$$

(3) Se x è idempotente $N_x = \{0\}$ e $p_x = 1$. Se x non è idempotente, per il teorema 1(2), si ha $m_x + 1 \in C_x$, e per (2), $p_x = \min P_x \leq c_x = \min C_x \leq \max N_x + 1 = m_x + 1$.

BIBLIOGRAFIA

1. P. CORSINI, *Prolegomena of hypergroup theory*, 2nd ed Aviani Editore, 1992
2. P. CORSINI, *Sur les semi-hypergroupes completes et les groupoides*, Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat., XXVI, 1980.
3. DE SALVO - D. FRENI, *Sugli ipergruppi ciclici e completi*, Le Matematiche, Catania, Vol. XXXV, Fasc. I-II, 1980.
4. DE SALVO - D. FRENI, *Semi ipergruppi e ipergruppi ciclici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1981.

5. D. FRENI, *Ipergruppi ciclici e torsione negli ipergruppi*, Le Matematiche, Catania, Vol. XXXV, Fasc. I-II, 1980.
6. D. FRENI, *Hypergroupes cambistes - hypergroupes de type U, Applications à la théorie de la dimension et à l'homologie non abélienne*, Thèse de Doctorat, Univ. de Clermont-Ferrand II, 1985.
7. D. FRENI, *Sur les hypergroupes cambistes*, Rendiconti Istituto Lombardo, A 119, 1985.
8. D. FRENI, *Sur la théorie de la dimension dans les hypergroupes*, Acta Univ. Carolinae, Vol. 27, No. 2, Praga, 1986.
9. D. FRENI, *On a strongly regular relation in hypergroupoids*, P.U.M.A. Ser. A, Vol. 3, No. 3-4, Budapes, 1992.
10. D. FRENI, *Hypergroupoids and fundamental relations*, Atti Convegno su Algebraic Hyperstructures and Applications, Iasi (Romania), Hadronic Press, Palm Harbor, FL 34682-1577, U.S.A., 1994.
11. T. VOUGIOUKLIS, *Cyclicity in a special class of hypergroups*, Acta Univ. Carolinae, Math. Phys., Vol 22, No 1, Praga, 1981.

PERIODIC SOLUTIONS OF A SECOND ORDER EVOLUTIVE VARIATIONAL INEQUALITY*

M. Biancardi, A. Gallo**

ABSTRACT - Hereafter we shall analyse the existence and regularity properties of the solution of the periodic problem related to a second order evolutive variational inequality.

SUNTO - Si analizzano le questioni di esistenza e regolarità della soluzione per il problema periodico connesso ad una disequazione variazionale di evoluzione del secondo ordine.

INTRODUCTION

Let Ω_1 and Ω_2 be two open sets of R^N with $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, $V_l (l=1,2)$ a real separable Hilbert space with dense and continuous embedding in $L^2(\Omega_l)$.

Let us denote by:

$(\cdot, \cdot), \cdot $	the inner product and the norm in $L^2(\Omega)$,
$(\cdot, \cdot)_l, \cdot _l$	the inner product and the norm in $L^2(\Omega_l)$,
$\ \cdot\ $	the norm in V_l ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	the pairing between V_l and its dual V'_l

* Research performed under the financial support of M.U.R.S.T.

** Authors' Address: Dipartimento di Matematica e Applicazioni.
Facoltà di Ingegneria, via Claudio, 21 - 80125 Napoli, Italy.

Furthermore, let K be the convex closed part of $V_1 \times V_2$:

$$\{(z_1, z_2) \in V_1 \times V_2 : z_1 \leq z_2 \text{ a.e. on } \Omega\}.$$

Given $f_l \in L^2(0, T; V_l')$ ($0 < T < +\infty$) and operators $A_l, B_l \in \mathcal{L}(V_l, V_l')$ such that:

$$\langle A_l y, z \rangle_l = \langle A_l z, y \rangle_l, \quad \langle B_l y, z \rangle_l = \langle B_l z, y \rangle_l \quad \forall y, z \in V_l,$$

$$\langle A_l z, z \rangle_l \geq a_l \|z\|_l^2, \quad \langle B_l z, z \rangle_l \geq b_l \|z\|_l^2 \quad \forall z \in V_l \quad (a_l, b_l = \text{const.} > 0),$$

we consider the following

PROBLEM (P). Find $(u_1, u_2) \in \prod_{l=1}^2 H^1(0, T; V_l)$ so that:

$$u_l'' \in L^2(0, T; V_l'),$$

$$u_l(0) = u_l(T), \quad u_l'(0) = u_l'(T),$$

$$(u_1'(t), u_2'(t)) \in K \quad \text{a.e. on }]0, T[,$$

$$\sum_{l=1}^2 \int_0^T \langle u_l''(t) + A_l u_l(t) + B_l u_l'(t) - f_l(t), v_l'(t) - u_l'(t) \rangle_l dt \geq 0$$

$$\forall (v_1, v_2) \in \prod_{l=1}^2 H^1(0, T; V_l) \text{ with } v_l(0) = v_l(T) \text{ and } (v_1'(t), v_2'(t)) \in K \text{ a.e. on }]0, T[.$$

Of course our problem (P) will not have a unique solution. As a matter of fact:

if (u_1, u_2) is one solution of problem (P), then any other solution will only be of the type $(u_1 + z_1, u_2 + z_2)$, where z_l is an arbitrary element of V_l .

Obviously $(u_1 + z_1, u_2 + z_2)$ satisfies our problem (P). On the other hand, assuming that $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ is an other solution, we immediately find that:

$$\|\bar{u}_l' - u_l'\|_{L^2(0, T; V_l')} = 0,$$

and therefore $\bar{u}_l = u_l + z_l$ with $z_l \in V_l$.

We shall now develop two existence theorems for our problem, theorems 4 and 5 (n. 3), with two different hypothesis on f_l : in the first we assume $f_l \in L^2(0, T; L^2(\Omega_l))$, in the second $f_l \in H^1(0, T; V_l')$, $f_l(0) = f_l(T)$.

For the proof we shall essentially adopt a penalty method [1], [3], [4] based on an existence theorem concerning periodic solutions of an abstract

non linear second order differential equation. Moreover, in proving this theorem [th. 1, n. 1] we follow a technique inspired to the "elliptic regularization" [3], [5]. The results given by theorems 2 and 3 [n. 2] for the penalized problem will then be used to prove the above mentioned existence theorems for our problem (P).

A regularity theorem "with respect to x " is also given in n. 3, theorem 6, when $V_1 = V_2 = H_0^1(\Omega)$ and operators A_l, B_l , within constant factors, are identical to a uniformly elliptic second order linear differential operator. The uniform ellipticity of this last operator allows us to obtain upper limitations by introducing a "special base" of $H_0^1(\Omega)$.

1. Let V and H be real Hilbert spaces: $V \subseteq H$, with dense and continuous embedding.

We identify H with its dual and denote with

$(\cdot, \cdot), |\cdot|$ the inner product and the norm in H ,

$\|\cdot\|$ the norm in V ,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ the pairing between V and its dual V' .

Let also $f \in L^2(0, T; V')$ and A, B the operators from V into V' : A linear and continuous, B strictly monotone and hemicontinuous. Let us suppose that:

$$\langle Ay, z \rangle = \langle Az, y \rangle \quad \forall y, z \in V,$$

$$\langle Az, z \rangle \geq a \|z\|^2 \quad \forall z \in V, \quad (a = \text{const.} > 0)$$

$$\langle Bz, z \rangle \geq b \|z\|^2 \quad \forall z \in V, \quad (b = \text{const.} > 0)$$

for each $v \in L^2(0, T; V)$ $Bv(\cdot) \in L^2(0, T; V')$,

operator $v \in L^2(0, T; V) \rightarrow Bv(\cdot)$ is bounded.

THEOREM 1. In the above stated assumptions, there exists only one solution $u \in H^1(0, T; V)$ of the following problem:

$$(1) \quad u'' \in L^2(0, T; V'),$$

$$(2) \quad \langle u''(t), z \rangle + \langle Au(t), z \rangle + \langle Bu'(t), z \rangle = \langle f(t), z \rangle \quad \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall z \in V,$$

$$(3) \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T).$$

PROOF. Firstly, if $u_1, u_2 \in H^1(0, T; V)$ are solutions of the problem (1), (2), (3), then

$$\int_0^T \langle Bu'_1(t) - Bu'_2(t), u'_1(t) - u'_2(t) \rangle dt = 0$$

must hold and therefore

$$u'_1(t) = u'_2(t) \text{ a.e. on }]0, T[$$

owing to the strict monotonicity of B . Thus there exists a $z_0 \in V$ such that

$$u_1(t) = u_2(t) + z_0 \quad \forall t \in [0, T].$$

This condition in turn is fulfilled iff

$$\langle Az_0, z \rangle = 0 \quad \forall z \in V,$$

namely $z_0 = 0$. In order to prove the existence of the solution, we introduce the Hilbert space:

$$W = \{v \in H^1(0, T; V) : v'' \in L^2(0, T; H), v(0) = v(T), v'(0) = v'(T)\}$$

equipped with norm

$$\|v\|_W = \left(\int_0^T \|v(t)\|^2 dt + \int_0^T \|v'(t)\|^2 dt + \int_0^T |v''(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in W$$

and then denote with $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the pairing between W and its dual W' .

Given $\varepsilon > 0$, we set, for any $u, v \in W$

$$\begin{aligned} \langle C^\varepsilon u, v \rangle = & \varepsilon \left[\int_0^T (u''(t), v''(t)) dt + \int_0^T \langle Au(t), v(t) \rangle dt \right] + \\ & + \int_0^T (u''(t), v'(t)) dt + \int_0^T \langle Au(t), v'(t) \rangle dt + \\ & + \int_0^T \langle Bu'(t), v'(t) \rangle dt - \int_0^T \langle f(t), v'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

$C^\varepsilon: W \rightarrow W'$ is obviously a bounded, strictly monotone, hemicontinuous and coercive operator. Therefore ([3], theorem 2.1, pg. 171) there exists a unique $u_\varepsilon \in W$ solution of equation

$$(4) \quad \langle\langle C^\varepsilon u_\varepsilon, v \rangle\rangle = 0 \quad \forall v \in W.$$

Eq. (4), written with $v = u_\varepsilon$, gives the upper limitations

$$(5) \quad \varepsilon \left[\int_0^T |u_\varepsilon''(t)|^2 dt + \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \right] \leq c,$$

$$(6) \quad \int_0^T \|u_\varepsilon'(t)\|^2 dt \leq c, \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon)$$

as well as

$$(7) \quad \int_0^T \|\bar{u}_\varepsilon(t)\|^2 dt \leq c$$

where $\bar{u}_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(0)$. Inequalities (5), (6), (7) imply the existence of $\bar{u} \in H^1(0, T; V)$, with $\bar{u}(0) = \bar{u}(T) = 0$, of $g \in L^2(0, T; V')$ and of a positive numerical infinitesimal sequence $\{\varepsilon_n\}$ such that for $n \rightarrow +\infty$

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{u}_{\varepsilon_n} &\rightarrow \bar{u} \text{ weakly in } L^2(0, T; V), \\ u_{\varepsilon_n}' &\rightarrow \bar{u}' \text{ weakly in } L^2(0, T; V), \\ Bu_{\varepsilon_n}'(\cdot) &\rightarrow g \text{ weakly in } L^2(0, T; V'), \\ \varepsilon_n \left[\|u_{\varepsilon_n}''\|_{L^2(0, T; H)}^2 + \|u_{\varepsilon_n}\|_{L^2(0, T; V)}^2 \right] &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Starting from (4) and using (8), we come to relation

$$(9) \quad \int_0^T (\bar{u}'(t), v''(t)) dt = \int_0^T \langle A\bar{u}(t) + g(t) - f(t), v'(t) \rangle dt \quad \forall v \in W.$$

Let now $\varphi_0 \in C_0^\infty(]0, T[)$ with $\int_0^T \varphi_0(t) dt = 1$, $\varphi \in C_0^\infty(]0, T[)$ and $z \in V$. From (9), setting

$$v(t) = \left(\int_0^t \left[\varphi(s) - \varphi_0(s) \int_0^T \varphi(t) dt \right] ds \right) z \quad \forall t \in [0, T]$$

we get:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \bar{u}'(t) \varphi'(t) dt, z \right) = & \left\langle \int_0^T [A\bar{u}(t) + g(t) - f(t)] \varphi(t) dt, z \right\rangle + \\ & + \left(\int_0^T \bar{u}'(t) \varphi_0'(t) dt \int_0^T \varphi(t) dt, z \right) + \\ & - \left\langle \int_0^T [A\bar{u}(t) + g(t) - f(t)] \varphi_0(t) dt \int_0^T \varphi(t) dt, z \right\rangle \end{aligned}$$

or

$$\bar{u}''(t) = -[A\bar{u}(t) + g(t) - f(t)] - \theta \quad \text{a.e. on }]0, T[\text{ in the } V' \text{ sense}$$

being θ the element of V'

$$\int_0^T \bar{u}'(t) \varphi_0'(t) dt - \int_0^T [A\bar{u}(t) + g(t) - f(t)] \varphi_0(t) dt.$$

Let u_0 be the element of V for which $Au_0 = \theta$, and given $u = \bar{u} + u_0$, it is obvious that u satisfies (1), the first of (3) and that:

$$(10) \quad \langle u''(t), z \rangle + \langle Au(t), z \rangle + \langle g(t), z \rangle = \langle f(t), z \rangle \quad \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall z \in V.$$

We may also note that the second of (3) holds too. Indeed, chosen $\psi \in C^2([0, T])$ with $\psi(0) = \psi(T)$ and $\psi'(0) = \psi'(T) = 1$, recalling (9) and (10), we get $\forall z \in V$:

$$\begin{aligned} (u'(T) - u'(0), z) &= (u'(T)\psi'(T) - u'(0)\psi'(0), z) = \left\langle \int_0^T [u'(t)\psi'(t)]' dt, z \right\rangle = \\ &= \int_0^T \langle u''(t), \psi'(t)z \rangle dt + \int_0^T \langle u'(t), \psi''(t)z \rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle u''(t), \psi'(t)z \rangle dt + \int_0^T \langle Au(t) + g(t) - f(t), \psi'(t)z \rangle dt = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Because of (10), (2) is acquired as soon as we are able to prove that

$$(11) \quad Bu'(\cdot) = g.$$

From (4), with $v = u_{\epsilon_n}$, we obtain:

$$\int_0^T \langle Bu'_{\epsilon_n}(t), u'_{\epsilon_n}(t) \rangle dt \leq \int_0^T \langle f(t), u'_{\epsilon_n}(t) \rangle dt$$

from which, because of the second of (8),

$$(12) \quad \lim'' \int_0^T \langle Bu'_{\epsilon_n}(t), u'_{\epsilon_n}(t) \rangle dt \leq \int_0^T \langle f(t), \bar{u}'(t) \rangle dt.$$

Assuming $z = u'(t)$, (10) produces the following equality:

$$(13) \quad \int_0^T \langle g(t), u'(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u'(t) \rangle dt.$$

The second and third of (8), together with (12) and (13), imply (11), since operator

$$v \in L^2(0, T; V) \rightarrow Bv(\cdot)$$

is bounded, monotone and hemicontinuous ([3], proposition 2.5, pg. 179).

REMARK. Proof of the existence is essentially the same when assuming "B monotone" instead of "B strictly monotone".

2. Let us suppose

$$V = V_1 \times V_2, \quad H = L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$$

and write for each $z = (z_1, z_2), y = (y_1, y_2) \in V$

$$\begin{aligned} \langle Az, y \rangle &= \langle A_1 z_1, y_1 \rangle_1 + \langle A_2 z_2, y_2 \rangle_2, \\ \langle Lz, y \rangle &= \frac{1}{\varepsilon} \left([z_1 - z_2]^+, y_1 - y_2 \right) \text{ with } \varepsilon > 0, \\ \langle Bz, y \rangle &= \langle B_1 z_1, y_1 \rangle_1 + \langle B_2 z_2, y_2 \rangle_2 + \langle Lz, y \rangle. \end{aligned}$$

Of course Hilbertian spaces V, H and operators A, B , from V into V' , meet the assumptions stated at the beginning of n. 1. Therefore, from theorem 1, there exists a unique $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in \prod_{l=1}^2 H^1(0, T; V_l)$ solution of the problem

$$\begin{aligned} (14) \quad & u_{l\varepsilon}'' \in L^2(0, T; V_l'), \\ (15) \quad & \sum_{l=1}^2 l \left\langle u_{l\varepsilon}''(t) + A_l u_{l\varepsilon}(t) + B_l u_{l\varepsilon}'(t) - f_l(t), z_l \right\rangle_l + \\ & \frac{1}{\varepsilon} \left([u_{1\varepsilon}'(t) - u_{2\varepsilon}'(t)]^+, z_1 - z_2 \right) = 0 \\ & \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall (z_1, z_2) \in V_1 \times V_2, \end{aligned}$$

$$(16) \quad u_{l\varepsilon}(0) = u_{l\varepsilon}(T), \quad u_{l\varepsilon}'(0) = u_{l\varepsilon}'(T).$$

THEOREM 2. If for $l = 1, 2$ $f_l \in L^2(0, T; L^2(\Omega_l))$ we then have:

$$(17) \quad \begin{aligned} & u_{l\varepsilon}'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_l)), \\ & \left\| u_{l\varepsilon}'' \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_l))} \leq c. \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon) \end{aligned}$$

PROOF. Let $\{z_l\}$ be a base of V_l and, for each $n \in N$, V_{ln} be the space spanned by $\{z_{l1}, \dots, z_{ln}\}$. Theorem 1 and the finite dimensions of V_{ln} assure the existence of a unique $(w_{1n}, w_{2n}) \in \prod_{l=1}^2 H^2(0, T; V_{ln})$ such that

$$(18) \quad \sum_{l=1}^2 l \left\{ \left(w_{ln}''(t), z_l \right)_l + \left\langle A_l w_{ln}(t) + B_l w_{ln}'(t), z_l \right\rangle_l - (f_l(t), z_l)_l \right\} + \\ \frac{1}{\varepsilon} \left(\left[w_{1n}'(t) - w_{2n}'(t) \right]^+, z_1 - z_2 \right) = 0 \\ \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall (z_1, z_2) \in V_{1n} \times V_{2n}, \\ w_{ln}(0) = w_{ln}(T), \quad w_{ln}'(0) = w_{ln}'(T).$$

Immediate consequence of (18) are the upper limitations:

$$(19) \quad \left\| w_{ln}' \right\|_{L^2(0, T; V_l)} \leq c, \\ (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon \text{ and } n) \\ \left\| w_{ln}'' \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_l))} \leq c,$$

and also

$$\left\| \bar{w}_{ln} \right\|_{L^2(0, T; V_l)} \leq c,$$

where $\bar{w}_{ln}(t) = w_{ln}(t) - w_{ln}(0)$. Therefore $\bar{w}_l \in H^1(0, T; V_l)$, with

$$(20) \quad \bar{w}_l'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_l)), \quad \bar{w}_l(0) = \bar{w}_l(T) = 0, \quad \bar{w}_l'(0) = \bar{w}_l'(T),$$

and $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ exist so that, to within a subsequence, for $n \rightarrow +\infty$:

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{w}_{ln} &\rightarrow \bar{w}_l && \text{weakly in } L^2(0, T; V_l), \\ w_{ln}' &\rightarrow w_l' && \text{weakly in } L^2(0, T; V_l), \\ w_{ln}'' &\rightarrow w'' && \text{weakly in } L^2(0, T; L^2(\Omega_l)), \\ \left[w_{1n}' - w_{2n}' \right]^+ &\rightarrow h && \text{weakly in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

Using (21) and equality

$$\overline{\bigcup_{n \in N} V_{In}} = V_I,$$

we easily derive from the first of (18) this relation:

$$\begin{aligned} & \sum_1^2 I \int_0^T \left\{ \left(\bar{w}_I''(t), \varphi'(t) z_I \right)_I + \left(A_I \bar{w}_I(t) + B_I \bar{w}_I'(t), \varphi'(t) z_I \right)_I - \left(f_I(t), \varphi'(t) z_I \right)_I \right\} dt + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \left(h(t), \varphi'(t) (z_1 - z_2) \right) dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(]0, T[) \text{ and } \forall (z_1, z_2) \in V_1 \times V_2, \end{aligned}$$

the latter being equivalent, a.e. on $]0, T[$, to:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\bar{w}_1''(t) + A_1 \bar{w}_1(t) + B_1 \bar{w}_1'(t) + \frac{1}{\varepsilon} h(t) - f_1(t) \right] = 0 \quad \text{in the sense of } V_1', \\ & \frac{d}{dt} \left[\bar{w}_2''(t) + A_2 \bar{w}_2(t) + B_2 \bar{w}_2'(t) - \frac{1}{\varepsilon} h(t) - f_2(t) \right] = 0 \quad \text{in the sense of } V_2', \end{aligned}$$

which in turn lead to existence of $F_I \in V_I'$ such that, a.e. on $]0, T[$:

$$\begin{aligned} & \bar{w}_1''(t) + A_1 \bar{w}_1(t) + B_1 \bar{w}_1'(t) + \frac{1}{\varepsilon} h(t) - f_1(t) = F_1, \\ (22) \quad & \bar{w}_2''(t) + A_2 \bar{w}_2(t) + B_2 \bar{w}_2'(t) - \frac{1}{\varepsilon} h(t) - f_2(t) = F_2. \end{aligned}$$

Given $w_{I0} = A_I^{-1} F_I$ and $w_I = \bar{w}_I - w_{I0} \in H^1(0, T; V_I)$, from (20), (22) we get respectively:

$$(23) \quad w_I'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_I)), \quad w_I(0) = w_I(T), \quad w_I'(0) = w_I'(T)$$

$$(24) \quad \frac{2}{\sum_1 l} \left\{ \left(w_l''(t), z_l \right)_l + \left(A_l w_l(t) + B_l w_l'(t), z_l \right)_l - \left(f_l(t), z_l \right)_l \right\} + \\ + \frac{1}{\varepsilon} (h(t), z_1 - z_2) = 0 \quad \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall (z_1, z_2) \in V_1 \times V_2.$$

Since from (18) and the second of (21)

$$\lim_n \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \left(\left[w_{1n}'(t) - w_{2n}'(t) \right]^+, w_{1n}'(t) - w_{2n}'(t) \right) dt \leq \\ \leq \sum_1 l \int_0^T \left(f_l(t), w_l'(t) \right)_l dt - \sum_1 l \int_0^T \left(B_l w_l'(t), w_l'(t) \right)_l dt$$

and from (23), (24)

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \left(h(t), w_1'(t) - w_2'(t) \right) dt = \sum_1 l \int_0^T \left(f_l(t), w_l'(t) \right)_l dt + \\ - \sum_1 l \int_0^T \left(B_l w_l'(t), w_l'(t) \right)_l dt,$$

we may write

$$(25) \quad h(t) = \left[w_1'(t) - w_2'(t) \right]^+ \quad \forall t \in]0, T[$$

since

$$v \in L^2(0, T; V) \rightarrow Lv(\cdot)$$

is a bounded, monotone and hemicontinuous operator. From (23), (24) and (25) we see that $w_l = u_l \varepsilon$. Consequently (17) hold: the first of (17) is true because of the first of (20), the second because of (19) and the third of (21).

THEOREM 3. If for $l = 1, 2$ $f_l \in H^1(0, T; V_l')$ and $f_l(0) = f_l(T)$, then we have:

$$u_{l\varepsilon}'' \in L^2(0, T; V_l),$$

$$(c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon)$$

$$\|u_{l\varepsilon}''\|_{L^2(0, T; V_l)} \leq c.$$

PROOF. Proceeding as with the beginning of the proof of theorem 2 and considering the present hypothesis on f_l , we see that there exists a unique

$$(w_{1n}, w_{2n}) \in \prod_{l=1}^2 H^3(0, T; V_{ln}) \text{ which fulfills the following conditions:}$$

(26)

$$\sum_1^2 l \left\{ \left(w_{ln}''(t), z_l \right)_l + \left(A_l w_{ln}(t) + B_l w_{ln}'(t) - f_l(t), z_l \right)_l \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(w_{1n}'(t) - w_{2n}'(t) \right)^+, z_1 - z_2 \right] = 0 \quad \forall t \in [0, T], \text{ and } \forall (z_1, z_2) \in V_1 \times V_2,$$

$$(27) \quad w_{ln}(0) = w_{ln}(T), \quad w_{ln}'(0) = w_{ln}'(T), \quad w_{ln}''(0) = w_{ln}''(T).$$

By differentiating the left member of (26), accounting for both the second and third of (27) and inequality:

$$\left(\frac{d}{dt} \left[w_{1n}'(t) - w_{2n}'(t) \right]^+, w_{1n}''(t) - w_{2n}''(t) \right) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

we obtain

$$\|w_{ln}''\|_{L^2(0, T; V_l)} \leq c. \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon \text{ and } n)$$

This proof is completed by proceeding similarly to what reasoned with theorem 2.

3. Results obtained in n. 2 will now allow us to produce some existence theorems for problem (P).

THEOREM 4. If for $l = 1, 2$ $f_l \in L^2(0, T; L^2(\Omega_l))$ then there exists a $(u_1, u_2) \in \prod_{l=1}^2 H^1(0, T; V_l)$, with $u_l'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_l))$, which is solution of problem (P).

PROOF. For any $\varepsilon > 0$ let $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \in \prod_{l=1}^2 H^1(0, T; V_l)$ be a solution of problem (14), (15), (16). Because of theorem 2 $u_{l\varepsilon}'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_l))$ and we have:

$$(28) \quad \|u_{l\varepsilon}''\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_l))} \leq c. \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon)$$

Consequence of (15), (16) are the upper limitations:

$$(29) \quad \|u_{l\varepsilon}'\|_{L^2(0, T; V_l)} \leq c,$$

($c = \text{const.} > 0$ indep. from ε)

$$(30) \quad \left\| \left[u_{1\varepsilon}' - u_{2\varepsilon}' \right]^+ \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq c\varepsilon.$$

The existence of $(u_1, u_2) \in \prod_{l=1}^2 H^1(0, T; V_l)$ with

$$u_l'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega_l)), \quad u_l(0) = u_l(T), \quad u_l'(0) = u_l'(T),$$

and of a positive numerical infinitesimal sequence $\{\varepsilon_n\}$ such that for $n \rightarrow +\infty$:

$$(31) \quad \begin{aligned} u_{l\varepsilon_n} - u_{l\varepsilon_n}(0) &\rightarrow u_l \quad \text{weakly in } L^2(0, T; V_l), \\ u_{l\varepsilon_n}' &\rightarrow u_l' \quad \text{weakly in } L^2(0, T; V_l), \\ u_{l\varepsilon_n}'' &\rightarrow u_l'' \quad \text{weakly in } L^2(0, T; L^2(\Omega_l)). \end{aligned}$$

is guaranteed by (28) and (29).

Thus, solution of problem (P) is (u_1, u_2) . Indeed, on one hand

$$(u_1'(t), u_2'(t)) \in K \quad \text{a.e. on }]0, T[$$

since, holding (30) and the second of (31), we have:

$$\int_0^T \left| [u_1'(t) - u_2'(t)]^+ \right|^2 dt \leq \lim \int_0^T \left| [u_{1\varepsilon_n}'(t) - u_{2\varepsilon_n}'(t)]^+ \right|^2 dt = 0.$$

On the other hand, by virtue of inequality

$$\int_0^T \left([u_{1\varepsilon_n}'(t) - u_{2\varepsilon_n}'(t)]^+, [v_1'(t) - u_{1\varepsilon_n}'(t)] - [v_2'(t) - u_{2\varepsilon_n}'(t)] \right) dt \leq 0,$$

where (v_1, v_2) is an arbitrary element of $\prod_{l=1}^2 H^1(0, T; V_l)$, satisfying conditions:

$$(v_1'(t), v_2'(t)) \in K \quad \text{a.e. on }]0, T[, \quad v_l(0) = v_l(T),$$

from (15), (16) we get:

$$\begin{aligned} \sum_1^2 l \int_0^T & \left\{ (u_{l\varepsilon_n}''(t), v_l'(t))_l + \left\langle A_l [u_{l\varepsilon_n}(t) - u_{l\varepsilon_n}(0)], v_l'(t) \right\rangle_l + \left\langle B_l u_{l\varepsilon_n}'(t), v_l'(t) \right\rangle_l + \right. \\ & \left. - (f_l(t), v_l'(t) - u_{l\varepsilon_n}'(t))_l \right\} dt \geq \sum_1^2 l \int_0^T \left\langle B_l u_{l\varepsilon_n}'(t), u_{l\varepsilon_n}'(t) \right\rangle_l dt \end{aligned}$$

and from here, taking the limit as $n \rightarrow +\infty$, we obtain because of (31):

$$\sum_1^2 l \int_0^T \left\{ \left(u_l''(t), v_l'(t) \right)_l + \left(A_l u_l(t), v_l'(t) \right)_l + \left(B_l u_l'(t), v_l'(t) \right)_l + \right. \\ \left. - \left(f_l(t), v_l'(t) - u_l'(t) \right)_l \right\} dt \geq \sum_1^2 l \int_0^T \left(B_l u_l'(t), u_l'(t) \right)_l dt.$$

Using theorem 3, with the above procedure we prove the following

THEOREM 5. If for $l=1,2$ $f_l \in H^1(0,T;V_l')$ and $f_l(0)=f_l(T)$ then there exists a $(u_l, u_2) \in H^2(0,T;V_l)$ solution of problem (P).

Let us complete the study of problem (P) by analysing a particular case. Let: $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ be a $C^{1,1}$ open, bounded, connected set of R^n and $V_1 = V_2 = H_0^1(\Omega)$.

We now consider the uniformly elliptic second order linear differential operator

$$A = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad \text{with } a_{ij} = a_{ji} \in C^{0,1}(\Omega),$$

and let

$$A_l = \alpha_l A, \quad B_l = \beta_l A,$$

α_1 and β_1 being positive constants.

THEOREM 6. If for $l=1,2$ $f_l \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, then there exists a $(u_1, u_2) \in \left[H^1(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \right]^2$ with $u_l'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, solution to problem (P).

PROOF. In the light of the proof given for theorem 4 and of statements made in the introduction concerning solutions of problem (P), it is evidently enough to prove that for the solution $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ of the problem (14), (15), (16) we have:

$$(32) \quad \begin{aligned} u'_{\varepsilon} &\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad u''_{\varepsilon} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\|u'_{\varepsilon}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} + \|u''_{\varepsilon}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq c.$$

Assumptions made for Ω and operator A assure ([2], Remark 31, pg. 308; [7], theor. 2.1, pg. 201) the existence of a base $\{z_j\}$ of $H_0^1(\Omega)$ of functions of $H_2(\Omega)$ such that

$$(33) \quad Az_j = \lambda_j z_j$$

where $\{\lambda_j\}$ is a positively diverging sequence of positive numbers. Let V_n be the space spanned by $\{z_1, \dots, z_n\}$, from theorem 1 there is a unique $(w_{1n}, w_{2n}) \in [H^2(0, T; V_n)]^2$ solution of the problem:

$$(34) \quad \begin{aligned} &\sum_1^2 l \left(w''_{ln}(t) + \alpha_l A w_{ln}(t) + \beta_l A w'_{ln}(t) - f_l(t), y_l \right) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(\left[w'_{1n}(t) - w'_{2n}(t) \right]^+, y_1 - y_2 \right) = 0 \quad \text{a.e. on }]0, T[\quad \forall (y_1, y_2) \in V_n^2, \\ (35) \quad &w_{ln}(0) = w_{ln}(T), \quad w'_{ln}(0) = w'_{ln}(T). \end{aligned}$$

Recalling (33), (34), may also be written as:

$$\begin{aligned} &\sum_1^2 l \left(w''_{ln}(t) + \alpha_l A w_{ln}(t) + \beta_l A w'_{ln}(t) - f_l(t), A y_l \right) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(\left[w'_{1n}(t) - w'_{2n}(t) \right]^+, A[y_1 - y_2] \right) = 0 \\ &\text{a.e. on }]0, T[\quad \forall (y_1, y_2) \in V_n^2 \end{aligned}$$

and this, together with (35) and the following inequality

$$\left(\left[w'_{1n}(t) - w'_{2n}(t) \right]^+, A \left[w'_{1n}(t) - w'_{2n}(t) \right] \right) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

allow us to acquire the upper limitation:

$$\|Aw'_{ln}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon \text{ and } n)$$

from which ([7], theor. 2.1, pg. 201):

$$(36) \quad \|w'_{ln}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} \leq c.$$

The further upper limitation

$$(37) \quad \|w''_{ln}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c \quad (c = \text{const.} > 0 \text{ indep. from } \varepsilon \text{ and } n)$$

follows because of (34), (35), (36).

Inequalities (36), (37) bring us to (32) with the same technique used for theorem 2 considering that now $F_l \in L^2(\Omega)$ and that $w_{l0} = A_l^{-1} F_l \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ ([7], theor. 2.1, pg. 201).

REFERENCES

1. H. BRÉZIS, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures Appl. 51 (1972), 1-168.
2. H. BRÉZIS, *Analisi funzionale*, Liguori ed., 1986.
3. J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
4. J.L. LIONS, *Sur quelques questions d'Analyse de Mécanique et de Contrôl Optimal*, Conférence à Montreal, 1976.
5. J.L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. I, Dunod, 1968.
6. J. NAUMANN, *Periodic solutions to certain evolution inequalities*, Czech. Math. Journ. 27 (1977), 424-433.
7. J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967.
8. G. PRODI, *Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde con termine dissipativo non lineare*, Rend. Sem. Mat. Padova 35, 1965.
9. L. SCHWARTZ, *Distribution à valeurs vectorielles*, I, II, Annales Institut Fourier, 7 (1957), 1-141; 8 (1958), 1-209.

*Finito di stampare nel mese di gennaio 1996 dalla Tipografia «Monotipia Cremonese»,
Cremona*