

Numero 8 - 1994

RATIO MATHEMATICA

**Rivista di
applicazioni della matematica**

a cura di

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo

Comitato Scientifico

Albrecht Beutelispacher, *Giessen*

Piergiulio Corsini, *Udine*

Bal K. Dass, *Delhi*

Franco Eugeni, *Roma*

Mario Gionfriddo, *Catania*

Antonio Maturo, *Pescara*

Bruno Rizzi, *Roma*

Aniello Russo Spena, *L'Aquila*

Romano Scozzafava, *Roma*

Numero 8 - 1994

RATIO MATHEMATICA

**Rivista di
applicazioni della matematica**

a cura di

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo

Comitato Scientifico

Albrecht Beutelspacher, *Giessen*

Piergiulio Corsini, *Udine*

Bal K. Dass, *Delhi*

Franco Eugeni, *Roma*

Mario Gionfriddo, *Catania*

Antonio Maturo, *Pescara*

Bruno Rizzi, *Roma*

Aniello Russo Spena, *L'Aquila*

Romano Scozzafava, *Roma*

Numero 8 - 1994

RATIO MATHEMATICA

Rivista di
applicazioni della matematica

INDICE

S. DORIA, <i>Il processo di memorizzazione descritto mediante il modello neuronale di Hopfield</i>	pag.	3
D. P. ERRIGO, <i>Elementi di teoria ingenua delle matrici cubiche</i>	pag.	9
C. TOSONE, <i>Considerazioni sul teorema di Heine - Pincherle - Borel</i>	pag.	15
L. TIBILETTI, <i>Connectedness, Arcwise - connectedness and Convexity for Level - sets of Multidimensional Distribution Functions</i>	pag.	21
F. MERCANTI, <i>Una rassegna dei risultati e delle prospettive dei Sistemi Digitali Multicanale</i>	pag.	29
G. IPPOLITI e D. MARCONI, <i>Sistemi automatici di riconoscimento per le geometrie dei codici a barre</i>	pag.	59
F. DI GENNARO, D. MAIORANI e F. EUGENI, <i>Un antico modello matematico per divinazioni contenuto in una enciclopedia di fine Settecento</i>	pag.	69
S. D'ANDREA, <i>Su alcune problematiche per l'insegnamento della matematica in presenza di disabilità: strategie per un curriculum minimo</i>	pag.	83
A. MATURO e G. DI BIASE, <i>Considerazioni probabilistiche su alcune strategie nei giochi d'azzardo</i>	pag.	91

IL PROCESSO DI MEMORIZZAZIONE DESCRITTO MEDIANTE IL MODELLO NEURONALE DI HOPFIELD

Serena Doria*

Introduzione

In questi ultimi anni il cervello e la sua attivita' sono al centro degli studi di scienziati e ricercatori di diverse discipline. Anche i matematici sono intenti nello studio di modelli che simulino l'attivita' cerebrale e aiutino a capire, almeno in parte i meccanismi che la regolano.

Sicuramente tra le capacita' piu' interessanti del cervello c'e' quella di apprendere, di imparare cioe' dagli errori e dall'esperienza. Non secondaria e' poi la capacita' di memorizzare un'immagine, un odore o un suono e riconoscerlo sotto particolari stimoli. Nessun computer, finora esistente, riesce a memorizzare un numero di informazioni prossimo a quello che e' capace di contenere il cervello e soprattutto a gestire tutti i dati a sua disposizione in tempi brevissimi.

In questo lavoro viene presentato il modello di Hopfield, come esempio di schematizzazione dell'attivita' neuronale, con particolare riferimento al processo di memorizzazione.

L'importanza che i modelli neuronali, ottenuti come generalizzazioni di quello di Hopfield, hanno nella ricerca ed in particolare nella ricerca informatica e' dovuta al fatto che essi rappresentano un esempio di memoria associativa. Un tipo di memoria in cui, a partire da un'informazione parziale, mediante una dinamica propria della rete neuronale, si arriva all'informazione totale.

*Facolta' di scienze M.F.N. Universita' "G.D'Annunzio "
Via dei Vestini - Chieti

Il vantaggio di una memoria associativa rispetto ad una memoria ad indirizzi sta nel fatto che una volta data in input l'informazione parziale si arriva all'informazione totale mediante la dinamica della rete. Non e' necessario un continuo confronto tra memoria centrale e disco su cui sono contenute le informazioni con notevole risparmio di tempo.

Alcuni aspetti biologici

Prima di procedere nella descrizione del modello matematico e' necessario schematizzare brevemente il funzionamento delle cellule nervose.

L'attivita' di un neurone e' determinata dalla membrana neuronale, che per la sua diversa permeabilita' ad alcuni ioni determina una diversa concentrazione di cariche elettriche tra l'interno e l'esterno, producendo una differenza di potenziale elettrico nel neurone.

Quando la differenza di potenziale supera un certo valore soglia, il neurone emette un impulso elettrico, cioe' risulta attivo. Altrimenti rimane quiescente.

L'impulso elettrico, emesso dal neurone viene trasmesso alle altre cellule nervose attraverso un prolungamento che prende il nome di assone; inoltre ogni neurone ha altri prolungamenti, i dendriti, che hanno la funzione di ricevere gli eventuali impulsi provenienti dalle altre cellule nervose.

Assoni e dendriti di differenti neuroni sono congiunti tra loro dalle sinapsi, degli ispessimenti che permettono il passaggio degli impulsi elettrici tra i neuroni.

Le sinapsi possono avere un effetto inibitorio o eccitatorio sull'impulso elettrico trasmesso e secondo le ipotesi piu' recenti in esse e' la " sede " della memoria.

Il modello

I criteri con cui i processi di memorizzazione sono stati schematizzati hanno preso spunto dall'attivita' del cervello. In particolare si e' fatto riferimento agli esperimenti di Miyaschita sulla memoria visiva delle scimmie.

In tali esperimenti si e' visto tramite degli elettrodi, come, sottoponendo una scimmia ad uno stimolo visivo per un tempo di due secondi, nel suo cervello risultassero attivi solo determinati neuroni. L'immagine e' stata tolta e dopo un periodo di 16 secondi e' stata riproposta. Nei casi in cui la scimmia ha riconosciuto l'immagine si e' notato come nel suo cervello risultassero essere attivi proprio quei determinati neuroni che erano attivi in presenza dello stimolo iniziale.

A seguito di questi esperimenti il processo di memorizzazione e' stato interpretato come un ritorno del cervello ad configurazione neuronale uguale a quella che aveva nel momento dello stimolo iniziale.

Nel modello di Hopfield la rete neuronale viene rappresentata come un sistema costituito da N unita', i neuroni, che interagiscono fra loro nel tempo. Ad un certo istante t la rete e' rappresentata da un vettore ad N componenti

$$\{V(t)_1, V(t)_2, \dots, V(t)_N\} \quad (1)$$

ciascuna delle quali rappresenta l'attivita' di un neurone in quell' istante, in particolare $V_i(t) = 1$ se l' i -simo neurone e' attivo all'istante t e $V_i(t) = -1$ se il neurone e' quiescente.

Ad ogni istante di tempo t la rete e' caratterizzata da una configurazione determinata dai valori dei potenziali elettrici assunti dai neuroni.

In una rete cosi' schematizzata le informazioni , o patterns, vengono rappresentate da p vettori

$$\underline{\xi}^\mu = (\xi_1^\mu, \xi_2^\mu, \dots, \xi_N^\mu) \quad \mu = 1, \dots, p \quad (2)$$

$$\text{con } \xi_i^\mu = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}.$$

L'informazione viene quindi rappresentata da una configurazione della rete dove, per esempio, il primo neurone e' attivo, il secondo quiescente e cosi' via.

Gli impulsi esterni ricevuti, ad esempio un odore o la visione di un immagine, producono configurazioni differenti perche' diversi sono i neuroni stimolati dalle due percezioni.

Una simile rappresentazione delle informazioni e' analoga a come le informazioni vengono rappresentate nella memoria di un computer tramite bytes di variabili binarie.

Il potenziale che il neurone i -simo riceve dagli altri neuroni e' rappresentato mediante la somma, su tutti i restanti neuroni, dei potenziali che questi inviano al neurone i -simo :

$$\sum_{j \neq i} J_{ij} V_j \quad (3)$$

dove J_{ij} sono i coefficienti sinaptici, che determinano l'intensita' dell'interazione tra i neuroni e sono definiti mediante la seguente regola di Hebb :

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^P \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} \quad (4)$$

Tale definizione dei coefficienti sinaptici rispecchia aspetti biologici per cui neuroni entrambi passivi o attivi tendono a rinforzare l'attivita' sinaptica.

La dinamica neuronale, ossia l'interazione tra i neuroni, e' rappresentata dal seguente sistema di equazioni

$$V_i(t+1) = \text{segno} \left(\sum_{j \neq i} J_{ij} V_j(t) - \theta_i \right) \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

dove θ_i rappresenta il valore soglia dell'i-simo neurone e la funzione segno assume il valore +1 se l'argomento e' positivo e valore -1 se l'argomento e' negativo. Un neurone risultera' attivo in un istante successivo se la somma dei potenziali elettrici, che riceve dagli altri neuroni, supera il suo valore soglia e cio' in analogia a quanto accade biologicamente.

La configurazione iniziale, che rappresenta lo stimolo esterno percepito, si ottiene perturbando con un fattore aleatorio δ_i il vettore in cui e' memorizzata l'informazione che si vuole riconoscere, ossia:

$$V_i(0) = \xi_i^{\mu} \delta_i \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Con questa scelta della dinamica e dei coefficienti sinaptici si ha che, iterando la dinamica, si ottiene una configurazione della rete neuronale uguale a quella dell'informazione $\underline{\xi}^{\mu}$, cioe' il pattern e' stato riconosciuto.

In una rete neuronale cosi' schematizzata e' indispensabile introdurre un parametro che permetta di confrontare tra loro due configurazioni, per poter stabilire se un'informazione e' stata riconosciuta. Tale parametro e' il parametro di overlap definito da:

$$m^{\mu}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^{\mu} V_j(t) \quad (7)$$

Si osservi che tale parametro assume valori compresi tra -1 ed 1 e che si ha il riconoscimento totale di un'informazione quando esso assume valore 1 ossia quando la rete e' tornata in una configurazione identica a quella che definisce l'informazione.

BIBLIOGRAFIA

1. J. HOPFIELD, *Proceedings of the National Academy of Science*, USA Vol 79, pp 2554-2558, Biophysics, Aprile 1982
2. B.TIROZZI e S.DORIA, *Highly Diluted Asymmetrical Neural Networks*, Atti del Convegno "Stochastic Process- Geometry and Physic" Locarno, Svizzera, 1991.
3. D. AMIT, *Modelling Brian Function: the world of attractor neural network*, N.Y. Cambridge University Press ads, 1989.
4. A. MATURO, *Numeri pseudocasuali*, Libreria dell'Universita' Editrice Pescara, 1989
5. C.CIARLANTE, S.DORIA e A.MATURO, *Glicine: suo tropismo e sua intelligenza*, Atti del Convegno Nazionale " Protezione delle culture: osservazioni, previsioni, decisioni" Pescara, 1993.

ELEMENTI DI TEORIA INGENUA DELLE MATRICI CUBICHE

Demetrio P. Errigo

SUNTO - Viene proposto un formalismo con definizioni elementari della teoria matriciale con riferimento ad una struttura matriciale tridimensionale. Da ultimo si è posto in relazione la non possibilità di trasposizione con gruppi di rotazione e di traslazione.

ABSTRACT - A formalism was resolved by elementary definitions of matrix theory with reference to a three dimensions matrix structure. Finally the not transposition's possibility was connected with rotation and translation sets

DEFINIZIONI

Sia un campo arbitrario K . Un insieme ordinato tridimensionale visualizzato come proiettato sui tre semipiani ortogonali, ognuno dei tre definito come (0) , si chiama proiezione matriciale su K .

La composizione:

$$a_{lm(0)} \oplus a_{(0)mn} \oplus a_{l(0)n} = a_{lmn} \quad (\text{con } l,m,n = 1,2,\dots,N) \quad (1)$$

determina un insieme di N^3 scalari che a loro volta costituiscono la matrice cubica.

In ogni semipiano orientato ortogonale si individuano righe e colonne; il metodo di individuazione è proiettivo.

MATRICI UGUALI

Due matrici $A = [a_{lmn}]$ e $B = [b_{lmn}]$ si dicono uguali

$$\text{sse } [a_{lmn}] = [b_{lmn}] \quad \text{per ogni } l,m,n = 1,2,\dots,N.$$

MATRICE ZERO

Una matrice $A = [a_{lmn}]$ è detta Zero quando ogni suo elemento è zero:

$$a_{lmn} = 0 \text{ per ogni } l,m,n = 1,2,\dots,N.$$

SOMMA (DIFFERENZA) DI MATRICI

se A e B sono due matrici della stessa dimensione, si definisce somma o differenza di A e B , la matrice C i cui elementi sono:

$$c_{lmn} = a_{lmn} \oplus b_{lmn} = a_{lm(0)} \pm b_{lm(0)} \oplus a_{(0)mn} \pm b_{(0)mn} \oplus a_{l(0)n} \pm b_{l(0)n} \quad (2)$$

IL PRODOTTO DI UNO SCALARE K per la matrice cubica A, è la matrice ottenuta:

$$Ka_{lm(0)} \oplus Ka_{(0)mn} \oplus Ka_{l(0)n} = KA \quad (3)$$

PRODOTTO DI MATRICI CUBICHE

Se A e B sono due matrici cubiche della stessa dimensione, si definisce il prodotto AB come la matrice cubica C i cui elementi proiettivi, per i quali può non valere la regola di commutazione, sono:

$$\begin{cases} c_{lm(0)} = \sum a_{lk(0)} b_{km(0)} \\ c_{(0)mn} = \sum a_{(0)mk} b_{(0)kn} \\ c_{l(0)n} = \sum a_{l(0)k} b_{k(0)n} \end{cases} \quad (4)$$

in particolare si possono sviluppare le potenze:

$$A^2 = AA; \quad A^3 = A^2A; \dots \quad (5)$$

ELEMENTO DI MATRICE

Ogni elemento di matrice cubica, può essere indicato o individuato dalla cella che lo contiene; detta cella può essere planare se appartenente ad una matrice proiezione (o ad una parallela) oppure spaziale.

SUCCESSIONI (con l,n,m, variabili da 1 ad N)

$$\begin{cases} a_{lmn}]_n = \text{"prisma" con base la cella } a_{lm(0)}; \\ \quad \text{composto di N elementi} = P_{lm(0)} \\ a_{lmn}]_l = \text{"prisma" con base la cella } a_{(0)mn}; \\ \quad \text{composto di N elementi} = P_{(0)mn} \\ a_{lmn}]_m = \text{"prisma" con base la cella } a_{l(0)n}; \\ \quad \text{composto di N elementi} = P_{l(0)n} \end{cases} \quad (6)$$

I tre prismi individuano una ed una sola cella spaziale contenente l'elemento a_{ijk} quando è soddisfatta la combinazione degli indici.

TRACCIA

Se $a_{iii} = 1$ la matrice cubica elemento-diagonale viene definita matrice cubica elemento-diagonale Unità o Identità, $I = A^0$ la cui traccia vale:

$$\text{Tr} I = N.$$

Vale per essa la regola $AI = IA = A$ e la proprietà dello scalare: se KI è una matrice elemento-diagonale cubica di elementi K , la sua Traccia vale

$$\text{Tr } KI = K \sum a_{iii} = KN \quad (a_{iii} = 1) \quad (7)$$

INVERTIBILITA'

Per le matrici cubiche è ammessa l'invertibilità, e se A è invertibile, allora

$$AB = I = (BA)$$

e B sarà chiamata matrice inversa di A e sarà denominata come A^{-1} di elementi a^{-1}_{lmn} .

MATRICE TRASPOSTA

Dato che ad ogni elemento a_{ijk} corrispondono tre celle base, traspostando ciascuna delle tre matrici planari base (o proiezione) si ottengono ancora tre "prismi" con le seguenti definizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int a_{lmn} \,]_n = P_{n(l)0} = \sim P_{lm(0)} \\ \int a_{lmn} \,]_l = P_{l(0)mn} = \sim P_{l(0)mn} \\ \int a_{lmn} \,]_m = P_{m(0)l} = \sim P_{lm(0)n} \end{array} \right. \quad (8)$$

La combinazione degli indici della (1) non è soddisfatta se non nel caso di una matrice cubica elemento-diagonale costituita dal "pseudo-prisma"

$$\int a_{iii} \,]_i = P \quad (9)$$

corrispondente alle tre matrici proiezioni diagonali.

Pertanto non esiste trasposta in senso proprio.

Dalle definizioni (6) ne deriva che un elemento $a_{(ijk)*}$ può essere considerato intersezione di tre matrici ortogonali

$$a_{(ijk)*} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_{i*jk} \quad (i* = \text{cost}; j,k = 1,2,\dots,N) \\ M_{ij*k} \quad (J* = \text{cost}; i,k = 1,2,\dots,N) \\ M_{ijk*} \quad (k* = \text{cost}; i,j = 1,2,\dots,N) \end{array} \right. \quad (10)$$

Dalle definizioni (8) d'altra parte si nota che non esistendo la trasposta in senso proprio, ad $a_{(ijk)*}$ corrispondono tre "prismi" ognuno dei quali può costruirsi con l'intersezione di due matrici ortogonali.

In senso lato si può dire che la trasposta dell'intersezione di tre matrici ortogonali è costituita da tre coppie di matrici ortogonali.

Sempre in senso lato si può quindi concludere che la trasposta dell'intersezione di tre matrici ortogonali è costituita da tre coppie di matrici ortogonali traspostate, e a sua volta le costituisce.

Data la permutazione di indici, poi, si ha anche:

$$\approx a_{(ijk)*} = a_{(ijk)*} \quad (11)$$

la cui trasposta è:

$$\sim a_{(ijk)*} \rightarrow \begin{cases} M_{j*ik} ; M_{ji*k} \\ M_{ik*j} ; M_{ikj*} \\ M_{k*ji} ; M_{kji*} \end{cases} \quad (12)$$

(indici con * = cost; varianza indici **non*** = 1,2 ... N)

APPENDICE

§ 1

In uno spazio cartesiano ortogonale di dimensioni finite in cui vigono solo proprietà di parallelismo e di normalità, si possono definire "generatori di concetti" o "generatori di insiemi di operazioni". i seguenti enti:

- "elemento";
- "prisma" (come insieme di elementi, lineare)
- "matrice" (come insieme di elementi, planare).

dei quali solo l'"elemento" è un ente reale e rappresentativo, mentre il prisma e la matrice sono in ogni caso solo enti rappresentativi..

Gli enti di cui sopra avranno le seguenti relazioni di appartenenza:

- 1) due elementi distinti individuano un prisma cui essi appartengono
- 1') due matrici distinte individuano un prisma che ad esse appartiene
- 2) un prisma ed un elemento che non appartenga al prisma individuano una matrice cui essi appartengono
- 2') una matrice ed un prisma che non appartenga alla matrice individuano un elemento che ad essi appartiene.

§ 2

Gli enti di cui al § precedente generano forme fondamentali classificabili in tre gruppi:

1^ gruppo: forme di prima specie

- la punteggiata: insieme finito di tutti gli elementi che appartengono ad un "prisma";
- la bipunteggiata: i due "prisma" di una "matrice" che individuano un elemento;
- il bipiano: le due "matrici" non parallele che individuano un "prisma".

2^ gruppo: forme di seconda specie

- la "matrice" punteggiata e la "matrice" rigata: rispettivamente insieme di tutti gli elementi o di tutte le righe e colonne ("prismi") che appartengono ad una "matrice";

- la tristella di "prismi" e la tristella di "matrici": rispettivamente l'insieme di tre "prismi" o delle tre "matrici" che individuano un elemento.

3[^] gruppo: forme di terza specie

- spazio di elementi: la matrice cubica
- spazio di "prismi": la matrice cubica
- spazio di "matrici": la matrice cubica.

OSSERVAZIONE

Considerato uno spazio contenente un numero finito di elementi ordinati (matrice cubica) nel quale ogni "prisma" contenga N elementi, si ha:

- ogni matrice contiene N² elementi e 2N "prismi" (righe, colonne);
- la matrice cubica contiene N³ elementi;
- la matrice cubica contiene 3N² "prismi" lineari;
- la matrice cubica contiene 3N "matrici" planari.

§ 3

Dato un elemento a di matrice cubica di indici prefissati $(ijk)^*$, cioè $a_{(ijk)^*}$, ad esso corrispondono i tre "prismi":

$$\left\{ \begin{array}{ll} P a_{i^*j^*k} & (k = 1, 2, \dots, N) \\ P a_{ij^*k^*} & (i = 1, 2, \dots, N) \\ P a_{i^*jk^*} & (j = 1, 2, \dots, N) \end{array} \right.$$

e ad esso corrispondono pure le tre "matrici":

$$\left\{ \begin{array}{ll} M a_{i^*jk} & (j, k = 1, 2, \dots, N) \\ M a_{ij^*k} & (i, k = 1, 2, \dots, N) \\ M a_{ijk^*} & (i, j = 1, 2, \dots, N) \end{array} \right.$$

Nota: la varianza è unicamente per gli indici non star; da questo punto verrà tralasciata supponendola sottintesa.

Eseguendo la trasposizione, all'elemento $\sim a_{(ijk)^*}$ corrispondono tre "prismi" e cioè rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} P a_{j^*i^*k} \\ P a_{ik^*j^*} \\ P a_{k^*ji^*} \end{array} \right.$$

e ad esso e rispettivamente ad essi corrispondono tre coppie di "matrici" e cioè rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} [M a_{j^*ik} ; M a_{k^*ji}] \text{ (primo prisma)} \\ [M a_{ji^*k} ; M a_{ik^*j}] \text{ (secondo prisma)} \\ [M a_{ikj^*} ; M a_{kji^*}] \text{ (terzo prisma)} \end{array} \right.$$

In definitiva la trasposizione trasforma forme di seconda specie in forme di prima specie e precisamente:

- la tristella di "prismi" in tre punteggiate;
- la tristella di "matrici" in tre bipiani.

Si può risolvere la trasposizione studiando contemporaneamente la trasposizione tra forme di prima specie da un lato e di seconda specie dall'altro, cioè con le trasposte delle trasposte, secondo la sottoannotata tabella:

n°	1^ specie	trasposta	1^ specie
a)	$P a_{i^*j^*k}$	----->	$P a_{j^*i^*k}$
b)	$P a_{ij^*k^*}$	----->	$P a_{ik^*j^*}$
c)	$P a_{i^*jk^*}$	----->	$P a_{k^*ji^*}$
n°	2^ specie	trasposta	2^ specie
d)	$M a_{i^*jk}$	----->	$M a_{j^*ik} ; M a_{k^*ji}$
e)	$M a_{ij^*k}$	----->	$M a_{ji^*k} ; M a_{ik^*j}$
f)	$M a_{ijk^*}$	----->	$M a_{ikj^*} ; M a_{kji^*}$

e con le seguenti ipotesi:

1^:	rotazione di	$\pi/2$	con l'asse parallelo all'asse k in posiz.	$i = j (R_k);$
2^:	"	"	"	$j = k (R_i);$
3^:	"	"	"	$k = i (R_j);$
4^:	n.2 traslazioni lungo	il primo	asse	$(T_i);$
5^:	"	"	secondo	$(T_j);$
6^:	"	"	terzo	$(T_k);$

Ci si è così condotti allo studio di un gruppo di rotazioni per le forme di prima specie e di un gruppo di traslazioni per le forme di seconda specie.

BIBLIOGRAFIA

1. F. AYRES Jr, *Matrices*, McGraw-Hill Book Company, 1962
2. M. CERASOLI-F. EUGENI-M. PROTASI, *Matematica Discreta*, Zanichelli, 1988
3. B. SEGRE, *Geometria Analitico-Descrittiva*, Patròn, 1950

CONSIDERAZIONI SUL TEOREMA DI HEINE-PINCHERLE-BOREL

Carlo Tosone

SUNTO - Questo lavoro propone un esempio, in uno spazio metrico, di un sottoinsieme chiuso e limitato che non è compatto.

Nella prima parte vengono richiamati alcuni noti concetti di topologia associata ad uno spazio metrico, utili per la dimostrazione successiva.

ABSTRACT - This work contains an example, within a metric space, of a closed and limited under-whole which is not compact.

In the first part, some well-known concepts, about topology relating a metric space, are recalled, useful for the subsequent demonstration.

INTRODUZIONE

Si richiamano brevemente alcune classiche nozioni sulla topologia indotta da uno spazio metrico.

Siano (X,d) uno spazio metrico. Fissato $r \in [0, +\infty)$ ed $x \in X$, il sottoinsieme

$U_{x,r} = \{y \in X: d(x,y) < r\}$ e' detto sfera aperta di centro x e raggio r .

Sia T la topologia indotta in X dalla metrica d , ossia la topologia che ha per base di aperti le sfere aperte.

Indichiamo con (X,T) lo spazio topologico con la topologia indotta dalla metrica d .

Un sottoinsieme Y di X dicesi compatto se ogni ricoprimento di aperti di Y contiene un sottoricoprimento finito di Y . E' noto che in uno spazio topologico di Hausdorff ogni compatto e' un chiuso quindi, poiche' uno spazio metrico con la topologia indotta e' di Hausdorff, in (X,d) i compatti sono chiusi.

Inoltre si puo' dimostrare che i compatti di uno spazio metrico sono limitati, cioe' contenuti in sfere aperte.

In (X,d) si ha quindi la seguente implicazione:

$Y \text{ compatto} \Rightarrow Y \text{ chiuso e limitato}$.

Non e' vera, in generale, l'implicazione opposta.

Alla fine del secolo XIX i matematici Heine, Pincherle e Borel dimostrarono il seguente teorema:

i compatti in $\mathbb{R}^n$, spazio metrico euclideo, sono tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati.

In questo articolo si espone un esempio di sottoinsieme, di uno spazio metrico, chiuso e limitato che non e' compatto.

L'esempio e' di interesse didattico poichè, pur presentando una problematica delicata, fornisce, utilizzando soltanto i numeri razionali e quindi un ambiente ben noto agli allievi, una costruzione di tale sottoinsieme nella quale viene riletto, con altro occhio, un limite fondamentale.

1. SUCCESSIONI DI CAUCHY E SPAZI METRICI.

Una successione $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di punti di X , si definisce successione di Cauchy se risulta:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, m > \nu, d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Si dice che una successione $\{y_n\}$ di punti di X converge ad $l \in X$ se risulta:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n > \nu, d(l, y_n) < \varepsilon.$$

E' noto che ogni successione convergente è di Cauchy, ma in generale non vale il viceversa.

Le successioni convergenti sono tutte e sole le successioni di Cauchy negli spazi metrici completi, ovvero per definizione (X,d) si dice completo se ogni successione di Cauchy e' convergente, altrimenti si dice incompleto.

In uno spazio metrico non completo, il codominio di una qualunque successione di Cauchy non convergente e' un sottoinsieme chiuso e limitato, ma non è compatto.

2. ESEMPIO DI UN SOTTOINSIEME CHIUSO E LIMITATO NON COMPATTO.

Sia (X,d) uno spazio metrico non completo, si consideri una successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy non convergente.

Posto $Y = \{y_n\}$ dimostriamo che :

Y è un sottoinsieme chiuso, limitato ed infinito.

Dim.

1) Y è un chiuso :

L' insieme Y contiene tutti i suoi punti di accumulazione , in quanto il derivato di Y è vuoto. Infatti se esistesse un punto $l \in X$ di accumulazione per Y , essendo y_n una successione di Cauchy , y_n sarebbe convergente ed il suo unico limite sarebbe l , in contrasto con quanto supposto riguardo alla non convergenza di y_n .

2) Y è limitato :

dalla definizione di successione di Cauchy è facile dimostrare l' asserto.

3) Y e' infinito :

invero se Y fosse un insieme finito , la successione y_n dovrebbe assumere un certo valore l un numero infinito di volte; essendo di Cauchy, risulterebbe definitivamente costante e quindi convergente contro l' ipotesi fatta.

Proviamo allora la seguente :

Se $Y = \{y_n\}$ è una successione di Cauchy non convergente allora Y non è compatto.

Dim.

La dimostrazione viene fatta per assurdo supponendo che Y sia compatto.

Poiche' $D(Y) = \emptyset$, $\forall y \in Y$ esiste un intorno aperto U_y tale che $U_y \cap Y = \{y\}$. Essendo $\{U_y\}_{y \in Y}$ un ricoprimento aperto di Y , se Y fosse compatto conterrebbe un sottoricoprimento finito di Y , ovvero si avrebbe $Y \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{y_{i_k}}$ e quindi :

$$Y = Y \cap \left(\bigcup_{k=1}^n U_{y_{i_k}} \right) = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}\}.$$

E' ovvio l' assurdo in quanto Y è un sottoinsieme infinito di X .

Illustriamo con un esempio la proposizione appena dimostrata. Consideriamo come spazio metrico non completo l' insieme dei numeri razionali Q , con la metrica indotta dalla metrica euclidea di R . In Q esistono infinite successioni di Cauchy non convergenti, tra le quali la successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Come è noto in R esiste il limite di tale successione ed è il numero di Nepero e . Il numero e è un irrazionale e quindi non appartiene all' insieme Q . La successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ assume valori appartenenti all' intervallo $[2, 3)$, cioè è limitata. Inoltre, poichè è monotona strettamente crescente, è a codominio infinito. Essendo una successione di razionali è un sottoinsieme chiuso di Q .

E' facile verificare che $Y = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in N}$ non è un sottoinsieme compatto di Q .

Infatti, i punti dell' insieme Y sono tutti punti isolati e pertanto per ogni $y \in Y$ esiste un aperto A_y : $A_y \cap Y = \{y\}$.

E' possibile, cioè, costruire una successione di aperti nella maniera che segue :

$A_1 =$ aperto tale che $A_1 \cap Y = \{y_1\}$;

$A_2 =$ aperto tale che $A_2 \cap Y = \{y_2\}$;

.....

 $A_n =$ aperto tale che $A_n \cap Y = \{y_n\}$;

La successione di aperti $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di Y che non contiene alcun sottoricoprimento finito, avendosi :

$Y \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ma posto $I = \mathbb{N} - \{i\}$ con $i \in \mathbb{N}$, risulta Y non incluso nell'

$\bigcup_{n \in I} A_n$ in quanto $y_i \in Y$ e $y_i \notin A_n \forall n \in I$.

Osserviamo che se si considera Y come sottoinsieme di R (R è uno spazio metrico completo) Y non è compatto in R , ma ciò non contrasta con il teorema di Heine-Pincherle-Borel. Risulta che Y non è, invero, un chiuso di R , perchè non contiene il punto $e \in R$, che è di accumulazione per Y . E' opportuno precisare che esempi analoghi si ottengono considerando un qualunque campo K , isometrico a Q , una successione di Cauchy non convergente, cioè che abbia per limite un punto del completamento dello spazio metrico K . Più in generale, non è necessario che lo spazio metrico considerato abbia le stesse caratteristiche di Q , ma è sufficiente supporre che sia incompleto.

BIBLIOGRAFIA

1. GIUSEPPE TALLINI, *Strutture geometriche*, Liguori, Napoli 1987.
2. FEDERICO CAFIERO, *Lezioni di analisi Matematica*, Liguori, Napoli 1980.

CONNECTEDNESS, ARCWISE- CONNECTEDNESS AND CONVEXITY FOR LEVEL-SETS OF MULTIDIMENSIONAL DISTRIBUTION FUNCTIONS

Luisa Tibiletti*

SUNTO - Si individuano condizioni sufficienti per garantire le proprietà di connessione, arc-connessione e convessità degli insiemi di livello delle funzioni di ripartizione multidimensionali.

ABSTRACT - Sufficient conditions for guaranteeing connectedness, arcwise-connectedness and convexity for level-sets of multidimensional distribution functions are provided.

1. INTRODUCTION**

General concavity properties of n -dimensional ($n \geq 2$) distribution functions (d.f.'s) have become of recent interest in the literature. See, for example, TONG [9], IYENGAR-TONG [3] for concavity of special distribution classes, TIBILETTI [7] for d.f. quasi-concavity, MARSHALL-OLKIN [4] for Schur-concavity.

In this note we confine our attention to connectedness, arcwise-connectedness and convexity of the d.f. level-sets. Sufficient conditions for guaranteeing above mentioned properties are stated. This issue can be relevant both for theoretical and applied statistical analysis. Recently,

* Istituto di Matematica Finanziaria, Facoltà di Economia e Commercio, Piazza Arbarello 8, I-10122 Torino, Tel. +39-11-546805, fax +39-11-544004.

** *Acknowledgments*

The Author wishes to thank M. Li Calzi for some valuable suggestions and comments. Obviously, she is completely responsible for any remaining error.

TIBILETTI [8] has introduced a new notion of q -th quantile (where $q \in [0,1]$) of the random vector X as a point belonging to the q -th level-set of the d.f. of X . Previous properties characterise the quantile sets. The plan of the paper is as follows. Section 2 contains notations and preliminaries. Sufficient conditions for level-set connectedness, arcwise-connectedness and convexity are formulated in Section 3. Section 4 collects some final remarks.

2. NOTATION AND PRELIMINARIES

Let $X = (X_1, \dots, X_n)$ be a random vector. Denote by

$$F(x) = P\left\{\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x_i)\right\}$$

the distribution function of X and by

$$F_i(x) = P\{X_i \leq x\}$$

the one-dimensional marginal associated to the random variable X_i . Our aim is to investigate the properties concerning the level-sets of F , i.e.,

$$I_q = \left\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = q\right\}, \text{ where } q \in [0,1].$$

For sake of completeness, we recall the definitions utilised throughout the work.

Definition 1. A set $D \in \mathbb{R}^n$ is said to be *connected* if there exist nonempty disjoint sets $S^1 \subset \mathbb{R}^n$, $S^2 \subset \mathbb{R}^n$, such that neither contains cluster points of the other, satisfying $D = S^1 \cup S^2$.

Definition 2. A set $D \in \mathbb{R}^n$ is said to be *arcwise-connected* if for every pair of points $x \in D, y \in D$ there exists a continuous vector valued function $H(x, y; \theta)$, called an arc, defined on the unit interval and with values in D such that

$$H(x, y; 0) = y \qquad H(x, y; 1) = x.$$

We recall that every arcwise-connected set is connected, while the opposite does not necessarily hold.

Definition 3. A subset D of the n -dimensional real Euclidean space $\mathfrak{R}^n$ is a *convex* set if for every $x, y \in D$ and $0 \leq \lambda \leq 1$ we have $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$.

(See for example AVRIEL *et al.* [1] for further details).

3. CONNECTEDNESS, ARCWISE-CONNECTEDNESS AND CONVEXITY CONDITIONS

Below, sufficient conditions are provided in order to guarantee the connectedness, arcwise-connectedness and convexity of the d.f. level sets.

Proposition 1. Assume F be continuous. Then, I_q is a connected set, for all $q \in [0, 1]$.

Proof. Consider the set-valued map $g: [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ such that

$$g(q) = I_q = \{x \in \mathfrak{R}^n : F(x) = q\}.$$

Since F is continuous $I_q = F^{-1}(q)$ is a closed set and the graph of g is upper semi-continuous. It is immediate to prove that g is also lower semi-continuous, then g is continuous. Thus, I_q turns out to be connected, because it is the image of a connected set.

Proposition 2. Assume F be continuous and partially strictly increasing¹ on $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $C \subseteq \mathfrak{R}^n$. Then I_q is arcwise-connected on C , for all $q \in [0, 1]$.

Proof. Introduce the function

$$\gamma(x) = F(x) - q.$$

Let $x \in I_q \cap C$. Clearly, $\gamma(x) = 0$. Suppose to fix $(n-1)$ components of x , let $x_1, \dots, x_{n-1}$ be. Thus, the single-variable function γ is continuous, strictly increasing and changes its sign on $[a_n, b_n]$. By the implicit function theorem

¹ F is said to be partially strictly increasing on $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ if

$$t(x_i) = F(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

is a strictly increasing function on $[a_i, b_i]$ for all $x_j^* \in [a_j, b_j]$, $j \neq i$.

(see, for example, NIKAIDO [5]) there exists one and only one continuous function $\varphi_n: \mathfrak{R}^{n-1} \rightarrow \mathfrak{R}$, defined for $a_s < x_s < b_s$, ($s = 1, \dots, n-1$), such that

$$\gamma(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$$

Therefore, if $x \in I_q$ it follows that

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_n(x_1, \dots, x_{n-1})) = G(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

where $G: \mathfrak{R}^{n-1} \rightarrow \mathfrak{R}$, is a continuous and partially strictly increasing function.

Also, the repeated use of the theorem shows that there exist continuous functions $\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, such that

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_{n-1}) &= G(x_1, \dots, x_{n-2}, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2})) = \dots = K(x_1, x_2, x_3) = \\ &= K(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2)) = W(x_1, x_2) = W(x_1, \varphi_2(x_1)) = T(x_1) \end{aligned}$$

Note that: $\varphi_i, i = 2, \dots, n$ depends on the remaining $\varphi_j, j \neq i$; moreover, from the uniqueness of $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ derives that fixed x_1 there exists a unique $(n-1)$ -dimensional vector $(x_2, \dots, x_n)$ such that $x = (x_1, \dots, x_n) \in I_q$.

Consider $x, y \in I_q$, so that $F(x) = F(y) = q$. Let H be defined on $[0, 1] \subseteq \mathfrak{R}$ by

$$H(x, y; \vartheta) = (t_1, \dots, t_n), \quad \text{where}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \vartheta x_1 + (1 - \vartheta)y_1 \\ t_2 &= \varphi_2(t_1), \\ t_3 &= \varphi_3(t_1, t_2) \\ &\dots\dots\dots \\ t_n &= \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Since H is a continuous arc with value in I_q our claim comes out.

An example of arcwise-connected set is given below.

Example Let F be a d.f. defined via

$$F(x_1, x_2) = (1 - e^{-x_1})(1 - e^{-x_2}).$$

Observe that

$$I_q = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \log \frac{(1 - e^{-x_1})}{(1 - e^{-x_1} - q)} \right\}, \quad q \in [0, 1].$$

It is clear that I_q is arcwise-connected. In fact, we can connect each pair of points $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in I_q$ by the arc

$$H(x, y, \vartheta) = \left(t, \log \frac{(1 - e^{-t})}{(1 - e^{-t} - q)} \right),$$

where $t = \vartheta x_1 + (1 - \vartheta)y_1$ and $\vartheta \in [0, 1]$.

Proposition 3. Assume F be continuous and partially strictly increasing on $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Let $x = (x_1, \dots, x_n) \in I_q \cap C$, with $q \in (0, 1)$. For each $x_i, i = 1, \dots, n$ there exists an unique $(n-1)$ -dimensional vector such that

$$x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in I_q \cap C.$$

In one dimension, the q -th level set I_q is connected, then also convex for all $q \in [0, 1]$. Nevertheless, this property is not preserved in higher dimensions.

In fact, all level sets of F are convex iff F is *quasi-monotone*, i.e., F is both quasi-concave and quasi-convex, and this property holds only for a class of generalised uniform distributions.

4 SOME FURTHER FINAL REMARKS

Now, some further remarks are collected.

Remark 1. To check whether F is partially strictly increasing or not, it could be useful to calculate ∇F . If ∇F exists (obviously, a sufficient condition is that the density function is continuous) and $\nabla F > 0$ the property holds.

Remark 2. Straightforward calculations show that for the d.f. F results

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i(x_i)F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n | x_i) \text{ for all } i = 1, \dots, n$$

where

$f(x_i)$ is the one-dimensional marginal density function of X_i ,

$F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n | x_i)$ is the conditional distribution function of X given $X_i = x_i$.

Thus, the condition $\nabla F > 0$ requires that all one-dimensional densities and all conditional d.f.'s be not null.

Note that under these assumptions, the implicit function theorem guarantees that functions $\varphi_i, i = 2, \dots, n$ are also continuously differentiable.

Remark 3. F can be only partially increasing, even if each one-dimensional marginal $F_i (i = 1, \dots, n)$ is strictly increasing². Additional conditions have to be added. Clearly, the assumption that the copula has to be partially strictly increasing yields our claim (for further details on the copula and a historical overview, the reader can refer to SCHWEIZER [6]).

Remark 4. Above discussion deals with the d.f. (also called cumulative function) F of the random vector $X = (X_1, \dots, X_n)$. nevertheless, analogous results can be expanded upon for every partially decumulative-cumulative function

$$F_{i_1, \dots, i_n}(x) = P \left\{ \left(\bigcap_{i=i_1, \dots, i_k} \{X_i \leq x_i\} \right) \cap \left(\bigcap_{i=i_{k+1}, \dots, i_n} \{X_i > x_i\} \right) \right\},$$

of X , where $i_1, \dots, i_n$ are integers from 1 to n , such that $i_j \neq i_t$ if $j \neq t$ (for further details on the partially cumulative-decumulative function level-sets see TIBILETTI [8]).

² For example, consider the Fréchet cumulative function

$$F(x, y) = \min(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

where F_1 and F_2 are strictly increasing (see FRÉCHET [2]). Let $x, y, z \in \mathfrak{R}$ such that

$$F_1(x) < F_2(y) < F_2(z),$$

where $y < z$. Since $F(x, y) = F(x, z) = F_1(x_1)$, then F is not partially strictly increasing.

REFERENCES

1. M. AVRIEL, W. DIEWERT, S. SCHAIBLE, *Generalized Concavity*, Plenum Press, New York, 1988.
2. M. FRÉCHET, *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données*, Annales de l'Université de Lyon, Sec. A, (1951), 3-77.
3. S. IYENGAR, Y.L. TONG, *Convexity properties of elliptically contoured distributions with applications*, Sankyā. 51, Series A, Pt. 1, (1989), 13-29.
4. A.W. MARSHALL, I. OLKIN, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, 1979.
5. H. NIKAIDO, *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York, 1968.
6. B. SCHWEIZER, *Thirty years of copulas*, in G. Dall'Aglio, S. Kotz and G. Salinelli (eds.) *Advances in Probability Distributions with Given Marginals*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
7. L. TIBILETTI, *Quasi-concavity Property of Multivariate Distribution Functions*, 1994 submitted.
8. L. TIBILETTI, *On a new notion of multidimensional quantile*, Metron, forthcoming.
9. Y.L. TONG, *The Multivariate Normal Distribution*, Springer-Verlag, New York, 1990.

UNA RASSEGNA DEI RISULTATI E DELLE PROSPETTIVE DEI SISTEMI DIGITALI MULTICANALE

Fabio Mercanti*

SUNTO - Si illustra la problematica che ha dato origine alla teoria dei *Sistemi Digitali Multicanale* (SDM), nozione che generalizza quella di sistema inteso nella sua più ampia accezione, ricordando i *principali risultati* ottenuti particolarmente nel campo *biologico* ed *economico*. Si prospettano inoltre *problemi* tuttora *aperti*, che possano essere affrontati utilizzando detta teoria. Infine si esegue una breve analisi di studi similari, abbozzando un succinto confronto critico con la teoria dei SDM.

ABSTRACT - In this paper the *theory* of the *Multichannel Digital Systems* (SDM) has been outlined, starting from the previous concepts of *neuromachine* and of *semiautomaton*. An SDM is a generalization of a *dynamic system*, whose *states* are made by *codificated information* through certain *algebraic-combinatory* structures. Moreover some still open *biological* and *economical* problems have been prospected through the theory of the SDM. At last a brief analisys of similar studies has been performed, sketching a synthetical critical comparison with the above mentioned Theory.

* Politecnico di Milano, via Bonardi 3.

INTRODUZIONE

0. Come è detto in MELZI-MERCANTI [22], MELZI [19], un *Sistema Digitale Multicanale* (SDM) è un *sistema dinamico*, lo *stato iniziale* e l'*input-output* del quale sono costituiti da *informazione codificata in parole*, su un dato *alfabeto*, interagenti secondo il meccanismo *algebrico-combinatorio* illustrato nei §§ 8,9,10.

Nella sua accezione più generale il concetto di sistema (vedere per esempio BERTALANFFY [3]) è quello di un ente fisico che, sottoposto ad una data azione attraverso un'entrata, fornisce come conseguenza una certa uscita. Se il sistema evolve nel tempo, nel senso che l'azione sul sistema avviene nel tempo, esso viene più propriamente detto sistema dinamico (vedere per esempio RINALDI [39]). Un sistema dinamico, nel senso tradizionale del termine, scambia con l'esterno grandezze soprattutto *fisiche*. Esso possiede uno *stato istantaneo*, opportunamente descrivibile mediante certe *variabili numeriche* funzioni le une delle altre, nonché del tempo.

Il fatto che, al contrario, un SDM sia descrivibile con particolari meccanismi algebrico-combinatori, agenti su informazione opportunamente codificata, lo rende particolarmente adatto alla formulazione di *modelli matematici* per lo studio di vari oggetti e fenomeni naturali, come ad esempio *sistemi biologici*, *sistemi economici*, *sistemi di edifici rispetto ai processi di manutenzione e degrado*, *fenomeni sismici*, ecc.. Se infatti l'idea tradizionale di sistema è dominata dai concetti di *proporzionalità e continuità*, l'idea di SDM è invece dominata dalla nozione di *soglia*, ossia dal fenomeno per il quale stimoli inferiori ad una certa intensità critica non provocano alcuna risposta in un dato sistema (MERCANTI [29]).

Un esempio tipico di risultato in tal senso può trovarsi in MERCANTI [27], dove si *descrive* e si *giustifica* un particolare fenomeno della percezione, ritrovando e giustificando i risultati che si ottengono *sperimentalmente*.

L'impostazione assiomatica delle teorie esposte in questo lavoro forma una base interpretativa dei fenomeni nervosi, nel senso che consente di fondare una *teoria matematica dei fenomeni mentali* in senso lato.

In modo del tutto simile i risultati possono essere estesi ai *sistemi economici* (micro e macro).

La nozione di *Sistema Digitale Multicanale* (SDM) sintetizza ed unifica vari *modelli matematici*, proposti da Giovanni Melzi (1931-1992) e dalla sua Scuola a partire, con i primi lavori [13], [14], [15], dagli anni '70. In particolare con la teoria dei *Sistemi Digitali Multicanale* si sono riunite le due teorie, quella delle *Neuromacchine* e quella dei *Semiautomi*, in precedenza proposte. Questo lavoro di *survey* ripercorre il cammino della ricerca, dagli inizi fino ai più recenti sviluppi ottenuti dall'autore di questo articolo.

1. Nel prosieguo del survey ci si occupa essenzialmente di quattro sezioni. Nella prima sezione, LA TEORIA DELLE NEUROMACCHINE, si tratta di modelli matematici per la descrizione della corteccia cerebrale (MELZI [16]), dei primi risultati e teoremi da essi derivati, relativi alla *computazione*, ottenuti da CAROTTI, MERCANTI, PIAZZESE in [30], [24], [31], [25], [6], e dell'*adeguatezza* della teoria matematica posta alla base del procedimento usato (MERCANTI [26], MELZI-MERCANTI [20]).

Nella seconda sezione, LA TEORIA DEI SEMIAUTOMI, si supera l'aspetto strettamente neurale dei precedenti lavori introducendo, attraverso il già citato meccanismo algebrico-combinatorio e la teoria ad esso associata, i concetti di *automa digitale*, *modello matematico* degli stati di un *modello biologico*, e di *semiautoma*, costituito da un automa digitale e due *osservatori*, opportunamente interagenti con esso (MELZI-MERCANTI [21]).

Nella terza sezione, LA TEORIA DEI SISTEMI DIGITALI MULTICANALE, viene formalizzata la definizione di SDM e si espongono alcuni contributi dell'autore di questo lavoro (cfr. [28]) sull'interpretazione degli SDM, come *modelli matematici* delle proprietà di un *sistema economico*. Nella quarta sezione, PROBLEMI APERTI, si indicano le prospettive di studio aperte dagli SDM.

Infine nelle CONCLUSIONI si discutono brevemente i criteri di scelta della ricerca, confrontandoli con quelli di altri studi sull'argomento.

LA TEORIA DELLE NEUROMACCHINE

2. L'idea primitiva, sulla quale si basano i risultati esposti in questo lavoro, è quella di *neuromacchina*, introdotta da Melzi nel 1981 nel suo lavoro [16]. Una *neuromacchina* è una *macchina elaboratrice astratta* costruita, per assiomi e definizioni, in modo da possedere *prestazioni* e *strutture* tali da essere concepite, rispettivamente, come *schemi*, opportunamente semplificati, dei *processi mentali* e *schemi* accettabili delle *strutture nervose*. Essa è costituita da un insieme di *moduli* comunicanti tra loro in modo opportuno.

2.1. Un modulo, o neuromacchina elementare, è una *unità elaboratrice di informazione*, dotata di un *canale di entrata* e di un *canale di uscita*. Nel modulo risiedono certe *neuroparole materiali*, costituite da *neurocaratteri materiali*, conformemente alle regole di buona formazione di una data

grammatica assai semplice¹.

2.2. I singoli neurocaratteri materiali (detti allo *stato disperso*) e le neuroparole materiali vengono elaborate dal modulo: si formano in tal modo nuove neuroparole materiali, l'insieme delle quali viene detto *stato* del modulo, ad un *tempo dato*. Uno dei possibili stati è detto *stato iniziale*.

2.3. Il modulo può anche separare i neurocaratteri delle neuroparole materiali, riportandoli allo stato disperso (cfr. 2.2).

2.4. L'elaborazione delle neuroparole del modulo ed i suoi cambiamenti di stato dipendono dagli inputs (*stimoli*), rappresentati da copie di neuroparole materiali (*neuroparole binarie*)², in corrispondenza biunivoca con esse³.

2.5. Le neuroparole materiali, costruite dal modulo, vengono cancellate dal modulo e le loro copie binarie, neuroparole binarie, vengono trasmesse in output (*risposte*). Le neuroparole materiali che si formano in un modulo, come conseguenza della circolazione di una neuroparola binaria, non

¹ Nel modulo risiedono *caratteri materiali*, copie materiali dei caratteri di un *alfabeto finito* $c_0, c_1, \dots, c_{h-1}$, detto *alfabeto materiale*, comprendente un simbolo privilegiato denotato con «•», in generale coincidente con c_0 . Una neuroparola materiale è un allineamento ordinato dei precedenti neurocaratteri. In particolare, si chiama *liscia* una neuroparola non contenente occorrenze del carattere «•» e si usano le lettere latine maiuscole nel senso di variabili, indicanti neuroparole materiali non ridotte a singoli neurocaratteri. Inoltre, con evidente significato dei simboli, si dice che neuroparole del tipo $\bullet A, B\bullet, \bullet C\bullet$ sono, rispettivamente, *chiusa a sinistra*, *chiusa a destra* o, semplicemente, *chiusa*. Analogamente si può parlare di neuroparole *aperte* nello stesso senso. Le neuroparole lisce, con cui terminano le neuroparole aperte a destra, prendono il nome di *suffissi*; le neuroparole, con cui iniziano le neuroparole aperte a sinistra, sono dette *prefissi*. Per esempio, nelle neuroparole materiali $\bullet A_1 \bullet A_2 \bullet \dots \bullet A_r \bullet B, \bullet C \bullet D_1 \bullet \dots \bullet D_s \bullet E, F \bullet G_1 \bullet \dots \bullet G_t, B, E$ sono suffissi e C, F prefissi. Si dice, inoltre, che una neuroparola materiale è *feconda*, se è composta da neuroparole materiali lisce tutte chiuse, tranne eventualmente l'ultima, che può essere aperta a destra. Per esempio le neuroparole $\bullet A_1 \bullet A_2 \bullet \dots \bullet A_r \bullet$ e $\bullet A_1 \bullet A_2 \bullet \dots \bullet A_r \bullet B$, con $A_1, A_2, \dots, A_r, B$ tutte lisce, sono entrambe feconde. Si conviene, infine, che l'insieme delle neuroparole materiali comprenda una neuroparola materiale *muta*. La costruzione delle neuroparole avviene, con evidente significato dei termini, a secondo che le parole stesse siano o no aperte, aperte a destra, aperte a sinistra.

² Per la costruzione delle neuroparole binarie vale, ovviamente, la stessa grammatica utilizzata per la costruzione delle neuroparole materiali (cfr. nota 1).

³ L'applicazione iniettiva γ , che consente di stabilire tale corrispondenza, viene detta *codice binario*.

coincidono in generale con quelle contenute nel suo stato iniziale e vengono perciò chiamate *neofornate*.

2.6. Il *comportamento* della neuromacchina è regolato da un sistema formato da *quattro assiomi*⁴, che assegnano le modalità di cambiamento di stato dei moduli e le conseguenti risposte.

In particolare, gli elementi introdotti sopra hanno, nella descrizione ipotetica della *corteccia cerebrale*, il seguente significato.

2.7. I moduli (cfr. 2.1) rappresentano le *colonne* della corteccia cerebrale.

2.8. I neurocaratteri materiali (cfr. 2.1) rappresentano l'*RNA solubile*, presente in ogni neurone e quindi in ogni colonna.

2.9. Le neuroparole materiali (cfr. 2.1) rappresentano lo schema di un tratto completo di RNA capace di *codificare una catena polipeptidica*.

⁴ Si riportano gli assiomi di funzionamento di una neuromacchina, così come enunciati da Melzi in [16]. In essi con γ^{-1} si intende l'applicazione inversa del codice binario (cfr. nota 3).

PRIMO ASSIOMA. Ogni modulo $\mathcal{H}_j$ componente una neuromacchina $\mathcal{H} = \mathcal{H}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n, \dots$) contiene inizialmente un insieme α_j , funzione di j , di neuroparole materiali allo stato latente, e ricostruisce tutte e sole queste neuroparole durante ogni intervallo temporale δ_i di indice i pari quando esse sono state cancellate nell'intervallo precedente δ_{i-1} .

SECONDO ASSIOMA. Le neuroparole binarie circolano in $\mathcal{H}_j$ solo negli intervalli temporali δ_i di indice i dispari. Se in un intervallo temporale δ_i di indice dispari circola in $\mathcal{H}_j$ una neuroparola binaria $\gamma^{-1}(XY)$, corrispondente di una neuroparola materiale XY , e in $\mathcal{H}_j$ risiedono una neuroparola materiale del tipo $\bullet A \bullet X$ e una neuroparola materiale del tipo $Y \bullet B$ (X e Y lisce e aperte, A aperta, B aperta a sinistra, lisce o no, eventualmente vuote), allora entro l'intervallo temporale δ_i le neuroparole materiali $\bullet A \bullet X$ e $Y \bullet B$ vengono cancellate da $\mathcal{H}_j$, e in questo modulo vengono a risiedere le neuroparole materiali $\bullet A \bullet$ e $\bullet B$.

TERZO ASSIOMA. Se in un intervallo temporale δ_i di indice i dispari nel modulo $\mathcal{H}_j$ si forma una neuroparola materiale chiusa del tipo $\bullet A_1 \bullet A_2 \bullet \dots \bullet A_r \bullet$, con $A_1, A_2, \dots, A_r$ lisce, allora tale neuroparola viene cancellata nel corso dell'intervallo pari successivo δ_{i+1} e nell'intervallo dispari δ_{i+2} in $\mathcal{H}_j$ circolano le copie binarie delle neuroparole A_h ($h = 1, 2, \dots, r$).

QUARTO ASSIOMA. Se in un intervallo temporale δ_i di indice dispari in un modulo $\mathcal{H}_j$ circola la copia binaria $\gamma^{-1}(A_h)$ di una componente liscia di una neuroparola materiale neofornata in $\mathcal{H}_j$, la neuroparola binaria $\gamma^{-1}(A_h)$ circola, nello stesso intervallo di tempo, in tutti i moduli di $\mathcal{H}$.

2.10. Lo stato (cfr. 2.2), ad un tempo dato, di ogni modulo rappresenta il patrimonio di RNA *messaggero* di cui dispongono i neuroni.

2.11. Lo stato iniziale (cfr. 2.2) di un modulo rappresenta lo *stato di attenzione*.

2.12. Le neuroparole binarie rappresentano (cfr. 2.4) uno schema della *trasmissione sinaptica*.

3. In MERCANTI-PIAZZESE [30] si dimostra che, per ogni assegnata *macchina di Turing*, esiste almeno una neuromacchina ad essa equivalente. La dimostrazione richiede alcune precisazioni sul concetto di *equivalenza* tra una neuromacchina ed un automa generico. La dimostrazione consiste nella costruzione diretta e finitistica di una opportuna neuromacchina, da dimostrare equivalente ad una macchina di Turing comunque assegnata. La neuromacchina richiesta è assegnata mediante il suo stato iniziale (cfr. 2.2), costituito da opportune neuroparole materiali (cfr. 2.1) legate, attraverso certi *legami funzionali*, alle variabili che individuano la macchina di Turing, e cioè al *nastro* ed alla *testina*, ed alle funzioni di *start* e di *output dell'elaborazione*.

In MERCANTI [24] si dimostra che il passaggio, dalla nozione di macchina di Turing a quella di *macchina di Turing universale*, è del tutto spontaneo in termini di teoria delle neuromacchine, nel senso che è molto facile calcolare una neuromacchina che, sotto impulsi appropriati, si attegga a neuromacchina equivalente a qualsiasi macchina di Turing, potendo assumere stati iniziali (cfr. 2.2.) corrispondenti ad ogni assegnata macchina di Turing.

4. Il problema di progettare una neuromacchina possedente un assegnato comportamento conduce all'idea di *S-sistema* (MERCANTI-PIAZZESE, [31]), insieme finito o infinito di unità elaboratrici di informazione intercomunicanti, che si scambiano *informazione codificata* secondo una stessa *grammatica* su di uno stesso *alfabeto*. In taluni casi l'informazione scambiata è significativamente esprimibile in linguaggi comunque assegnati, compreso quello comune. Se la grammatica che regola l'informazione scambiata fra le unità di un S-sistema, soddisfa certe semplici restrizioni di carattere *finitistico*, per esempio se la grammatica è la stessa usata per la costruzione delle neuroparole materiali di 2.1, si dimostra che una neuromacchina è equivalente a un S-sistema e, viceversa, si dimostra che un S-sistema, con opportune restrizioni, è equivalente ad una neuromacchina. La dimostrazione consiste nell'indicare i criteri di costruzione effettiva dei moduli (cfr. 2.1) di una neuromacchina, equivalente ad un S-sistema assegnato.

Nel lavoro di MERCANTI [25] si forniscono alcune precisazioni sul fatto che un S-sistema possa essere concepito come la *forma canonica*, rispetto al gruppo E delle neuromacchine E-equivalenti, nel senso prima indicato, di un processore di informazione, e quindi la *forma canonica di una neuromacchina*.

5. Il problema di costruire neuromacchine di dato comportamento (cfr. § 4), conduce spontaneamente al problema della loro *simulazione* mediante il computer. Per fare ciò sono necessarie alcune precisazioni, nel caso di neuromacchine nelle quali risiedano molte copie di molte neuroparole (*folle di neuroparole*). In tal senso in CAROTTI [5], [4], il comportamento (cfr. 2.6) di una neuromacchina è descritto con un insieme di *processi stocastici poissoniani*. Si addivene così al concetto di grande neuromacchina (*continua*), come estensione del concetto di neuromacchina (*digitale*) di Melzi.

In tal modo in CAROTTI-MERCANTI [6] si descrivono alcuni risultati di carattere esclusivamente *sperimentale*, ottenuti con il computer, relativi al funzionamento stocastico di grandi neuromacchine. In virtù degli assiomi che descrivono tale funzionamento (cfr. 2.6), si può infatti prevedere intuitivamente l'esistenza di *processi stabili* e di *processi instabili*, come quelli nei quali, rispettivamente, il numero delle neuroparole circolanti nell'unità di tempo *tenda a zero* oppure *tenda all'infinito*, al divergere del tempo. Gli esperimenti descritti in [6] provano che il carattere di stabilità, o di instabilità, di un processo di una neuromacchina dipende solo dallo stato iniziale (cfr. 2.2) e non dagli stimoli introdotti nella neuromacchina (cfr. 2.4), purché questi occupino un intervallo finito di tempo. I risultati ottenuti sperimentalmente costituiscono la *simulazione di fenomeni nervosi* (per esempio, le folle di neuroparole potrebbero essere un *modello delle folle di proteine sintetizzate* in conseguenza alla *percezione* di una sensazione anche complessa), anche se conviene sottolineare che i processi, studiati sperimentalmente sul computer, danno una simulazione dei processi che avvengono in una neuromacchina e che questa è, soltanto, a sua volta, una simulazione del sistema nervoso o di una sua parte. In tal senso, quanto detto, ha valore solamente come *simulazione del secondo ordine* del sistema nervoso reale.

6. Altri contributi, nati collateralmente alla ricerca sulle neuromacchine, si trovano in RESCONI [38], dove si assegna, per un *sistema fisico* ad un numero finito qualunque di coordinate libere discretizzate, una *classe molto estesa di processi generativi*, per i quali l'annullamento asintotico dell'entropia è una conseguenza algebrica della loro definizione; in PERELLI CIPPO-VENINI [35], dove il meccanismo della *doppia verifica*

materiale, caratteristica delle teoria dei neuromodelli (MELZI [14]), viene ulteriormente snellito attraverso una neuromacchina *atta al calcolo enunciativo*; in ISONNI [8], dove si assegna fattualmente una neuromacchina, detta neuromacchina *sequenziale*, il comportamento della quale è un modello del *gruppo additivo* dell'insieme degli interi; e in PIAZZESE [36] dove per la prima volta viene, anche se ancora informalmente, proposta l'*applicazione della teoria dei sistemi* allo studio della teoria delle neuromacchine.

7. In MERCANTI [26], MELZI-MERCANTI [20] vengono analizzati, risistemati e uniformati i risultati ottenuti, discutendo l'*adeguatezza* del sistema di assiomi (cfr. § 2) e di alcuni teoremi della teoria da essi derivata (cfr. §§ 3, 4, 5, 6).

In particolare si osserva quanto segue.

7.1. Accettare come *adeguati* gli assiomi di comportamento di una neuromacchina, significa essenzialmente concepire l'attività della corteccia cerebrale come l'*evoluzione* di un sistema biochimico.

7.2. Gli assiomi configurano un'ipotesi semplicissima sul significato di *patterns corticali*, ammettendo, in sostanza, che ogni pattern sia la *copia* di un *RNA messaggero* e che ogni *proteina* dia luogo ad un pattern.

7.3. Per contro la *schematizzazione* della corteccia, data dagli assiomi (cfr. da 2.7 a 2.12), la configura come un *sistema deterministico*, in contrasto con la comune opinione che il sistema nervoso possieda determinate proprietà di sistema *plastico*, *autoregolato* e addirittura *teleonomico*. Tuttavia l'assiomatica proposta può essere integrata con *assiomi probabilistici* (cfr. § 5), che sembrano adatti a simulare le più elementari almeno di queste proprietà.

Anche nel caso che il sistema di assiomi del § 2 non risultasse adeguato, i risultati ottenuti potrebbero essere trasportati in un'altra assiomatica, ritenuta più adeguata, con le dovute modifiche. Ciò che conta è di poter disporre di una opportuna tecnica deduttiva. In tal senso sono da riguardarsi i primi risultati ottenuti ed illustrati nei precedenti §§ 2, 3, 4, 5, 6.

La discussione critica, sull'*adeguatezza* del metodo usato, e la esigenza di un linguaggio meno rudimentale e di un simbolismo meno complicato, conducono ad una *revisione* del metodo stesso, come meglio specificato in MELZI-MERCANTI [21].

LA TEORIA DEI SEMIAUTOMI

8. Il concetto di *semiautoma*, cui è dedicata questa sezione, generalizza la nozione di neuromacchina e unifica i modelli finora studiati. In particolare, la struttura algebrica (estensione dell'algebra di Boole) allo scopo introdotta, conduce dapprima al concetto di *automa digitale* (§ 9) e, successivamente, a quello di *semiautoma* (§ 10), consentendo di superare l'aspetto, esclusivamente *neurale*, dei procedimenti adottati in precedenza. In [21] viene descritta, dunque, una *trattazione algebrico-combinatoria dei processi di trasformazione* avvenenti in un insieme di parole materiali (cfr §2), impiegando i concetti ed i simboli della *teoria delle categorie*, nel senso di MAC LANE [12]. In tal modo sembra conveniente lo studio del sistema nervoso reale, inteso come *processore d'informazione*, piuttosto che come *apparato fisiologico*. In questa nuova sistemazione è possibile ottenere (§ 11) un significativo risultato nel campo della percezione (MERCANTI [27]).

8.1. Il linguaggio e la simbologia usati si trovano in [21]. Con opportune precisazioni, ivi si considera un *alfabeto* T costituito da un numero finito di caratteri. Le *parole* su T costituiscono una *grammatica* G , nel senso più volte precisato in precedenza⁵. Detto $P(G)$ l'insieme delle parti di G , gli elementi di $P(G)$ formano un'algebra di Boole $\mathcal{B}$. Introducendo alcune altre opportune *relazioni*, oltre a quelle sussistenti in $\mathcal{B}$, e similmente altre *operazioni*, dette *$\mathcal{A}$ -operazioni*, tra le parole di G , si ottiene una *struttura algebrica* $\mathcal{A}$, *estensione* di $\mathcal{B}$. Le *$\mathcal{A}$ -operazioni* (come suggerisce anche il loro nome: *selezione*, *selezione destra*, *selezione sinistra*, *taglio* e *concatenazione*) sono *verosimili modelli* delle operazioni di *sintesi polipeptidica* (cfr. 7.1, 7.2, 7.3)⁶.

8.2. Le *$\mathcal{A}$ -operazioni* di 8.1 valgono anche per *insiemi di parole*

$$X, Y, \dots \in P(G).$$

A $P(G)$ appartiene anche la parola *muta* $\emptyset$, intesa come priva di caratteri.

8.3. L'insieme dei *termini* dell'algebra $\mathcal{A}$, che prendono il nome di *$\mathcal{A}$ -espressioni*, viene definito *ricorsivamente* nei confronti delle operazioni di

⁵ Cfr. nota 1.

⁶ Le definizioni delle cinque operazioni tra le parole di G non sono qui riportate per brevità. Esse si trovano in [21], §2.

$\mathcal{A}$ (e di $\mathcal{B}$). Una $\mathcal{A}$ -espressione, contenente le *variabili*⁷

$$X_1, X_2, \dots, X_k. \quad (1)$$

è denotata con

$$E(X_1, X_2, \dots, X_k). \quad (2)$$

Per ogni valore assegnato alle variabili, cioè per ogni insieme

$$\emptyset, X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, \mathcal{G}.$$

una $\mathcal{A}$ -espressione denota un insieme

$$W \in P(\mathcal{G}),$$

detto *valore* dell'espressione.

8.4. Analogamente a quanto fatto per le $\mathcal{A}$ -operazioni (cfr. 8.1) e per le $\mathcal{A}$ -espressioni (cfr. 8.3), sarà possibile definire gli $\mathcal{A}$ -predicati di $\mathcal{A}$ in maniera *ricorsiva*, partendo dai *segni predicativi* delle algebre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (cfr. 8.1). Si parlerà, allora, di $\mathcal{A}$ -predicati contenenti certe *costanti* date $A, B, \dots$, oppure certe *variabili* date $X, Y, \dots$, di predicati *aperti* o *chiusi*, e così via. L'insieme (*numerabile*) di tutti gli $\mathcal{A}$ -predicati costituisce l'insieme delle *formule ben formate* di una *teoria formalizzata del primo ordine*, descrivente l'algebra $\mathcal{A}$ di 8.1 (MELZI [18], § 5).

8.5. Data una $\mathcal{A}$ -espressione (cfr. (2))

$$E(X_1, X_2, \dots, X_k).$$

è definita un'applicazione di $\mathcal{A}^k$ in $\mathcal{A}$, detta $\mathcal{A}$ -funzione, per la quale (cfr. (1))

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

sono le variabili *indipendenti* ed $E(X_1, X_2, \dots, X_k)$ è il valore (cfr. 8.3).

⁷ Il concetto di *variabile*, nel senso tradizionale del termine, viene qui usato, con ovvio significato, per le parole di $P(\mathcal{G})$ (cfr. anche nota 1).

8.6. Particolare rilevanza assume, nel seguito, il concetto di funzione *omogenea* (si userà da ora la dizione di funzione, invece di quella di $\mathcal{A}$ -funzione). Una funzione di *due variabili*

$$F(X, Y), \quad (3)$$

con $X, Y \in P(\mathcal{G})$ (cfr. 8.2), si dice *omogenea* se per ogni $X \in P(\mathcal{G})$ risulta

$$F(X, \emptyset) = X,$$

con $\emptyset$ parola muta (cfr. 8.2). Per esempio la funzione $X \cup Y$ è omogenea, mentre la $X \cap Y$ non lo è.

8.7. Sia $F(X, Y)$ una funzione omogenea (3) e siano $X_F, Y_F \subseteq P(\mathcal{G})$ due classi di insiemi di parole, per le quali valgano opportune condizioni, dette condizioni di *stabilità* ([21], § 4). Si dimostra che sotto tali ipotesi è definita una categoria C_F ⁸, nel senso già ricordato di MAC LANE [12], per la quale risulta⁹

$$\text{Ob } C_F = X_F$$

e

$$\text{Mor } C_F = Y_F.$$

Questa categoria dipende ovviamente da F, X_F e Y_F , ma, per gli scopi che seguiranno, Y_F sarà *indipendente* sia da F sia da X_F . Perciò tale categoria sarà più spesso denotata con

$$C(F, X_0), \quad (4)$$

con X_0 insieme di parole che individuano X_F .

9. Ad ogni categoria $C(F, X_0)$, come quella descritta nella (4) di 8.7, si può associare un *automa digitale*

$$H(F, X_0),$$

per il quale accada quanto segue ([21], § 7).

⁸ L'idea di categoria va intesa, in questo contesto, nel senso di universo di *oggetti* legati da *relazioni* tra loro moltiplicabili.

⁹ La categoria C_F è quella per la quale gli *oggetti* (Ob) sono gli *elementi* (insiemi di parole) $X \in X_F$ e i *morfismi* (Mor) sono particolari applicazioni di X_F in X_F composte, in modo opportuno.

9.1. Ogni *insieme di parole* $X \in \text{Ob } C(F, X_0)$ (cfr. 8.7) è uno *stato* di $H(F, X_0)$, e in particolare X_0 è lo *stato iniziale*.

9.2. Ogni *insieme* $Y \in \text{Mor } C(F, X_0)$ (cfr. 8.7) è un *input* per $H(F, X_0)$.

9.3. Il tempo è *discreto*; se al tempo i lo stato di $H(F, X_0)$ è X e l'input Y , lo stato al tempo $i+1$ diventa $F(X, Y)$.

9.4. Ogni *successione di insiemi*

$$X_j \ (j = 1, 2, \dots, k). \quad (5)$$

tale che

$$X_{j+1} = F(X_j, Y). \quad (6)$$

per qualche $Y \in Y_F$ (cfr. 8.7), prende il nome di *processo* P nell'automa digitale $H(F, X_0)$. In modo analogo si può definire, sotto opportune condizioni, anche l'insieme

$$\dot{X} = X \cap G, \quad (7)$$

output di $H(F, X_0)$.

La categoria $C(F, X_0)$ degli stati dell'automa digitale $H(F, X_0)$, come sopra definita, può essere interpretata come il *modello matematico degli stati di un sistema biologico digitale*, ossia di un sistema biologico che evolve nel tempo, per effetto di forze interne e stimoli esterni (cfr. 8.1 e 7.1, 7.2, 7.3). Le parole sull'alfabeto T (cfr. 8.1) sono lo schema matematico delle catene polipeptidiche e degli RNA messaggeri. La funzione $F(X, Y)$ (cfr. (3), § 8) è lo schema matematico delle reazioni chimiche di adattamento degli stimoli. La categoria $C(F, X_0)$ (cfr. (4), § 8) è lo schema della totalità degli stati chimici, raggiungibili da parte di un sistema nervoso, che possieda un dato patrimonio comportamentale, il cui schema è l'insieme iniziale X_0 (cfr. 8.7). Ogni processo $X_1, X_2, \dots, X_k$ in $H(F, X_0)$ (cfr. (5)) è uno schema matematico di un processo di *adattamento* del sistema nervoso agli stimoli esterni. L'insieme $\dot{X}$ (cfr. (7)) è uno schema matematico della risposta, che il sistema nervoso, nello stato X , dà ad uno stimolo Y .

10. Sempre in [21], § 9, l'oggetto

$$\Sigma = \langle H(F, X_0), \Omega \rangle, \quad (8)$$

costituito da un automa digitale H (cfr. § 9) ed un *osservatore* Ω , prende il nome di *semiautoma*, espansione del concetto di neuromacchina. L'osservatore Ω , detto in MELZI [18] *osservatore interno*, è in grado di interagire con H . Se ad un dato tempo discreto (cfr. 9.3), l'automa digitale H è nello stato X (cfr. 9.1) e riceve lo stimolo Y (cfr. 9.2) dall'osservatore interno Ω , allora lo stato che H assume, nel tempo successivo, in virtù dello stimolo Y , è $F(X, Y)$ (cfr. (3), § 8). L'introduzione della nozione di osservatore consente di ampliare le applicazioni degli schemi finora studiati. E' in tal senso, quindi, che in [18] si considerano un semiautoma (8) $\Sigma = \langle H(F, X_0), \Omega \rangle$ e un altro osservatore ω , detto *osservatore esterno*, ed all'oggetto

$$\Sigma = (H, \Omega, \omega), \quad (9)$$

formato dall'automa H e dai due osservatori Ω, ω , si dà nuovamente il nome di *semiautoma*. Ciò consente anche alcune *semplificazioni* di *formalismi* e di *linguaggio*, illustrati in [18]. In ogni caso, il processo P (cfr. 9.4) in un semiautoma Σ (con opportune precisazioni, a secondo che esso sia dato nella forma (8), piuttosto che nella forma (9) cui ci si riferisce nel seguito) può essere illustrato, come indicato anche in MERCANTI [27], oltre che in [21] ed in [18], nel seguente modo.

10.1. Quando l'automa $H(F, X_0)$ assume lo stato X , l'osservatore esterno ω propone all'osservatore interno Ω di raggiungere un altro stato a partire da X , e così via.

10.2. Quando ω propone lo stato X a Ω , si dice che H è *non-equilibrato*.

10.3. Quando lo stato X è assunto dopo la scelta operata da Ω , si dice che H è *riequilibrato*.

10.4. Al processo P , nel quale H assume gli stati X_i (cfr. 9.1), sotto l'azione degli stimoli Y_i ($i = 1, 2, \dots, k$) (cfr. 9.2), si associa il numero

$$\sum_i F(x_i, y_i), \quad (10)$$

con $x_i = |X_i|$ e $y_i = |Y_i|$, detto *traccia* di P , dove il segno di sommatoria Σ si riferisce alla ordinaria *somma di anello booleano*.

In sintesi il funzionamento del semiautoma Σ è dunque il seguente: l'osservatore esterno ω *squilibra* casualmente, in ogni tempo, l'automa H e l'osservatore interno Ω *riequilibra* H , in ogni tempo, in modo che, con l'investimento energetico (10) il processo P sia mantenuto nel complesso *equilibrato*, anche se la strategia di riequilibrio, a disposizione di Ω ad ogni tempo, non è univocamente determinata, potendosi prevedere *ipotesi* di comportamento tra loro *alternative*.

La riequilibrioazione di uno stato $\bar{X}$, da parte dell'osservatore interno Ω , è uno schema matematico della strategia chimica, che l'apparato nervoso segue, per rispondere ad uno stimolo di origine esterna o interna all'apparato stesso.

Si osservi ancora che l'automa $H(F, X_0)$ è *deterministico*, nel senso che la funzione (3) del § 8 $F(X, Y)$, che fa passare da uno stato X_j allo stato successivo X_{j+1} (cfr. (5), (6), § 9) in un processo P , nonché l'insieme di tutte le strategie di riequilibrioazione di ogni stato $\bar{X}$ sono *noti e prefissati*. Ma la scelta, all'interno del suddetto insieme, di una strategia di riequilibrioazione del dato stato $\bar{X}$, è affidata all'osservatore interno Ω ed è pertanto *indeterminata*. In tal senso è stato scelto il nome di semiautoma.

Attraverso il concetto di semiautoma, si ritrovano rapidamente i risultati già esposti nei §§ 5, 6, 7, 8, 9, come casi particolari di opportuni semiautomi.

11. In MERCANTI [27], il processo P tra ω ed Ω , descritto nel § 10, viene interpretato come uno *schema matematico dell'equilibrio fra gli stimoli esterni e la risposta proteica in un'area percettiva del sistema nervoso centrale*. In particolare la traccia (10) di 10.4.

$$\sum_i F(x_i, y_i),$$

può essere interpretata come energia dispersa nel processo P . Il meccanismo di nonequilibrio-riequilibrio, descritto nel § 10, può allora essere visto come un *modello concettuale della percezione sensoriale*. In particolare in [27] si tratta della percezione visiva. Ivi si considerano l'osservatore esterno ω come un modello della indeterminatezza degli stimoli, provenienti dalla realtà fisica, e l'osservatore interno Ω come un modello della corteccia visiva, che controlla l'ingresso percettivo. I meccanismi di equilibrio fra ω e Ω possono essere descritti con l'algebra $\mathcal{A}$ di [21] (cfr. 8.1), come è sommariamente detto anche in MELZI [17], dove si descrive una particolare illusione ottica, della quale, nel citato [27], si dà una interpretazione ed una giustificazione, come detto nel seguito, dei risultati che si ottengono sperimentalmente.

11.1. L'illusione ottica studiata in [27] è la seguente. Due sorgenti luminose, di uguali caratteristiche ottiche, emettono luce, alternativamente, per opportuni periodi di tempo, dell'ordine del secondo. La percezione che se ne ha, ad opportuna distanza dalle sorgenti, è quella di un'unica immagine, che oscilla con continuità dalla posizione di una sorgente alla posizione dell'altra, passando attraverso le posizioni

$$P_1, P_2, \dots, P_n.$$

dalle quali sembra provenire. Avvicinandosi alle due sorgenti, l'impressione di continuità aumenta, ma scompare quasi di colpo, quando la posizione dell'osservatore raggiunge un punto critico. Vi è, dunque, una sorta di *soglia*, che varia, di poco, da individuo ad individuo, o in particolari condizioni di osservazione.

11.2. L'interpretazione del fenomeno, in termini combinatori degli stati dell'area visiva della corteccia come un semiautoma, è la seguente. Siano

$$S_1, S_2, \dots, S_n$$

gli stati del semiautoma Σ (cfr. § 10), corrispondenti alla saturazione degli stimoli

$$S'_1, S'_2, \dots, S'_n.$$

che al semiautoma Σ verrebbero forniti dalle immagini provenienti dai punti (cfr. 11.1)

$$P_1, P_2, \dots, P_n.$$

In base a quanto detto nei precedenti paragrafi, ogni stato S_i ($i=1,2,\dots,n$) di Σ è un sottoinsieme dell'insieme G di tutte le parole sull'alfabeto T (cfr. § 8). Si può attribuire, a ciascun insieme S_i ($i=1,2,\dots,n$), un *peso* p , ossia si può definire una applicazione

$$\pi : P(G) \rightarrow \mathcal{N}, \quad (11)$$

dell'insieme $P(G)$ delle parti dell'insieme G di tutte le parole sull'alfabeto T , definendo $\pi(p)$ come la cardinalità dell'insieme (discreto) $p \in P(G)$.

Nell'insieme $P(G)$ delle parti di G , è inoltre facile definire una *distanza* $d(p,q)$ tra due parti p,q , dotata delle usuali proprietà

$$d(p,q) > 0, \text{ se } p \neq q, \quad d(p,p) = 0, \quad d(p,q) = d(q,p)$$

e della proprietà triangolare. Si dimostra facilmente che una tale funzione può essere il peso della somma $p \oplus q$ di anello booleano di p e q , ossia che (cfr. (11))

$$d(p,q) = \pi((p \oplus q)).$$

Allora, per la proprietà triangolare, detto S_0 lo stato iniziale (cfr. 9.1) del

semiautoma Σ , per ogni $i=1,2,\dots,n-1$, si ha

$$d(P_i, P_{i+1}) < d(P_i, S_0) + d(S_0, P_{i+1}).$$

Invece l'essere

$$\sum_{i=1}^n d(P_i, P_{i+1}) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} d(P_1, S_0) + d(S_0, P_n), \quad (12)$$

dipende ovviamente dal numero dei lati della poligonale (astratta)

$$P_1, P_2, \dots, P_n.$$

valendo certamente nella (12) il segno inferiore per $n=2$.

11.3. Nella (12) si scorge una suggestiva interpretazione dell'illusione ottica, dalla quale si è partiti (cfr. 11.1). Assimilando il peso di un insieme P_i ($i=1,2,\dots,n$) di parole (cfr. 11.2), ossia la cardinalità di tale insieme, all'energia occorrente per sintetizzare tali parole, diventa evidente che la lunghezza di ogni singolo lato della poligonale $P_1, P_2, \dots, P_n$ (cfr. 11.2) è tanto più piccola, tanto più due insiemi consecutivi hanno numerose parole in comune, a causa della ben nota definizione di somma di anello booleano. Quanto più piccolo è n (nella (12)), ossia quanto minore è la distanza angolare delle due sorgenti luminose, tanto più sarà soddisfatta la (12), con il segno inferiore. Più precisamente, esiste un intero n_0 , da dirsi *soglia* per la (12), tale che per $n < n_0$ valga la (12), con il segno inferiore e, per $n \geq n_0$, valga la (12), con il segno superiore.

11.4. In termini di percezione visiva si può dire che, quanto più sono vicine le sorgenti luminose alternative, tanto più piccolo è il dispendio energetico della percezione a stadi intermedi. Il semiautoma Σ risparmia energia di saturazione, investendo piccoli incrementi di energia. *per percepire le sorgenti luminose inesistenti*

$$P'_2, P'_3, \dots, P'_{n-1}.$$

piuttosto che *per cancellare* le parole corrispondenti alla percezione di P'_n , e inversamente. La soglia n_0 corrisponde, da questo punto di vista, alla *soglia di convenienza energetica nel processo di saturazione percettiva degli stimoli*.

Ciò spiega, in maniera assai suggestiva, la scomparsa improvvisa dell'illusione ottica, al crescere dell'angolo apparente α fra le due sorgenti

alternative (cfr. 11.1): la scomparsa avviene in corrispondenza al superamento della soglia n_0 , ossia dell'angolo α corrispondente.

Invece la casuale scomparsa del fenomeno per qualche breve intervallo di tempo, ad angolo α costante, si spiega assai bene con l'esistenza di soglie energetiche, nel rifornimento energetico continuo di risorse metaboliche all'apparato visivo.

LA TEORIA DEI SISTEMI DIGITALI MULTICANALE

12. Il filo logico, che ha condotto successivamente alle varie generalizzazioni finora esaminate, trova il suo punto attuale di arrivo nel concetto di *Sistema Digitale Multicanale* (SDM). Risulta assai comodo scrivere un semiautoma Σ come SDM, sua naturale generalizzazione. Un *Sistema Digitale Multicanale* (SDM) è un sistema dinamico (cfr. § 0) per il quale lo stato iniziale, l'imput-output e lo stato istantaneo sono costituiti da informazione codificata, secondo le regole dell'algebra $\mathcal{A}$, sulle quali si basa il meccanismo algebrico-combinatorio illustrato nei §§ 8.9.10. Attraverso il linguaggio e la simbologia ivi studiata, un SDM può essere definito come un *vettore*

$$S = [C_0, C_1, \dots, C_n]. \quad (13)$$

ad elementi in $P(\mathcal{G})$ (cfr. 8.1), e funzione di un tempo discreto t_i , con le seguenti clausole.

12.1. L'insieme

$$\{C_0, C_1, \dots, C_n\}$$

delle componenti del vettore S è ripartito nell'elemento

$$C_0 \text{ (stato del sistema al tempo } t_i).$$

negli elementi

$$C_1, C_2, \dots, C_r \text{ (canali di entrata al tempo } t_i)$$

e negli elementi

$$C_{r+1}, \dots, C_n \text{ (canali di uscita al tempo } t_i).$$

valendo l'ovvia relazione $s+r=n$, con r numero dei canali di entrata ed s numero dei canali di uscita.

12.2. Tra lo stato

$$C_0(t_i),$$

i canali di entrata

$$C_1(t_i), \dots, C_r(t_i)$$

ed i canali di uscita

$$C_{r+1}(t_i), \dots, C_n(t_i).$$

sussistono le *relazioni funzionali*

$$C_0(t_{i+1}) = F(C_0(t_i), C_1(t_i), \dots, C_r(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

e

$$C_j(t_{i+1}) = F_j(C_0(t_i)), \quad j = r+1, r+2, \dots, n. \quad (15)$$

Le relazioni funzionali (14), (15) esprimono, rispettivamente, come è d'uso nella teoria dei sistemi dinamici, che lo stato C_0 al tempo t_{i+1} è funzione dello stato C_0 e delle entrate $C_1, C_2, \dots, C_r$ al tempo precedente, e che le uscite $C_{r+1}, \dots, C_n$, al tempo t_{i+1} , sono funzioni dello stato C_0 al tempo precedente.

Le funzioni F e F_j sono funzioni da $P(G)$ a $P(G)$, indipendenti dal tempo (cfr. 8.5). La (14) e la (15) definiscono, evidentemente, una applicazione σ dell'insieme S dei vettori (13) in sé. Questa applicazione viene detta *funzione caratteristica*

$$F_{SDM} \quad (16)$$

dell'SDM. E' da notare, ovviamente, che parlando di funzioni si intende sempre riferirsi al concetto di $\mathcal{A}$ -funzione (cfr. 8.5), nel senso che, tutti i legami fra insiemi di parole devono concepirsi come espressi mediante i predicati (cfr. 8.4) e le operazioni (cfr. 8.1) dell'algebra $\mathcal{A}$, definita in 8.1 e successivi.

Si consideri un vettore $S(t_i)$ funzione del tempo t_i (cfr. (13)). Se le componenti di $S(t_i)$ soddisfano un predicato, composto con uno o più predicati dell'algebra $\mathcal{A}$ (cfr. 8.1), si può dire che $S(t_i)$ *soddisfa* un $\mathcal{A}$ -predicato P . In tal caso, se $C_j(t_i)$, con $j = 1, 2, \dots, n$ (cfr. (13)), è il j -esimo canale di un SDM, si dirà che quel canale *gode del predicato*, ovvero *gode*

della proprietà $\mathcal{P}$, al tempo t_i . Analogamente, è chiaro che cosa si debba intendere, dicendo che lo stato di un SDM gode di una data $\mathcal{A}$ -proprietà al tempo t_i .

13. Caso particolare rilevante di SDM è quello di un SDM dotato di una sola entrata e di una sola uscita (MERCANTI [28]), per il quale prende senso la affermazione «se l'entrata di un SDM gode di una proprietà $\mathcal{P}$ al tempo t_i , allora l'uscita gode di una proprietà $\mathcal{Q}$ al tempo t_{i+1} ». Detto Δ un SDM dotato di una sola entrata e di una sola uscita, sia P_i una proprietà, posseduta dall'entrata al tempo t_i e Q_j una proprietà, posseduta dall'uscita al tempo t_j . Se $t_j = t_{i+1}$, si può dire che Q_j è una Δ -conseguenza di P_i , e si scrive

$$P_i \xrightarrow{\Delta} Q_{i+1}. \quad (17)$$

Si noti che, il fatto che valga la (17) dipende, in generale, dallo stato $C_0(t_i)$ di Δ (cfr. (15), § 12), per modo che la (17) può essere precisata con la

$$P_i \xrightarrow{\Delta, C_0(t_i)} Q_{i+1}. \quad (18)$$

Per un SDM Δ , per il quale valgano le (17) e (18), si possono formulare, in generale, un *problema diretto* ed un *problema inverso*, nei seguenti termini.

13.1. *Problema diretto*. Per un determinato SDM Δ costruire la categoria degli stati, concependo gli stati come oggetti ed i predicati di canale come morfismi (cfr. 8.7).

13.2. *Problema inverso*. Costruire un SDM Δ tale che valga la (17) per ogni tempo t_i . Ciò significa caratterizzare lo stato $C_0(t_0)$ al tempo t_0 e la funzione caratteristica F_Δ di Δ (cfr. (16), § 12), in modo tale che valga la (14) del § 12, per ogni tempo t_i .

In generale, il problema diretto 13.1 ed il problema inverso 13.2 ammettono alcune suggestive interpretazioni. Lo stato $C_0(t_i)$, al tempo t_i , di un SDM, può essere pensato come un modello matematico dello stato di un micro o di un macrosistema economico. In tal caso, la scelta di una funzione caratteristica F_{SDM} (cfr. (16), § 12 e 13.2) equivale ad un'importante presa di posizione, sulla "bontà" di una data modellazione matematica di un sistema economico, mediante un SDM. I predicati di canale possono essere assunti come modelli matematici, delle più svariate proprietà economiche di un dato sistema economico. Si può pensare, ad esempio, al *comportamento degli operatori*, ai *vincoli di movimento del sistema*, alla *razionalità od alla*

irrazionalità del comportamento degli operatori, ai più svariati *fenomeni a soglia*, dei quali si è già parlato al § 11 e si parlerà ancora al § 15.

Nel caso particolare di un SDM Δ , dotato di una sola entrata e di una sola uscita, la (17) è la funzione caratteristica (16). Essa corrisponde alla modellazione matematica di un *sistema finanziario particolarmente semplice*: quello nel quale due soli operatori intrattengono rapporti di compravendita di titoli, contro liquidità monetaria, con regimi di scadenze e di interessi contrattati.

14. Un'interpretazione delle proprietà degli SDM, come modelli matematici delle proprietà di un sistema economico, si trova in ALLEVI [2], dove si illustra l'esistenza di SDM (ivi chiamati Sistemi dinamici digitali) in grado di descrivere alcuni processi economici, opportunamente schematizzati. Per la costruzione di un tale SDM, è necessaria una generalizzazione della definizione di SDM, che consenta di recuperare alcune proprietà dei sistemi, intesi nella loro più generale accezione, più precisamente le proprietà legate al fatto che un sistema scambia, con l'ambiente esterno, quantità misurabili. Tale generalizzazione, per certi versi simile a quella operata da CAROTTI [5], [4], relativamente al passaggio da neuromacchina digitale a neuromacchina continua (cfr. § 5), è illustrata in ALLEVI [1] dove, in sintesi, al concetto di insieme di parole su un dato alfabeto (cfr. 8.1), si sostituisce il concetto di folla di parole, cioè di insiemi nei quali le parole risiedono in un certo numero arbitrario di copie di una stessa parola, ed all'algebra $\mathcal{A}$ del § 8, si sostituisce un'algebra, gli elementi della quale sono folle di parole. Il processo economico, preso in considerazione in [2], per la descrizione tramite SDM, è un caso particolare, opportunamente schematizzato e semplificato, del classico *modello* di SRAFFA [40] di produzione di *merci a mezzo di merci*, nel caso della *produzione per sussistenza*. In esso si ipotizza un mercato nel quale operino tre soli produttori, rispettivamente, di grano, ferro e porci (in [2], *tacchini*), ognuno dei quali, al termine del ciclo annuale di produzione, scambia con gli altri due una parte del proprio prodotto, in modo da poter ricostituire le scorte necessarie a ripetere il ciclo annuale. Vengono assegnati, il vettore $[S, E, U]$, nel quale S, E ed U indicano, rispettivamente, lo stato, i canali di entrata ed i canali di uscita ad un dato tempo (cfr. 12.1) e la funzione caratteristica F_{SDM} (cfr. (16), § 12), dell'SDM *isomorfo* (in un senso precisato) al modello di Sraffa preso in considerazione.

PROBLEMI APERTI

15. Dopo aver presentato l'iter che ha condotto, attraverso varie generalizzazioni, dal concetto di *neuromacchina* a quello di *Sistema Digitale Multicanale*, si vuole concludere questo lavoro con una breve panoramica delle prospettive più interessanti, apertesi attraverso gli schemi studiati. Ci si riferisce soprattutto alle *applicazioni* ed alle *interpretazioni* relative ai sistemi biologici ed economici, con particolare attenzione ai già citati fenomeni a soglia.

15.1. Oltre che dal punto di vista algebrico-combinatorio, un SDM può essere interpretato anche *analiticamente e topologicamente* (MELZI [19]).

15.1.1. Un insieme finito o infinito di parole su un alfabeto (cfr. 8.1) può essere rappresentato con *coordinate reali*, apparendo, di conseguenza, come un *punto* in uno *spazio* dotato in generale di un numero *finito*, o *infinito misurabile*, di coordinate. Il movimento di un SDM (variazione dei suoi stati, cfr. § 12) è una *traiettoria* in uno *spazio*, in generale *pre-hilbertiano*. In questa interpretazione geometrica, le proprietà di continuità o di discontinuità (e, quindi, il concetto di soglia) assumono un particolare senso intuitivo.

15.1.2. La transizione, da uno stato all'altro, di un SDM è descrivibile in termini algebrico-combinatori (cfr. § 12) e, quindi, le proprietà delle folle di parole ([1]) in gioco possono essere descritte e misurate, in termini *topologici e matriciali*, in *spazi funzionali* opportuni.

15.2. Una significativa applicazione di tipo naturalistico è stata segnalata nel § 11. Altre applicazioni di tipo economico sono suggerite nel § 13. Per quanto detto a proposito dei fenomeni a soglia, gli SDM sembrano particolarmente adatti allo studio di sistemi biologici e di sistemi economici, tra i quali sembrano sussistere precise analogie. Per esempio, nel caso del fenomeno biologico della percezione (cfr. § 11), si ammetta che il fenomeno stesso consista nella *saturazione di un segnale*, per mezzo di *risorse energetiche* limitate. Se si osserva che ogni processo economico si lascia descrivere, a prescindere da tutti i possibili ed inevitabili disturbi osservazionali, per mezzo di *strategie ottimali di investimento* di risorse limitate, l'analogia enunciata diventa ovvia.

15.3. Le *interpretazioni economiche* di un SDM riguardano il fatto che gli stati dei suoi vari canali, e lo stato istantaneo dell' SDM (cfr. 12.1), possano essere visti come un modello matematico dei vettori di grandezza, fluenti in un sistema economico. Allora i fenomeni a soglia, che nei sistemi biologici sono considerati come soglie *percettive*, possono essere riguardati come i

ben noti fenomeni di *isteresi economica* e possono essere interpretati in termini algebrico-combinatorio.

15.4. Esempi delle proprietà degli SDM, applicati allo studio di sistemi economici, vengono forniti di seguito in 15.4.1, 15.4.2, 15.4.3, 15.4.4, 15.4.5 e 15.4.6.

15.4.1. SDM a due canali (cfr. § 13), simulanti una situazione microeconomica assai semplice. Un unico bene B ha un prezzo $p(t_i)$, funzione casuale del tempo discreto t_i ($i = 0, 1, \dots, n, \dots$). Un operatore Ω , che possiede la quantità q_0 di B al tempo t_0 , stabilisce due soglie per la variabile $p(t_i)$: una soglia minima S' ed una soglia massima S'' (con $S' < S''$).

Allorché il prezzo di B scende (al tempo t_i) al di sotto di S' , l'operatore Ω compera una quantità Δq_i di B al prezzo $p(t_i)$ e, quando il prezzo $p(t_i)$ sale al di sopra di S'' , l'operatore Ω vende la quantità Δq_i di B. Non si escludono comportamenti irrazionali di B, espressi da errori di segno negli incrementi Δq_i , Δq_j .

15.4.2. SDM a due canali di entrata e due di uscita, simulanti due soli operatori. Questi intrattengono rapporti di compravendita di titoli contro liquidità monetaria, con regimi di scadenza e di interessi contrattati. Occorreranno alcune condizioni sufficienti di stabilità asintotica, attualmente allo studio.

15.4.3. Il caso dell'SDM illustrato in 15.4.2 può essere opportunamente adattato al caso del *duopolio*, al caso, cioè, di due e due soli operatori, che vendano lo stesso prodotto sul mercato.

15.4.4. Il problema della costruzione di un SDM, come quelli ipotizzati in 15.4.2 e 15.4.3, è generalizzabile, ricorsivamente, in modo da poter descrivere un SDM a n canali, modello di un *mercato finanziario* ad n operatori, trattanti k specie di titoli fra loro intercambiabili, con dati tassi di scambio.

15.4.5. Un altro tipico esempio di SDM è quello di un modello matematico di una *borsa merci*, simulante il meccanismo di *bombardamento* di stimoli esterni, ai quali il sistema reagisca con un *controbombardamento* di risposte.

15.4.6. In generale, si può studiare l'esistenza di SDM soddisfacenti ad un'ampia classe di predicati di processi, applicabili al *problema del portafoglio*.

15.5. *Esempi delle proprietà degli SDM, applicati allo studio di sistemi biologici*, vengono forniti di seguito in 15.5.1, 15.5.2, 15.5.3 e 15.5.4.

15.5.1. *SDM simulanti processi inferenziali reali*. Sarà necessario stabilire una corrispondenza biunivoca, tra gli stati (di canale ed iniziale) (cfr. § 12) di un SDM, e gli insiemi di *costanti logiche*, di *variabili logiche*, di *parametri predicativi*, ecc., in modo che il movimento dell'SDM simuli i processi *deduttivi reali*, prima quelli *formalizzati*, poi quelli *naturali*.

15.5.2. *SDM simulanti sistemi nervosi reali*. Si tratta di studiare i processi nervosi, così come vengono direttamente osservati in neurofisiologia.

15.5.3. Nel senso di quanto detto in 15.5.2, e analogamente a quanto fatto per la percezione visiva nel § 11, un SDM sembra adattarsi allo studio di un modello matematico della percezione acustica e, in particolare, delle tecniche compositive derivate, delle quali si fa un rapido cenno in 15.5.4.

15.5.4. In MELZI-OZZOLA [23] si assegna un *modello matematico* del fenomeno dell'*ascolto del messaggio musicale*. Indipendentemente dalle tecniche compositive, il *riconoscimento dei sintagmi musicali* è visto come *strategia di saturazione* di un *segnale acustico*. Questo concetto potrà essere riformulato, attraverso un opportuno SDM, descrivendo in termini algebrico-combinatori le strategie di riconoscimento del tema, della ripetizione, delle variazioni e delle sequenze della melodia, mediante l'evoluzione degli stati di canale e dello stato iniziale dell'SDM stesso. Attraverso tale movimento dell'SDM, potrà essere descritta la struttura della musica ascoltata, giungendo ad una formalizzazione *del linguaggio musicale*, mediante la «modellazione matematica del comportamento computazionale della corteccia acustica» (MELZI [18]).

15.6. Altre prospettive di interpretazione e di applicazione del concetto di SDM sono le seguenti.

15.6.1. *Studio di SDM capaci di prestazioni assegnate*. Si tratta di descrivere prestazioni di *intelligenza artificiale*, in termini di comportamento, cioè con funzioni dalla grammatica G (cfr. 8.1) a G stessa (cfr. funzione caratteristica di un SDM, (16), § 12), e poi di costruire qualche SDM, capace dei comportamenti richiesti, connessi con i linguaggi, dapprima quelli *artificiali*, poi quelli *naturali*, opportunamente schematizzati. In questo senso può essere visto anche il linguaggio musicale di 15.5.4.

15.6.2. *Studio di SDM simulanti automi speciali*. Si tratta di indagare sulla flessibilità degli SDM nelle imitazioni di automi ed *algoritmi* di ogni genere.

15.7. *Applicazione dei concetti fondamentali della teoria dell'informazione agli SDM.* In tal senso è allo studio un lavoro, nel quale si introducono i concetti di *entropia* e di *ridondanza*, nei rapporti tra energia e informazione codificata in un SDM.

Infine, sembra di poter dire che un SDM possa, vantaggiosamente, essere utilizzato nello studio di un qualunque *sistema* che, *sottoposto a stimoli*, *reagisca* fornendo una *risposta*, in particolare se la *risposta* è legata a fenomeni a *soglia* e ad informazione codificata.

CONCLUSIONI

16. Nelle sezioni precedenti di questo lavoro, si è passati, attraverso successive assiomatizzazioni e generalizzazioni, dal concetto di *neuro-macchina* a quello di *semiautoma*, per giungere infine a quello di Sistema Digitale Multicanale, le potenzialità di applicazione del quale appaiono ancora inesplorate. In queste conclusioni si discutono brevemente i criteri di scelta della ricerca, confrontandoli succintamente con quelli di altri studi sull'argomento.

In tal senso, si osserva che la via di ricerca indicata in questo lavoro si basa su un metodo *astratto*, che utilizza *assiomi* e *definizioni*, per costruire *modelli matematici*, che rispondano, contemporaneamente, all'esigenza di essere concepiti sia come schemi dei *processi mentali*, opportunamente semplificati, sia come schemi attendibili delle *strutture nervose*.

Va rilevato, comunque, che le vie di ricerca più seguite fino ad ora sono quelle legate, principalmente, alla *neurofisiologia* ed alla *cibernetica*. Nei paragrafi successivi si ricordano rapidamente alcuni di questi tipi di ricerca, evidenziandone taluni non trascurabili limiti di principio.

17. La neurofisiologia si prefigge di risalire, con opportune estrapolazioni, dai fenomeni osservabili, attraverso lo studio diretto e la sperimentazione del comportamento del sistema nervoso, alle radici materiali dei fenomeni mentali (vedere per esempio KATZ [9]. LEVI MONTALCINI-ANGELLETI-MORUZZI [10]).

Anche se la neurofisiologia può sembrare la scienza più adatta, a fornire una completa analisi dei rapporti tra fenomeni fisici nervosi e inferenza formale, tuttavia essa non riesce ad osservare, globalmente, il fenomeno dell'inferenza, separata dai fenomeni che la rendono materialmente possibile, ma ne disturbano la lettura diretta.

18. La cibernetica indaga sulle *reti nervose*, principalmente, come esposto successivamente.

18.1. Una *descrizione assiomatica* di *cellula nervosa*, dovuta a McCULLOCH-PITTS [11], consiste nella schematizzazione di un tipo di *neurone*, detto *logoneurone*, inteso come un'unità elaboratrice di informazione, gli *inputs* e *outputs* della quale rappresentano, rispettivamente, schemi di bottoni *sinaptici* e di *assoni* della cellula nervosa reale. Collegando, arbitrariamente, gli inputs e gli outputs di più logoneuroni, si ottiene una *rete di logoneuroni* (schema di rete nervosa reale). Kleene nel 1956 (MINSKY [32]) ha dimostrato l'equivalenza fra le reti di logoneuroni e gli *automi*, mentre sono ben note le ricerche di von NEUMANN [33], per la costruzione di un automa capace, con significativa finzione matematica, della proprietà essenziale degli esseri viventi, di *autoriprodursi*.

L'impostazione *circuitistica* di McCulloch e Pitts, se ha consentito i primi progressi nello studio matematico delle reti nervose, ha anche impoverito di molto, attraverso la schematizzazione del logoneurone, il patrimonio di conoscenza dei fenomeni biochimici, che avvengono all'interno di ogni singola cellula reale.

18.2. Nella *termodinamica dissipativa* (PRIGOGINE [37]), si introduce il concetto di *pseudoentropia nulla*, che caratterizza il passaggio dal *caos cibernetico* all'*ordine*.

La termodinamica dissipativa non appare adeguata a fornire schemi di totale corrispondenza, tra i singoli accadimenti nervosi entro la corteccia cerebrale ed i singoli momenti di un processo deduttivo.

18.3. L'*intelligenza artificiale* (vedere ad esempio COLLINS-DALE-MELTZER-MICHIE [7]), può essere riguardata come una *tecnica matematica* per conseguire *automaticamente* prestazioni, che simulino un *comportamento intelligente*.

Con l'intelligenza artificiale, si simulano solamente le prestazioni del sistema nervoso mediante schemi, propri della logica matematica, che non hanno a che vedere con il sistema nervoso reale.

18.4. Vale appena la pena di ricordare che anche la *psicologia sperimentale* studia i fenomeni mentali, partendo dal comportamento globale dell'individuo in singole situazioni contingenti (vedere ad esempio OSGOOD [34]).

La psicologia sperimentale, peraltro, non tocca il problema del rapporto con la *materia vivente*.

19. Una particolare attenzione viene dedicata, in questo paragrafo, alle *reti neurali*¹⁰, che sono gli elementi più noti di una più ampia classe di modelli, i cosiddetti *modelli connessionisti*. Le reti neurali si ispirano, per certi versi, alla struttura del sistema nervoso; le loro capacità computazionali, come nel sistema nervoso, dipendono da un vastissimo numero di elementi molto semplici, i neuroni, le elaborazioni dei quali avvengono in parallelo.

19.1. Le reti neurali sono caratterizzate, sia dal punto di vista concettuale, sia da quello operativo, dalla cosiddetta capacità di imparare da esempi (*training set*) e di organizzare le proprie *categorie interpretative*. Esse, da un punto di vista matematico, possono essere viste come sistemi dinamici (*non lineari*) a più gradi di libertà, capaci di autoorganizzarsi, se sottoposte ad appropriati algoritmi.

19.2 Alcune applicazioni caratteristiche delle reti neurali sono le *low level analysis* (riconoscimento di pattern, memorie associative, analisi dei segnali, riconoscimento di forme, controllo del movimento, robotica, ottimizzazione combinatoria, e così via).

19.3. In sintesi, nelle reti neurali l'apprendimento avviene, generalmente, variando i cosiddetti *pesi* delle connessioni, mentre le *funzioni di trasferimento* dei nodi sono fisse e inducono una partizione lineare dello spazio. Le connessioni e i nodi sono i corrispondenti, rispettivamente, degli assoni e dei neuroni del sistema nervoso reale.

19.4. Quanto detto in 19.3, sembra limitare in maniera incontrovertibile le capacità elaborative di una rete neurale, rendendo necessaria una elevata complessità operativa, anche nel caso di elaborazioni assai semplici, rendendo inoltre difficoltoso lo sviluppo di processi di apprendimento efficaci e rapidamente convergenti. Inoltre, il procedimento di riconfigurazione della rete neurale appare lungo e costoso. Sembrerebbe inoltre che, in ogni caso, il modello proposto dalle reti neurali sia abbastanza diverso dal cervello umano, quanto lo è il calcolatore di von Neumann.¹¹

¹⁰ I concetti di fondo, che regolano le reti neurali, furono enunciati nel 1943 (*neuro-logical networks*) dai già citati McCulloch e Pitts e ripresi nei primi anni sessanta da Rosenblatt e Gamba con i loro *perceptrons*.

¹¹ L'interesse per il cosiddetto *Neural Computing*, dagli inizi nel 1943, con gli studi di McCulloch, Pitts, Wiener, Craik, si è stabilizzato nel ventennio 1950-1970, con gli studi di Shannon, von Neumann, Ashby, Hebb, Turing, Rosenblatt, Minsky, Papert, Widrow, Hoff, Arbib, Kohonen, diminuendo fino a circa il 1984 e riprendendo con notevole successo, grazie ai lavori del PdP Group, di Hopfield ed altri, fino ad oggi.

20. Gli SDM sono progettati in modo tale che la loro struttura si ispiri, il più verosimilmente possibile, al sistema nervoso degli esseri viventi. Si tratta, dunque, di modelli computazionali, che elaborano ed immagazzinano informazione alla stregua dei sistemi biologici e, in particolare, del cervello umano. In tal senso quindi gli SDM sono di tipo complementare, piuttosto che di tipo alternativo, rispetto alle reti neuronali, all'intelligenza artificiale classica ed ai metodi matematici tradizionali. I risultati più interessanti e significativi possono essere ottenuti, sembra di poter dire, da una sinergia tra i diversi approcci ad applicazioni anche complesse, particolarmente nel campo biologico ed in quello economico.

BIBLIOGRAFIA

1. E. ALLEVI, *Preliminari algebrici e topologici allo studio dei sistemi digitali*, Rend. Ist. Lombardo (Rend. Sc.), A 124 (1990), 173-187.
2. E. ALLEVI, *Una interpretazione sistemica non convenzionale di alcune questioni di economia*, Rend. Ist. Lombardo (Rend. Sc.), A 126 (1992), 69-81.
3. L. VON BERTALAMFFY, *Teoria generale dei sistemi*, ISEDI, Milano, 1971.
4. A. CAROTTI, *Neuromacchine come sistemi continui e loro dinamica*, Ist. mat. Applic. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, 8 (1980), 43-59.
5. A. CAROTTI, *Continuous Neuromachines as Dynamic Systems*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 6 (1981), 34-59.
6. A. CAROTTI e F. MERCANTI, *Risultati sperimentali della simulazione di neuromacchine sul computer*, Ist. Mat. Applic. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, 5 (1981), 3-13.
7. M.L. COLLINS, E. DALE, B. MELTZER e D. MICHIE, *Machine Intelligence*, Amer. Elsevier, New York, 1967-1969.
8. B. ISONNI, *Neuromacchine sequenziali*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 5 (1981), 97-102.
9. B. KATZ, *Nervi muscoli e sinapsi*, Zanichelli, Bologna, 1971.
10. R. LEVI MONTALCINI, P. ANGELETTI e P. MORUZZI, *Il messaggio nervoso*, Rizzoli, Milano, 1975.
11. W. MAC CULLOCH e W. PITTS, *A logical Calculus of the Ideas immanent in nervous Activity*, Bull. of Mathematical Biophysics, 5 (1943), 112-147.
12. S. MAC LANE, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, New York Heidelberg Berlin, 1971.
13. G. MELZI, *I supporti fisici dell'inferenza formale*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 1(1976), 1-243.
14. G. MELZI, *Il problema fondamentale dei neuromodelli*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 2 (1977), 55-93.

15. G. MELZI, *Logica formale e attività nervosa superiore*, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano, 46 (1976), 43-71.
16. G. MELZI, *Una definizione assiomatica del concetto di neuromacchina*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 5 (1981), 9-74.
17. G. MELZI, *Optical Illusions as an Example of Fuzzy perception*, TÜV, Verlag, Rheinland (1986), 231-248.
18. G. MELZI, *Sulla definizione di semiautoma*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 10 (1988), 23-50.
19. G. MELZI, *Sistemi dinamici digitali e loro possibili applicazioni*, Ratio Math., 2 (1991), 157-160.
20. G. MELZI e F. MERCANTI, *Per una assiomatica dell'apparato nervoso*, Ist. Mat. Applic. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, 8 (1980), 3-29.
21. G. MELZI e F. MERCANTI, *An algebraic-combinatory Theory of real nervous System*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 9 (1988), 107-121.
22. G. MELZI e F. MERCANTI, *Teoria dei sistemi e Sistemi Digitali Multicanale*, Sinopie, Politecnico di Milano, 2 (1989), 34-35.
23. G. MELZI e V. OZZOLA, *A neural Theory of Music and Derived Techniques of Composition*, Proceedings of 1982 International Computer Music Conference, Computer Music Association, San Francisco, California.
24. F. MERCANTI, *On a Neuromachine equivalent to the universal Turing Machine*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 6 (1981), 9-14.
25. F. MERCANTI, *Reti nervose e computabilità*, Ist. Mat. Applic. Fac. Ing. Univ. L'Aquila, 8 (1980), 31-42.
26. F. MERCANTI, *Contributi per una teoria matematica dei fenomeni mentali*, Per. di mat., Vol. 57, 1-2 (1981), 3-14.
27. F. MERCANTI, *Una suggestiva analogia fra fenomeni biologici e fenomeni economici a soglia*, Ratio Math., 2 (1991), 161-165.
28. F. MERCANTI, *Interpretazione economica dei predicati di canale in un Sistema Digitale Multicanale*, Ratio Math., 3 (1992), 81-84.
29. F. MERCANTI, *La descrizione matematica dei fenomeni a soglia*, Per. di mat., Vol. 69, 2 (1993), 56-60.
30. F. MERCANTI e F. PIAZZESE, *Neuromachines as Turing Machines*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 5 (1981), 103-114.
31. F. MERCANTI e F. PIAZZESE, *Canonical Forms of Data Processing Systems*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 6 (1981), 15-33.
32. M.L. MINSKY, *Computation: Finite and Infinite Machines*, Prentice-Hall Inc., New York, 1967.
33. J. VON NEUMANN, *Theory of self-reproducing Automata*, Edited and completed by W. Burks, Urbana and London, 1966.
34. C.E. OSGOOD, *Method and Theory in Experimental Psychology*, Oxford University, New York, 1953.
35. C. PERELLI CIPPO e E. VENINI, *A neuro-model of the propositional calculus*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 3 (1979), 102-118.

36. F. PIAZZESE, *Neuromacchine e teoria generale dei sistemi*, Per. di mat., Vol. 57, 1-2 (1981), 15-18.
37. J. PRIGOGINE, *Time, Irreversibility and Structure. The Physicist's Conception of Nature*, J. Mehra (ed.), 1973.
38. G. RESCONI, *Una osservazione sui processi tendenti all'entropia nulla*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 2 (1977), 47-54.
39. S. RINALDI, *Teoria dei sistemi*, Clup Polit. di Milano, 1977.
40. P. SRAFFA, *Produzione di merci a mezzo di merci*, Einaudi ed., 1960.

SISTEMI AUTOMATICI DI RICONOSCIMENTO PER LE GEOMETRIE DEI CODICI A BARRE

Giovanni Ippoliti*
Domenico Marconi**

1. PREMESSA

Questo lavoro nasce come logica prosecuzione dell'articolo *Un'indagine sull'uso dei sistemi di lettura (codici a barre) nel settore del commercio*, pubblicato nel numero 1 di *Ratio Mathematica* e del quale si dà qui nel seguito un breve riassunto.

Nella moderna società dei consumi, l'incremento generale del tenore di vita è stato tale da far concretizzare un uniforme livellamento in alto dell'economia familiare. Questo fenomeno ha fatto sentire i suoi effetti in primis per ciò che concerne l'aspetto consumistico della società, il che ha comportato, già verso la fine degli anni sessanta e negli Stati Uniti per prima, la creazione di una vasta gamma di tecniche atte a migliorare la gestione industriale e commerciale, il controllo e la movimentazione, l'organizzazione e la movimentazione delle varie fasi nonché la razionalizzazione della movimentazione di cose e persone.

* Istituto Tecnico per Geometri *C.Forti* Teramo

** Istituto Tecnico Commerciale *C.Rosa* Nereto

Una tra le più importanti di queste tecniche, se non la più importante, è rappresentata dai *codici a barre*. Essi non sono altro che superfici composte di barre scure e di spazi chiari; la loro larghezza e spaziatura varia in funzione del sistema di simbolizzazione adoperato. Ognuno di questi ultimi, infatti, utilizza un proprio modulo base di barra, avente una larghezza minima, dal quale, mediante un coefficiente di moltiplicazione, viene ottenuto il valore degli elementi più larghi.

Il codice a barre vede la sua genesi nella necessità della lettura automatica dei caratteri rappresentati, attraverso un procedimento di lettura ottica e di decodifica elettronica.

Le origini del *bar-code* risalgono al 1949. I primi studi sulla possibilità che un codice a caratteri stampati sulle confezioni dei prodotti di largo consumo possa essere decodificato da un sistema ottico, evitando così la creazione di lunghe file alle casse dei vari supermercati, risalgono al 1960.

Il sistema Americano prese successivamente piede anche in Europa, attraverso la creazione di un sistema di identificazione e catalogazione dei vari prodotti, il cosiddetto *codice EAN* (European Article Number, o numero europeo dell'articolo). Questo codice sta a rappresentare in un certo senso la *carta d'identità* di ciascun prodotto, sia confezionato nel nostro paese, sia importato.

Le applicazioni dei codici a barre sono innumerevoli. Il settore in cui sono stati applicati in maggior misura è quello del conteggio e della movimentazione magazzino e vendite che si realizza marcando gli articoli con il codice prodotto e tradotto in codice a barre sulla confezione che viene stampata in produzione.

Ulteriori utilizzi del *bar-code* stanno nell'applicazione per il riconoscimento del personale e per attivare gli ingressi ad aree riservate e/o effettuare il riconoscimento; nei controlli di sicurezza e nella gestione di documenti nelle banche; nelle operazioni di analisi e di identificazione presso i centri trasfusionali e di analisi; nel settore finanziario con le carte di credito e le carte di acquisto, ecc..

L'adozione dei codici a barre porta con sé una serie di vantaggi, sia nella produzione, (miglioramenti gestionali), sia nella distribuzione (miglioramento della ricezione delle merci e delle consegne ai punti di vendita), nella movimentazione delle merci (eliminazione della marcatura dei singoli pezzi, impossibilità di errori umani nella fase di prezzatura) e nella gestione ed amministrazione delle attività commerciali (disponibilità di notizie dettagliate sulle vendite).

Ecco quali sono i codici a barre più usati.

Il codice più semplice e di più largo uso, soprattutto in campo industriale, è il *codice 2/5* (2 su 5); o, meglio, la famiglia dei 2/5, in quanto esistono diversi sottocodici di esso. I più usati sono l'*interleaved* e l'*industrial*; entrambi sono costituiti da 5 elementi, barre o spazi.

Il *codice alfanumerico 39* è simile al precedente ma più ricco di elementi per il fatto che in esso non si rappresentano soltanto i numeri, ma anche le lettere dell'alfabeto. Consta di 9 elementi ed è costituito da 5 barre e 4 spazi. L'unico svantaggio di tale codice è la lunghezza.

Il codice *UPC* è in uso negli USA, in Canada e nel Regno Unito; si distingue in due diversi tipi: *UPC* versione A ed *UPC* versione E.

Il codice *11* è bidirezionale, numerico e di lunghezza variabile. La sua codifica prevede sia barre che spazi.

Anche il codice *MSI* ed il *Codabar* sono bidirezionali. Quest'ultimo, oltre alle 10 cifre della numerazione, è costituito da altri 14 caratteri speciali, formati in parte da lettere ed in parte da simboli o segni di interpretazione. Anche per questo codice, come per il codice 39, lo svantaggio è la bassa intensità di informazione.

Il codice *EAN* (European Articles Numbering), è strutturato in due formati: l'*EAN* 13 e l'*EAN* 8, ma il primo è di gran lunga il più usato. Questo sistema è stato studiato per essere compatibile con quello Americano (*UPC*). Nell'*EAN*, ad ogni prodotto messo in commercio viene destinato un numero di codice che individua univocamente il prodotto su base nazionale.

2. TECNOLOGIE ED APPARATI PER I CODICI A BARRE

I codici a barre possono essere stampati in tutti i modi con cui vengono impressi i caratteri; generalmente la stampa può avvenire con tre diversi tipi di risoluzione: ad alta, media e bassa densità.

I metodi di stampa sono di quattro tipi: *tipografico* (offset), che necessita di pellicola master per generare il cliché di stampa, oppure mediante *stampanti a matrici d'aghi*, *stampanti a tamburo rotante* (drummer) e *stampanti termiche* (a getto d'inchiostro o laser).

La stampa è legata al tipo di lettore utilizzato. La barra e lo spazio unitari devono essere di spessore maggiore o uguale alla risoluzione del lettore usato, ossia la densità del codice da stampare e la risoluzione vanno adeguate l'una all'altra, entro certi limiti. Nella stampa dei codici a barre bisogna lasciare, prima e dopo il codice, almeno 10 mm. di spazio libero da qualunque scritta, figura o altro.

Il fondo sul quale viene stampato il codice è preferibile sia bianco, giallo, arancio o rosso; normalmente si stampa in nero su fondo bianco. Il supporto di stampa (carta, cartone) non deve essere di materiale riflettente la luce incidente (effetto *specchio*). A questo proposito si consiglia di osservare il supporto prescelto con una lente di ingrandimento.

Tra le barre (bianche o colorate) ed il fondo deve sussistere un contrasto, altrimenti il sensore non riesce a fornire un segnale tale da far distinguere le barre dal fondo.

L'indice di contrasto (*C*) deve valere al minimo 0.8 ed è calcolato con la seguente formula:

$$C = (\text{Riflettenza del supporto} - \text{Riflettenza del nero})$$

Diamo ora una descrizione delle caratteristiche basilari delle varie stampe.

2.1. STAMPA TIPOGRAFICA

Tale metodo prevede la creazione di un cliché, dopodiché avviene la stampa con macchine tradizionali o con offset. Nel caso del codice EAN, bisogna far eseguire a ditte specializzate un *film master* fotografico da consegnare alla ditta, a causa delle specifiche caratteristiche dimensionali internazionali, molto rigide. Il metodo consente di ottenere elevata nitidezza delle stampe, grande precisione dimensionale, scarsi difetti per mancanza di inchiostro in alcune zone e la possibilità di stampare il colore. Grazie a ciò i codici possono essere stampati ad alta densità, occupando poco spazio. Le stampe colorate possono essere lette da un lettore con emissione di infrarosso. Barre di colore giallo, rosso, indaco, rosa, arancio e alcune tonalità di magenta e azzurro non vengono lette, se non con molta difficoltà, da lettori con emissione nel rosso.

Il metodo di stampa tipografica viene principalmente usato per le confezioni di grandi quantità e prodotti.

2.2. STAMPANTI A MATRICI D'AGHI

Questo tipo di stampa viene usato per piccole e medie quantità. Si stampa usualmente su carta, cartoncino e, in special modo, su etichette autoadesive.

Il tipo di carta usato è molto importante: deve assorbire l'inchiostro per evitare che lo stesso macchi l'etichetta al momento della sua applicazione sul prodotto, rendendo così impossibile la lettura del codice. Il vantaggio della stampa ad aghi consiste nella possibilità di stampare piccole serie di etichette, diverse l'una dall'altra, cosa che risulta impossibile per la stampa tipografica, a meno che non si cambi il cliché.

Generalmente la stampa è collegata ad un elaboratore che esegue un programma per la generazione dei codici ed il comando degli aghi della stampante in modo grafico (stampa lenta); oppure la stampante contiene la tabella per la generazione dei codici (stampa più veloce).

Tale metodo è adatto per stampare solo codici a media o bassa densità, ha una sufficiente precisione dimensionale, discreta nitidezza, possibilità di salto da una riga all'altra. Presenta però una scarsa possibilità di stampa a colore e scarsa battuta degli aghi. Un notevole miglioramento delle qualità di stampa si ottiene con l'uso di stampanti a 24 aghi anche se la stampa che si ottiene attualmente con le stampanti a 9 aghi è più che sufficiente per la successiva lettura.

2.3. STAMPANTI A TAMBURO ROTANTE

Queste stampanti sono costituite da un tamburo rotante che porta impressi in rilievo i caratteri in codice a barre e in chiaro. Un martelletto viene azionato in sincronia con il carattere da imprimere. Tra il martelletto e il tamburo rotante viene fatto passare un nastro carbografico a trasferimento di

inchiostro ed un nastro di carta portante etichette autoadesive od un nastro di cartoncino. L'azionamento del martelletto fa sì che il cliché del carattere corrispondente faccia trasferire per impatto l'inchiostro dal nastro carbografico al supporto.

Questo metodo di stampa è adatto per l'emissione di un elevatissimo numero di etichette, circa 10.000/ora, con un'ottima qualità di stampa. Gli unici inconvenienti sono che l'inchiostro può essere asportato abbastanza facilmente, e che il costo delle apparecchiature di stampa è molto elevato.

2.4. STAMPANTI TERMICHE E LASER

Le stampanti termiche che si impiegano sono generalmente dedicate alla stampa dei codici a barre, per cui la stampa non avviene su un foglio di carta ma su un nastro autoadesivo o porta-etichette che una taglierina provvede a tagliare automaticamente. Il formato dei nastri è un rotolo.

Le stampanti laser impiegate sono di uso generale come le stampanti ad aghi. La stampa che si ottiene è di buona qualità, l'inchiostro è aderente, scarsi i difetti dimensionali; con la stampa termica vi è la possibilità del deterioramento della parte impressionata con conseguente impossibilità di lettura, se esposta a fonte di calore. Il costo è medio per le stampanti termiche dedicate, alto per le laser se impiegate solo per la stampa dei codici a barre.

3. DIFETTI NELLA STAMPA DEI CODICI A BARRE

La stampa dei codici a barre è diversa dalla stampa usuale di figure, immagini o caratteri in quanto la stessa è soggetta a lettura ottica ad opera di un sensore. Nelle stampanti ad aghi bisogna fare molta più attenzione che nella generazione dei film per la stampa tipografica. Questo perché l'effetto fotografico tende ad allargare lo spazio e a ridurre il nero, mentre con le stampanti ad aghi si ha l'effetto contrario se si passa da una stampante ad aghi sottili ad una con aghi più grossi o viceversa.

Facciamo ora un elenco dettagliato delle imperfezioni principali, riscontrabili nella stampa dei codici a barre:

- a) Troppo inchiostro sul cliché di stampa tipografica: sbavature, barre rese troppo grosse a scapito degli spazi, resi sottili.
- b) Troppa pressione sul cliché tipografico.
- c) Nastro di trasferimento deteriorato o invecchiato, in stampanti a cilindro rotante.
- d) Supporto di stampa, carta o cartoncino, deteriorato con conseguente mancata aderenza dello inchiostro, che si stacca.
- e) Scarsa inchiostatura del cliché, nastri di stampa vecchi o esauriti, in stampanti a matrice d'aghi.
- f) Inchiostro troppo *grasso* che ha difficoltà ad asciugarsi, oppure supporto che non assorbe a sufficienza.

4. IL BADGE A CODIFICA OTTICA

Un badge, o tessera, serve generalmente per l'identificazione automatica di persone e la gestione degli accessi e/o ingressi ad aree riservate o meno. Un badge con codifica in codice a barre, è meno costoso del corrispondente magnetico, ed è sicuramente insostituibile in condizioni gravose di esercizio, quali campi elettrici o magnetici, polvere e particolarmente in condizioni polverose abrasive.

Il codice a barre viene generalmente stampato con stampanti collegate ad un computer su un supporto di cartoncino leggero. Si può anche applicare una foto del titolare della tessera.

Per evitare le contraffazioni si ricorre, in fase di costruzione, alla applicazione sul codice di un nastro adesivo nero, trasparente a raggi infrarossi. Per la lettura si usano normalmente lettori di badge all'infrarosso.

5. LA LETTURA DEI CODICI A BARRE

Il principio usato per la lettura dei codici a barre si basa sulla rilevazione, da parte di un sensore ottico, della luce riflessa da una superficie illuminata. Il sensore emette un segnale elettrico proporzionale alla luce riflessa dalla superficie esaminata. Facendo scorrere il sensore lungo il codice a barre, si ottiene un segnale elettrico analogico, di ampiezza proporzionale agli spazi ed alle barre incontrate. Il segnale viene squadrato ottenendone una forma d'onda quadra che è l'interpretazione in segnale 1-0 del codice scansionato: 1 per il bianco, 0 per il nero e viceversa se il segnale è invertito.

Sensore ed elettronica sono racchiusi in un involucro ed il tutto viene chiamato *lettore ottico*. E' compito ora del decodificatore la corretta identificazione, decodifica ed interpretazione dei segnali ricevuti dal lettore ottico. Esistono tre sistemi per illuminare e leggere con il sensore le informazioni del codice a barre.

Il primo sistema illumina un'area *grande* e legge la luce riflessa da un punto *spot* (diametro dell'area di lettura) del diametro da 1 a 3 decimi di mm. a seconda del sensore.

Il secondo illumina un punto di diametro variabile da 1/10 a 3/10 di mm., concentrando la luce di led o lampade con lenti oppure con un laser e la lettura della luce riflessa avviene su una superficie più ampia. Il primo sistema è più efficace ed è usato nelle penne dei lettori che leggono a breve distanza dal supporto del codice a barre. Il secondo è più usato nei sistemi che leggono a distanza dal supporto. Il terzo sistema combina i primi due focalizzando l'illuminazione e la *visione* del sensore. Il lettore in questo caso legge il codice a distanza fissa in quanto il sistema illuminatore/sensore è focalizzato.

Il lettore deve avere una risoluzione uguale o minore alla più piccola barra/spazio da leggere. Diversamente il segnale risultante viene modulato dall'interferenza delle barre o spazi adiacenti a quelli che si stanno leggen-

do. La risoluzione del lettore, adeguata a quella del codice, consente di risolvere i problemi legati alla scarsa qualità dei codici che vengono solitamente stampati in media/bassa risoluzione e qualità di stampa sufficiente.

I lettori ottici vengono costruiti per i più svariati impieghi; ve ne sono diversi tipi e modelli per adattarli alle diverse caratteristiche di impiego. Sono raggruppabili in una serie di tipi: lettori a penna e di badge, lettori CCD, lettori laser fissi e portatili.

5.1. LETTORI A PENNA

Il lettore a penna è generalmente costituito da uno o più led ad alta emissione per illuminare l'area di lettura e da un sistema ottico per portare su un sensore la luce riflessa della superficie di lettura. E' costituito, inoltre, da un circuito elettronico di amplificazione e squadratura del segnale che viene portato all'uscita in forma digitale e/o analogica. Il tutto è racchiuso in un contenitore di metallo o plastica. Dal fondo della penna fuoriesce un cappuccio di protezione che porta nella punta un cristallo di rubino o quarzo per sopportare, senza consumarsi, l'abrasione dello sfregamento della superficie.

I lettori vengono generalmente costruiti con tre tipi di risoluzione:

- a) alta, con diametro spot di 0.15 mm.;
- b) media, con diametro spot di 0.25 mm.;
- c) bassa, con diametro spot di 0.38 mm..

5.2. LETTORI DI BADGE

Sono costruiti come i lettori a penna ma sono diversi nel formato e nell'uso. Generalmente il loro involucro è un parallelepipedo con una scanalatura longitudinale nella quale viene fatta scorrere la parte del badge che contiene l'informazione, cioè il codice a barre. Sono, nell'aspetto esteriore, molto simili agli analoghi lettori per carte magnetiche.

5.3. LETTORI CCD

Questi lettori sono formati da un illuminatore costituito da una lampada a scarica flash. L'emissione molto intensa di luce consente di farne ricevere una quantità riflessa tale da poter essere rilevata dal sensore a matrice di punti lineare.

Il risultato del segnale elettrico nel suo insieme viene memorizzato indistaccato per effettuare direttamente la decodifica, oppure viene spedito al decodificatore. Consente di leggere un codice senza operare il movimento di scansione.

5.4. LETTORI LASER

I lettori laser, impiegati particolarmente per letture a distanza del codice grazie all'intensità dello spot e coerenza del raggio, sono costituiti da un emettitore laser, da un sistema ottico, da un tamburo prismatico, da due specchi riflettenti e da un sensore ottico fotomoltiplicatore.

6. ORGANIZZAZIONE DI UN POINT OF SALE

E' opportuno fare una distinzione in base ai livelli di distribuzione.

6.1. PRIMO LIVELLO: PRODUTTORE

Una volta superato il problema dell'unificazione dei codici, visto che in Europa il codice in uso è quello EAN dal 1977, il compito del produttore è quello di stampare sul proprio prodotto un bar-code che lo definisca e lo cataloghi; per cui l'unica attenzione del produttore è quella di fornirsi di macchine che permettano la stampa e l'archiviazione dei prodotti mediante bar-code.

6.2. SECONDO LIVELLO: GROSSISTA - RIVENDITORE

Questo livello potrebbe essere suddiviso ancora in due sottolivelli: il primo riguarda il grossista puro. Egli infatti deve scegliere i prodotti, ad ognuno dei quali corrisponde una etichetta (bar-code) ed immagazzinare i dati di ciascun prodotto in un elaboratore. Nel caso in cui il grossista è anche venditore al minuto o nel caso del singolo rivenditore (parliamo del secondo sottolivello), si presentano altri problemi. Essi infatti devono installare un sistema per la vendita al minuto, ossia una cassa dotata di un adeguato scanner (fisso o mobile).

Per ulteriori dati sull'organizzazione di un point of sale ci si riferisce ad una indagine svolta presso un supermercato di media grandezza, collegato ad una catena che da diverso tempo fa uso degli scanner presso le casse.

L'installazione del sistema non presenta alcun problema. Esso è formato da cinque casse terminali (a scanner fissi), di cui una è un vero e proprio terminale con tastiera e monitor che permette di effettuare qualsiasi operazione sul programma di gestione. Tali operazioni richiedono lo spegnimento delle altre casse. Le cinque casse sono collegate con una memoria centrale doppia, in modo che in caso di un eventuale *black-out* di una, entri immediatamente in funzione l'altra.

Il primo vero problema affrontato è stato quello del costo, abbastanza elevato. Infatti per adeguare il supermercato alla lettura mediante scanner, è stata effettuata una spesa di circa 50 milioni di lire. Nonostante ciò, questa soluzione è stata preferita alle altre, in quanto ha permesso di avere uno snellimento del lavoro precedentemente manuale. Infatti esso comporta un recupero di circa 25 milioni di lire l'anno, che permette di ammortizzare la spesa in due anni ed evita l'occupazione, nel supermercato, di almeno un dipendente.

Grazie al collegamento alla catena, non si ha il problema del caricamento del magazzino nella memoria centrale, poiché tale operazione viene svolta immediatamente tramite la copia del magazzino del fornitore che viene di volta in volta aggiornata.

Per quanto riguarda il rinfoltimento delle scorte di magazzino non si utilizzano i suggerimenti della memoria centrale; gli ordini vengono effettuati mediante dei pseudo-inventari, anche se nel frattempo si cerca di perfeziona-

re un programma per la riordinazione automatica dei prodotti venduti, completamente gestito dalla memoria centrale collegate tramite fax con il fornitore.

Con l'acquisto di una altra macchina, che permette di codificare i prodotti freschi venduti a peso come carne, ortaggi, frutta, ecc., si è risolto anche il problema delle casse *intermedie* presso i banchi di confezionamento. Tale macchina, infatti, produce una targhetta adesiva leggibile dagli scanner delle casse.

I vantaggi ottenuti dall'installazione del sistema, sono stati numerosi, sia per il cliente, che per il supermercato. Basti pensare allo snellimento delle file alle casse, alla improbabilità di errori da parte dei commessi, all'eliminazione di un processo lungo e noioso quale quello della prezzatura di ogni singolo prodotto.

7. CONCLUSIONI

L'adozione delle tecniche di codifica a barre, indipendentemente dal Paese nel quale si vuole esaminare il fenomeno, ha portato, come abbiamo visto, ad una serie di vantaggi che, proprio perché derivano dall'esperienza fatta sul campo, sono innegabili.

Numerosi comunque sono i problemi legati alla loro applicazione ed al loro sviluppo, dovuti non solo alla cattiva informazione da parte dell'utenza, ma anche a causa del loro ritardato impiego, derivato soprattutto dalla vigente normativa adottata nei registratori di cassa e fiscali. Infatti il D.M. n. 343655 del 1983 ha imposto il controllo del fatturato delle imprese di distribuzione, soprattutto dei piccoli negozi, spiazzando così tutti i produttori di registratori di cassa esteri; questi ultimi erano perfettamente aggiornati sulle tecnologie del trattamento del codice a barre ma, purtroppo, non rispondevano ai requisiti richiesti per la commercializzazione nel nostro paese.

Comunque tali imposizioni non rappresentano, attualmente, un grave problema per quel che riguarda i grandi produttori, quali Olivetti, NCR, IBM, in quanto sono convinti che presto otterranno l'omologazione di terminali evoluti e contemporaneamente ubbidienti alle direttive fiscali.

A testimonianza di quanto detto, oggi siamo di fronte ad un processo di trasformazione enorme che porterà un rovesciamento dei ruoli ad opera del mercato; invece di avere un sistema avente come base la clientela, al centro gli operatori della distribuzione ed al vertice le aziende di produzione, vedremo i clienti prendere la posizione superiore, invertendo il ruolo con quello dei produttori. In questo modo la diffusione dei codici a barre crescerà vertiginosamente verso un sistema più frenetico in relazione all'evoluto ed elevato livello di codificazione di tutti i prodotti; fra molti anni masse di aziende e operatori saranno sicuramente entrati nella famiglia degli utenti dei codici a barre.

BIBLIOGRAFIA

1. ANGELERI, *Trasmissione dati*, Editoriale Delfino. 1972.
2. M.G. BARTOLINI BUSSI, *I codici a barre*, *Le Scienze*, n.3, 1984, 71-86.
3. L. BERARDI e A. BEUTELSPACHER, *I buoni angeli custodi*, *Archimede*, n. 2/3, 1989, 129-140.
4. L. BERARDI e F. EUGENI, *Smart cards and authentication schemes*, V° Meeting Euroworking Group on Financial Modelling, Acireale (CT), 1989, *Rend. di Mat.*.
5. A. BEUTELSPACHER, *La scuola elementare della teoria dei codici*, *Quad. n.1, Suppl. didatt. Sem. Gcom. Comb. L'Aquila*. 1985.
6. E CASUCCI, *Lo stato dell'arte e le prospettive del bar-code e dello scanning*, *Largo consumo*, n. 7-8, 1988, 160-173.
7. U. ECO, *Codice*, *Enciclopedia Einaudi*, vol.3. 1978.
8. M.L. ERNST, *La meccanizzazione del commercio*, "*Le Scienze*", n.171, 1982, 89-106.
9. T.J. FLETCHER, *La matematica per la scuola dei nostri giorni*, *La Nuova Italia*, 1977 (1964).
10. E. GOWES, *Bar codes*, *SMP News*, n.19, 1983.
11. ITALIANI e SERAZZI, *Elementi di informatica*, Etas. 1973.
12. R. LARICCIA, *Le radici dell'informatica*, Sansoni. 1981.
13. G. LONGO, *Introduzione alla teoria dei codici algebrici*, *Archimede*, 1982, 99-107.
14. G.LONGONI, *L'Italia a barre*, *Zerouno*, n.29, 1984, 42-53.
15. SINGH, *Teoria dell'informazione, linguaggio e cibernetica*, Mondadori, 1969.
16. A. ZANA, *Leggendo fra le righe*, *Minisistemi*, n.7-8, 1989, 14-23 e n.9, 1989, 20-34.

UN ANTICO MODELLO MATEMATICO PER DIVINAZIONI CONTENUTO IN UNA ENCICLOPEDIA DI FINE SETTECENTO

Fernando Di Gennaro*

Domenico Maiorani*

Franco Eugeni**

SUNTO - Si esamina un modello matematico per divinazioni che è molto simile *in filosofia* a modelli usati dai Sacerdoti di Apollo. Il modello che è riletto su probabile reinterpretazione di De Fontanelle e Van Dale, è stato anche rielaborato per essere utilizzato su computer. Il modello è naturalmente un *imbroglio* ma la struttura matematica per ottenerlo potrebbe essere utile per la costruzione di codici opportuni.

INTRODUZIONE

Nel Novembre 1993 uno degli Autori del presente scritto, il Prof. Maiorani, in una delle sue spedizioni atte a scovare libri matematici di Antiquariato, reperiva due volumi che dovevano rivelarsi di contenuto quantomeno *curioso*.

* Liceo Scientifico di Giulianova Lido

**Terza Università di Roma

I due volumi reperiti risultavano:

- a) IL PRIMO APPARTENENTE ALLA *ENCYCLOPEDIE METHODIQUE* EDITO A PADOVA NEL 1788;
- b) IL SECONDO APPARTENENTE AL DIZIONARIO *AMUSEMES DE SCIENCES* EDITO A PADOVA (1790?)

E' ben noto che nel periodo illuminista era di gran voga l'Encyclopedie o Dizionario ragionato delle scienze, delle arti e dei mestieri di DIDEROT e D'ALAMBERT. Il primo volume di detta Enciclopedia apparve, edito a Parigi da A.F. BRETON, nel mese di Luglio del 1751 e dopo numerose interruzioni, specialmente dovute agli attacchi di vari oppositori, in linea di massima conservatori, fu infine completata (33 volumi in totale) nel 1777.

L'Encyclopedie presenta un esame critico dello stato delle conoscenze umane intorno alla metà del Settecento ed i suoi lettori possono prendere coscienza dei progressi fatti nel campo sia delle scienze esatte che di quelle sperimentali. Così potevano essere lette e divulgate le concezioni rivoluzionarie del mondo che, alla luce delle nuove scoperte, sono catalogate e messe alla portata del pubblico più raffinato e colto.

L'opera diviene, come il futuro ci ha insegnato in circostanze del genere, facile preda di numerose contraffazioni. Ne nascono in Svizzera, in Inghilterra ed altrove, ma con esse nascono anche preziose se non prestigiose imitazioni.

In Italia sono note le bellissime enciclopedie di Lucca (1758-1771) e di Livorno (1770) come riportato nella *Storia e civiltà dei popoli* vol. XI pag. 64 ed. U.T.E.T. 1975.

I due volumi in nostro possesso e in esame fanno entrambi parte di una Enciclopedia, delle serie delle prestigiose imitazioni, edita a Padova nel 1788 e presentata sotto forma di *Encyclopedie Methodique*.

L'opera è dedicata alla "Serenissima" Repubblica di Venezia. Il frontespizio presenta una incisione in acquaforte di P.Scataglia e mancano i nomi sia dell'autore che dell'editore. Questa circostanza è facilmente spiegabile.

Il Diderot e il D'Alambert ebbero l'approvazione del re per poter iniziare la pubblicazione e firmarono l'opera all'uscita dei volumi ma visti gli esiti, l'interesse destati nel pubblico i potenti dell'epoca (in verità solo i più conservatori) iniziarono le pressioni e le censure miranti ad impedire il diffondersi delle *nuove idee*. Diderot e D'Alambert entrambi affiliati alla Massoneria, che era allora sorgente in Europa, propugnavano quelle idee di Libertà-Eguaglianza-Fraternità, idee rivoluzionarie che sembravano minare dalle fondamenta i vari regni in tutta l'Europa. Così molte di queste opere nascevano quasi clandestine, e di sicuro ben gradite ai Massoni d'Europa. Questa tesi sembra avvalorata dal fatto che l'edizione di Lucca datata 1758, e quindi precedente il tempo che cominciò a considerare pericolose le nuove idee, riporta il nome dello stampatore e addirittura del signore (un certo Ottaviano Diodati) che, da buon illuminista, dedicava l'opera al popolo come dono alla crescita politica e culturale.

Così quando i primi effetti della divulgazione dell'Enciclopedia e dei vo-

lumi ad essa ispirati si fecero evidenti ecco che i volumi non vengono più firmati dagli autori e perfino lo stampatore diviene anonimo, come nell'edizione di Livorno, datata 1770, ed in quella in nostro possesso che risale al 1788.

L'opera è scritta in francese, lingua che in quel periodo raggiunge in Europa la massima espansione sia negli ambienti accademici che in campo diplomatico. A conferma basti ricordare che nel 1784 l'Accademia di Berlino mette a concorso la seguente questione: "*Perché la lingua francese è universale?*".

Nel volume a) esaminato si fa il punto delle conoscenze scientifiche di quel fine '700 (le voci riportate vanno dalla lettera C alla lettera E). Sono particolarmente approfonditi i temi riguardanti la Matematica e la Fisica. Nel volume b) si evidenzia maggiormente lo spirito e la volontà insita in queste pubblicazioni ai fini di dare un contributo fattivo al lettore per smitizzare alcune credenze. In questo periodo, come è noto, si mescola abilmente lo scientifico con l'esoterico.

Scopo del lavoro è il riportare, con le dovute interpretazioni, un metodo indicato nel volume b) che era usato essenzialmente per divinare. Sembra che il modello matematico fosse molto più antico, addirittura romano, perché ripreso da antiche tavole di marmo. Naturalmente l'Enciclopedista tende ad evidenziare più l'imbroglio che il metodo combinatorio. Noi nel nostro lavoro siamo disposti a perdonare l'imbroglio ai fini di un buon esame del modello, della costruzione di un modello più ampio in cui non si opererà più manualmente ma per il quale occorrerà un programma di calcolo automatico per *divinare*.

IL METODO "ROMANO" PER DIVINARE

Il metodo la cui rivisitazione è attribuita ad un matematico sconosciuto del '700, era utilizzato in epoca romana dalle sacerdotesse d'Apollo le quali attraverso due tavole, di cui una numerica ed una letterale ed entrambe scolpite su pietra, davano le risposte alle domande poste dalla gente.

Tale matematico rinvenne dette tavole in uno scantinato in occasione di un suo soggiorno nei pressi di Roma come riportato a pag. 277 del volume *Admusemens des Sciences - prime partie* - voci dalla A alla C.

"Vers produits par le calcul numerique."

L'auteur du petit ouvrage intitulé "manufacture e fabrique de vers latins au petit metier", dit qu'en se promenant dans les environs de Rome, il trouva dans un souterrain une planche de cuivre, sur laquelle etoient gravees deux tables composees de chiffres e de lettres; qu'ayant supconé que ces tables pouvoient avoir servi autrefois au pretres d'Apollon pour rendre leurs oracles il s'est applique a en connoitre l'usage e qu'il aheureusement qu'à l'aide de ces table, on peut, par le simple calcul e sans savoir le latin, repondre en un vers latin à une question quelconque proposée sur l'avenir;

d'ou il conclud que cette table est precisement la moyene proportionelle entre l'histoire de M. de Fontenelle e celle de Van Dale, sur la maniere dont les anciens rendoient les oracle..... etc..

Traduzione:

"Versi composti con calcolo numerico"

L'autore della piccola opera intitolata "Manifattura e fabbrica di versi latini su piccolo telaio" dice che passeggiando nei dintorni di Roma, in un sotterraneo trovò una lastra di rame, sulla quale erano incise due tavole composte di cifre e lettere, avendo supposto che queste tavole potessero essere servite ai sacerdoti di Apollo per emettere il responso degli oracoli, si è applicato a conoscerne l'uso e che ha felicemente concluso che per mezzo di queste tavole, si può, con il semplice calcolo e senza sapere il latino, rispondere con un verso latino a una qualsiasi domanda sull'avvenire: da ciò conclude che questa tavola è il medio proporzionale fra la storia di M. De Fontanelle e quella di Van Dale sul modo con cui gli antichi interpretavano gli oracoli..... ecc..

Essendo impossibile descrivere il metodo in forma astratta, passiamo a spiegarlo partendo dall'ipotetica domanda posta all'oracolo dall'occasionale curioso.

Domanda:

"Come si presenta il mio futuro?"

Attraverso la seguente tabella

A = 1	B = 2	C = 3	D = 4	E = 5	F = 6	G = 7
H = 8	I = 9	L = 10	M = 11	N = 12	O = 13	P = 14
Q = 15	R = 16	S = 17	T = 18	U = 19	V = 20	Z = 21

dopo aver diviso arbitrariamente la frase in nove sillabe, si ricavano altrettanti numeri, sommando quelli corrispondenti ad ogni singola lettera. Nel nostro caso si ha:

COME	SI	PRE	SEN	TA	IL	MIO	FUTU	RO
32	26	35	34	19	19	33	62	29

Si passa al resto mod. 9 di ognuno, con l'avvertenza di sostituire 9 quando il resto risulta zero, così facendo nel nostro esempio si ha:

5	8	8	7	1	1	6	8	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Si considerano poi le prime due cifre se ne esegue la somma e si passa ancora al resto mod 9 (ricordando di sostituire 9 al resto 0), si continua allo stesso modo considerando alla seconda e la terza cifra e così di seguito similmente alla costruzione del triangolo di Tartaglia.

La situazione nell'esempio in esame risulta:

```

5 8 8 7 1 1 6 8 2
4 7 6 8 2 7 5 1
2 4 5 1 9 3 8
6 9 6 1 3 2
6 6 7 4 5
3 4 2 9
7 6 2
4 8
3

```

per comodità la si può riportare nel modo seguente:

```

5 8 8 7 1 1 6 8 2
4 7 6 8 2 7 5 1
2 4 5 1 9 3 8
6 9 6 1 3 2
6 6 7 4 5
3 4 2 9
7 6 2
4 8
3

```

Considerando i numeri secondo l'ordine delle colonne nel senso evidenziato in figura:

```

5 8 8 7 1 1 6 8 2
4 7 6 8 2 7 5 1
2 4 5 1 9 3 8
6 9 6 1 3 2
6 6 7 4 5
3 4 2 9
7 6 2
4 8
3

```

si costruisce la seguente tabella, in cui le singole colonne sono denominate, per comodità di riferimento, con le prime lettere dell'alfabeto.

a	b	c	d	e	f	g
3	8	4	4	3	6	4
8	1	3	7	6	9	6
2	2	3	1	6	5	7
9	4	5	9	1	8	2
5	6	8	7	2	1	7
2	2	7	6	1	6	8

Si consideri, inoltre, la matrice tridimensionale i cui elementi $z(i,j,1)$ sono quelli della tabella precedente in cui sono state sopresse la prima riga e la prima colonna. La prima colonna contiene gli elementi $a(i)$ che andiamo a riportare a fianco di ogni tabella per facilitare la costruzione di ognuna di esse.

a(i)						
3	8	4	4	3	6	4
8	1	3	7	6	9	6
2	2	3	1	6	5	7
9	4	5	9	1	8	2
5	6	8	7	2	1	7
2	2	7	6	1	6	8

Gli elementi sono definiti da:

$$z(i,j,2) = [3*b(i,j,1) + a(i)] \bmod 9$$

e che riportiamo nella seguente tabella:

9	6	6	3	3	6
2	8	2	8	8	8
8	2	5	2	8	5
3	6	9	3	6	6
5	2	8	2	8	8
8	5	2	5	2	8

mentre gli elementi ulteriori si ottengono da:

$$z(i,j,3) = b(i,j,2) + a(i) + 9*j$$

La situazione finale che ci interessa è quella relativa agli elementi della matrice di terzo indice Z3 che riportiamo qui sotto:

21	27	36	42	50	63
19	34	37	52	61	70
19	22	34	40	55	61
21	33	45	48	60	69
19	25	40	43	58	67
19	25	31	43	49	64

A questo punto è necessario prendere in considerazione le tavole allegate al volume in esame e che riportiamo di seguito:

TAVOLA NUMERICA

a	b			c			d			e			f			g		
1	11	14	17	56	59	62	20	23	26	47	50	53	29	32	35	38	41	44
2	22	25	28	13	16	19	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64
3	60	63	66	51	54	57	42	45	48	33	36	39	24	27	30	15	18	21
4	14	17	20	59	62	65	23	26	29	50	53	56	32	35	38	41	44	47
5	25	28	31	16	19	22	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67
6	63	66	69	54	57	60	45	48	51	36	39	42	27	30	33	18	21	24
7	17	20	23	62	65	68	26	29	32	53	56	59	35	38	41	44	47	50
8	28	31	34	19	22	25	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70
9	66	69	72	57	60	63	48	51	54	39	42	45	30	33	36	21	24	27

DOPPIA TAVOLA LETTERALE

a		B					C					D						
1	d	e	f	ru	+	f	o	m	o	bi	ra	m	i	te	a	m	f	a
2	f	e	u	m	+	a	ju	p	c	co	t	c	+	+	p	p	a	+
3	e	s	te	t	+	n	+	a	i	de	ra	e	c	+	+	n	pe	m
4	t	n	d	so	c	fy	a	s	e	bi	da	s	+	j	u	l	o	+
5	o	u	o	ro	a	c	f	l	v	p	g	hi	r	b	+	mi	u	a
6	+	s	o	t	a	a	e	i	t	ci	l	m	+	t	+	di	j	+
7	m	+	do	v	f	c	e	s	s	bi	a	n	j	m	mi	o	o	a
8	o	p	u	n	ro	e	m	o	j	no	p	u	n	+	s	re	e	m
9	o	m	o	t	a	a	d	e	t	+	t	u	+	d	j	j	j	l

a	E						F						G					
1	+	i	t	ti	de	u	+	n	u	pe	oe	t	c	+	f	t	+	+
2	t	t	i	le	l	s	+	j	d	bi	i	u	a	s	o	t	a	s
3	c	j	c	i	s	u	+	c	i	n	ro	+	c	s	l	no	p	n
4	t	+	j	ti	o	u	a	m	+	ve	m	d	n	i	b	t	m	+
5	+	e	t	t	d	n	t	n	j	ti	j	nu	c	s	s	t	a	s
6	r	+	r	e	b	e	u	a	e	ra	u	h	j	s	c	p	j	t
7	l	i	n	ti	l	e	+	a	u	ve	e	r	l	g	mia	t	cu	m
8	+	t	t	d	m	p	n	a	+	de	j	u	c	s	e	t	a	s
9	e	j	r	b	b	e	r	qu	c	na	e	o	c	c	m	do	d	c

Confrontando gli elementi della matrice Z3 calcolati a partire dalla domanda formulata all'oracolo) con i numeri presenti nella tavola numerica allegata al volume ci si accorge tutti gli elementi della prima si ritrovano nella seconda.

Per poter arrivare alla risposta bisogna considerare ulteriormente la tabella formata dalla colonna di indice 1 che è quella formata dagli elementi ai mentre le rimanenti colonne sono quelle di Z3. Per comodità di lettura le singole colonne sono nuovamente individuate a partire dalla prima con le prime lettere dell'alfabeto come in figura Z4:

a	b	c	d	e	f	g
3	21	27	36	42	50	63
8	19	34	37	52	61	70
2	19	22	34	40	55	61
9	21	33	45	48	60	69
5	19	25	40	43	58	67
2	19	25	31	43	49	64

Finalmente possiamo ricavare la risposta operando nell'ordine seguente:

- 1) Si legge il valore a1 di Z4 che rappresenta l'indice di riga, sia della tavola numerica che letterale, su cui andare ad individuare la prima parola della risposta.
- 2) Si considera il valore b1, sempre su Z4.
- 3) Si cerca nella tavola numerica N il valore determinato nel punto 2 di b1 ed in corrispondenza si trova il nome della colonna a cui appartiene.
- 4) Si passa, infine, alla riga a1 della tavola letterale ed in corrispondenza della colonna di nome individuato nel punto 3 si ottiene nella prima delle 6 sottocolonne la prima sillaba che compone la prima parola della risposta.
- 5) La seconda sillaba della risposta la si ottiene considerando l'elemento c1 di Z4 ed operando poi come nei punti 3 e 4.

- 6) La prima parola viene completata quando si è determinata la sillaba corrispondente a g1.
- 7) La seconda parola della risposta la si trova partendo dal valore a2 ed operando secondo i precedenti punti.

La frase viene ultimata una volta che siano stati considerati tutti i valori della colonna *a* di Z4.

Nell'esempio da noi trattato si ottiene la seguente risposta:

ECCE OPTAS CUPIDO DONABIT GAUDIA CASUS

CONSIDERAZIONI SULL'ALGORITMO

Colui che ha costruito le tavole è partito da nove frasi in esametro (ognuna di senso compiuto) e una di esse poteva risultare la risposta generica alle questioni che più spesso venivano poste all'oracolo.

Risulta però interessante notare che combinando la prima parola di una qualsiasi delle nove frasi con una qualsiasi seconda parola dei nove esametri si ottiene comunque una risposta plausibile con il tema proposto.

Le frasi originarie erano le seguenti:

Dico	etenim	fausto	rumpet-tibi	focdera	fatum
Justa	petis	cupido	romplebit	talìa	casus
Ecce	scias	licite	non-indet	prospera	numen
Tanta	nimis	dubie	solvat-tibi	commoda	fydus
Forte	lubens	votis	promittit	gaudia	hic-annus
Jure	satis	certe	praedicat	jubila	thema
Mille	magis	dominans	vovet-tibi	saccula	carmen
Nonne	optas	juste	non-reddat	proemia	tempus
Credo	equidem	merito	donabit	debita	coelum

In questo modo si possono ottenere 9^6 risposte diverse in quanto una qualsiasi prima parola delle nove frasi può abbinarsi ad una qualsiasi delle seconde parole e così di seguito con le successive fino a formare una frase di

sei parole che rappresenta la risposta ad un quesito qualsiasi ma di tema generico.

L'oracolo che ovviamente doveva operare in presenza del *cliente*, doveva far porre ad esso il quesito e ricavarne la risposta, per cui era necessario mascherare l'algoritmo.

Le tavole si dovevano presentare illegibili ecco che quindi ogni parola di ogni frase viene scomposta secondo un codice prefissato come nel nostro caso la prima parola della prima frase *Dico* la si trova sulla prima riga della tavola letterale scomposta secondo il codice B-D-F-G-E-C, infatti la lettera d è posta nella prima delle sei caselle della colonna B, mentre la lettera i si trova sempre nella prima casella della colonna D, la terza lettera, la c, dovrebbe trovarsi nella prima casella della colonna F ma essendo la parola di solo quattro lettere l'autore ha preferito lasciarla vuota mettendo un simbolo convenzionale. E' ora chiaro che una volta che sono state riportate tutte le parole della prima frase, la prima riga della tavola risulta completa. La seconda frase viene allo stesso modo scritta nella seconda riga seguendo lo stesso codice o uno diverso. Riportiamo ora i vari codici relativi alle singole righe utilizzati nella costruzione delle tavole rinvenute.

- 1) B - D - F - G - E - C
- 2) C - B - D - E - F - G
- 3) G - F - E - D - C - B
- 4) B - D - F - G - E - C
- 5) C - B - D - E - F - G
- 6) G - F - E - D - C - B
- 7) B - D - F - G - E - C
- 8) C - B - D - E - F - G
- 9) G - F - E - D - C - B

E' interessante ora vedere come dalla domanda posta si riesca ad ottenere una risposta che abbia senso.

Ricordiamo brevemente che dalle singole lettere componenti la domanda, si ricavano attraverso una lunga ed elaborata procedura gli elementi della tabella Z4.

A prima vista si rimane sorpresi nell'osservare che tutti quanti gli elementi di Z4 sono presenti nella tavola numerica e che da essi si possa ricostruire una frase in uscita. In effetti ciò si spiega considerando le pro-

prietà dell'algoritmo utilizzato per calcolare gli elementi di Z_3 che formalmente si può esprimere:

$$(3b + a) \bmod 9 + a$$

esso al variare di a e di b nel sottoinsieme di N $[1...9]$

per	a=1	genera la terna	2 - 5 - 8
	a=2		4 - 7 - 10
	a=3		6 - 9 - 12
	a=4		5 - 8 - 11
	a=5		7 - 10 - 13
	a=6		9 - 12 - 15
	a=7		8 - 11 - 14
	a=8		10 - 13 - 16
	a=9		12 - 15 - 18

siamo ora sicuri che ad ogni quesito proposto certamente corrispondono numeri appartenenti a queste terne.

Prendiamo ora in considerazione la prima terna 2-5-8; da questa se ne possono ottenere sei, aggiungendo ad ogni elemento rispettivamente i primi sei multipli di 9 ossia:

$$\begin{array}{l} 11 - 14 - 17 \quad ; \quad 20 - 23 - 26 \quad ; \quad 29 - 32 - 35 \\ 38 - 41 - 44 \quad ; \quad 47 - 50 - 53 \quad ; \quad 56 - 59 - 62 \end{array}$$

ogni terna, come si può verificare, è stata disposta nella prima riga della tavola numerica secondo i valori crescenti sotto le colonne di nome uguale a quello stabilito dal codice usato per scomporre la prima frase nella tavola letterale. Analogamente si opera con le altre terne fino a completare la tavola numerica.

In sintesi possiamo affermare che tutto il procedimento si riduce ad una subroutine che genera sei numeri in corrispondenza della domanda formulata ed in tal senso la si può considerare *random*. I numeri che effettivamente determinano la risposta sono quelli della colonna di indice 1 individuata nelle tabelle dalla lettera a .

PRESENTAZIONE DEL PROGRAMMA DIMOSTRATIVO

A completamento del lavoro abbiamo realizzato un programma scritto in Turbo Pascal ver. 4.0 che ha preso lo spunto dall'antico metodo divinatorio e che nella stesura originaria lo riproduceva fedelmente. Successivamente, come spesso accade, presi dalla originalità e spinti dalle possibilità di sviluppo che si intravedevano siamo arrivati alla versione attuale che andiamo a descrivere nelle linee essenziali.

Il programma richiede in input oltre al nome di chi propone il quesito, la questione stessa, che viene memorizzata in un vettore.

Seguendo l'algoritmo esposto nella teoria da esso si ricavano gli elementi della tavola numerica.

Per evitare una risposta generica e dare invece più spessore al lavoro abbiamo ritenuto interessante cercare di avere risposte pertinenti anche a quesiti di natura più specifica.

Pertanto, è stato necessario poter *riconoscere* il contenuto specifico del tema proposto e poi attraverso tavole letterali (ognuna riguardante un settore, per es. salute, amore, economia) avere la relativa risposta.

BIBLIOGRAFIA

1. A. SGARRO, *Codici segreti*, Mondadori, 1989.
2. GODECHOT, *L'epoca delle rivoluzioni*, U.T.E.T., 1975.

SU ALCUNE PROBLEMATICHE PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN PRESENZA DI DISABILITA': STRATEGIE PER UN CURRICULUM MINIMO

Silvana D'Andrea*

SUNTO - Uno dei grandi problemi della didattica attuale è proprio il portare gli allievi a capire la matematica. Per alcuni è facile e per altri è linguaggio naturale. Anche per i disabili la suddivisione si ripresenta. Ma esiste veramente una sorta di abilità *a priori* per la Matematica o una tale pretesa abilità la si può costruire? Si delineano aspetti vari del problema didattico fino a proporre in alcuni settori concreti interventi. Si studia anche qualche problematica per la costruzione di curriculum individualizzati nel caso dei portatori di handicap.

1.- ESISTE L'ABILITÀ MATEMATICA?

Scrivo Bruner (cfr.[3], pg.161), riguardo l'educazione americana:

Gli obiettivi iniziali erano semplici, nondimeno attraenti nelle loro aspirazioni: l'insegnamento delle Scienze (e delle altre discipline) doveva essere attuato in modo da spiegare ciò che la scienza stava facendo, così che l'uomo moderno potesse avere una qualche conoscenza migliore delle forze che regolano il suo mondo. La concezione di base era razionalistica: conoscendo la natura ed essendo esperto nei modi di pensar della scienza e della matematica, l'uomo apprezzerrebbe non solo la natura, ma si sentirebbe meno impotente di fronte ad essa, e raggiungerebbe la dignità intellettuale inerente all'essere lo scienziato di se stesso.

* USSL Roseto degli Abruzzi (TE)

Questa precisa quanto ideale visione, utopica certamente, può essere assunta come limite al quale far tendere i nostri obiettivi in quello che è lo sviluppo cognitivo dell'individuo. Non vi è alcun dubbio sull'importanza della Matematica, come linguaggio chiave delle Scienze. Naturalmente ciò non implica che sia chiaro il come e i quando di tutti gli obiettivi parziali.

Far apprendere la Matematica a ragazzi che sono nel periodo iniziale di formazione o cercare di costruire una mentalità giusta - ovvero preparare un terreno adatto alla ricezione - in allievi disabili, per impararne un po', è compito veramente ingrato. Questo sia per la difficoltà intrinseca della disciplina sia per il rinnovamento che la disciplina ha subito dagli anni '30 in poi. Essa è passata da ben due grandi rivoluzioni: la Teoria degli Insiemi della Scuola di Bourbaki e la rivoluzione informatica.

I più di noi nei loro ricordi scolastici, e parecchi nel loro corso di studi hanno manifestato, per la Matematica, sentimenti sostanzialmente e spesso decisamente negativi. Altri coloro che con la Matematica hanno mostrato, nella loro storia, una naturale dimestichezza sono sempre stati additati come *coloro che sanno far di conto* con profondo rispetto. Spesso e *volentieri* si attribuisce la colpa di questi sentimenti ai sistemi ed alle metodologie didattiche in uso nelle scuole. Certamente l'avversione degli studenti per la matematica può avere oltre queste - a volte presenti e a volte no - altre non meno gravi motivazioni, anche più significative, quali:

- L'uso in fase di apprendimento di tecniche poco idonee quali il richiedere lo sviluppo di faticosi quanto inutili esercizi assieme a complesse teorie con le prove dei teoremi, argomentazioni del tutto trascurabili quando gli obiettivi sono distanti da una formazione totalmente speculativa.
- La poca esplicitazione quindi degli obiettivi che l'insegnamento della matematica si propone nei vari momenti educativi. Da questo deriva allora anche una non chiara esplicitazione degli obiettivi parziali che desideriamo raggiungere e a volte una chiara non conoscenza nemmeno di quelli che possono essere gli obiettivi secondari.
- Un secolare non rispondenza tra i modelli logici in uso nella vita quotidiana e quei modelli di ragionamento logico-formale di cui solo la *matematica scolastica* di fatto si serve.

Sembrerebbe allora che l'allievo che risponda più che bene ai solleciti del Professore di Matematica sia colui che possieda alcune non meglio identificate caratteristiche che in modo vago vengono dette *abilità matematiche*. Luoghi comuni di sempre ci dicono che il tale non è portato, il talaltro invece lo è, e per questo lo si gratifica come se fosse un attributo del corpo.

Se questa capacità esistesse diverrebbe di notevole importanza comprendere cosa tale abilità matematica veramente sia, e quindi con quali meccanismi mentali essa si forma. Inoltre si dovrebbe almeno tentare di stabilire nel rapporto docente-discente le condizioni ottimali per lo favorire lo sviluppo di tali capacità.

Noi pur ritenendo che gli individui siano fortemente differenziati nei confronti della cultura, riteniamo che non sia rilevante ai fini degli obiettivi di una cultura non specializzata il possedere o meno una tale abilità. Se l'obiettivo principale di una educazione matematica di medio livello (ad esempio di scuola media inferiore) è pensata per un allievo medio-dotato (senza

l'interesse di proseguimento in studi scientifici) essa darà luogo a poche richieste e quindi a poche aspettative. La preparazione che ne deriverà ci porterà al richiedere il raggiungimento di una abilità applicativa e di problem solving che sia in piena armonia con tutti i modelli che l'allievo incontrerà poi nella sua vita quotidiana. Così occorre che l'allievo riesca ad orientarsi sulla piccola economia della vita, capisca le piccole statistiche del quotidiano e si orienti davanti a piante di edifici e a itinerari di mostre o di metropolitane. Sappia usare quel minimo di informatica che si incontra con il Bancomat e utile per i futuri impiegati elettronici. Se si vuole andare più a fondo occorre che l'allievo impari a confrontare pesi, capacità, misure, quantità e distanze fino ad avere una idea dell'infinitamente grande del cosmo e dell'infinitamente piccolo (presenti in fenomeni chimico-biologico). Da notare che tali obiettivi *più pratici* sono a volte non ottenibili in personaggi con alto grado di abilità matematica, perché spesso l'abilità suddetta si accompagna con sindrome di rifiuto del reale e con il rifugio nel dorato mondo dell'astratto. Ma in presenza di medio-alte capacità, nel corso ad esempio di una scuola superiore, l'insegnamento matematico dovrebbe avere obiettivi più ambiziosi e condurre all'abilità matematica intesa come una capacità ad eseguire *manovre mentali* utilizzando e manipolando concetti, gruppi di concetti e catene deduttive fino ad arrivare ad utilizzi ed esercizi atti ad un impadronimento dei concetti anche applicati. Riferendoci ad un obiettivo del tipo *impadronirsi dei concetti* troviamo insiti in esso interessanti obiettivi secondari.

Gli obiettivi della Media inferiore e della Media superiore sono vanificati se non preceduti dal giusto e calibrato lavoro che si svolge nelle Scuole Elementari. Solo procedendo per gradi nelle superiori si potrà conquistare l'astratto, croce e delizia di tutta la didattica contemporanea. L'astratto viene definito in contrapposizione al *concreto*, o *ciò che può essere acquisito con l'uso dei sensi*.

L'astratto di un concreto sarebbe sempre nominalmente concepito come il *quid* che concreti in certo senso equivalenti sottendono. Il comprendere l'astratto sarebbe il risultato di un'attività intellettuale che impadronendosi di molti concreti, dello stesso astratto, ne raggiunga un possesso vasto per esemplificazioni multiple (cfr.[5]). A riguardo negli attuali programmi per la Scuola Elementare si legge: *La vasta esperienza compiuta ha... dimostrato che non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione di problemi e i primi livelli di formalizzazione*.

La ricerca didattica sulle difficoltà di apprendere la Matematica, allora che si sia d'accordo sugli obiettivi dell'obbligo e dell'approfondire, sembra allora essere legata al trovare una risposta a tutta una serie di domande che possiamo formulare nel modo seguente.

- Scoprire le difficoltà insite nell'attuale modello di Matematica di utilizzo scolastico.
- Individuare la differenza tra *abilità matematiche* per l'applicazione della stessa a situazioni pratiche e tra le abilità per la comprensione dell'astratto.

Per merito dello psicologo inglese Martin Hughes, sembra essere superato il punto di vista di Piaget asserente una sorta di *manca di capacità logica* nel bambino. Secondo Hughes i bambini avrebbero, in età prescolare, grandi capacità logiche, capacità che sarebbero frustrate allora che su questi supporti intuitivi e poco razionali, si sovrappone il difficile sistema linguistico che costituisce il simbolismo della Matematica. Del resto questo punto di vista circolava anche nelle assemblee del '68 allora che si accusava l'insegnamento tradizionale di essere carico di condizionamenti e vuoto di (apprendimento) di contenuti. Questo anzi era chiaramente espresso da personaggi quali Zoltan Dienes ed altri. Spunti per approfondimenti e ricerche successive sono i seguenti:

- Costruzioni di vocabolari logico-matematici meno ampi, con percorsi di ampliamento strettamente individualizzati.
- Minor uso di passaggi dal generale al particolare, da rimandare a momenti forse universitari.
- Costruzioni di vocabolari più vicini alle realtà degli allievi e comunque più vicine alle realtà della storia personale degli individui.
- Una attenzione particolare va posta nella gestione della formazione degli operatori scolastici ai fini di meglio equilibrare, in fase di formazione, il raccordo della cultura matematica sia con quella pedagogica che psicologica.
- Individuare percorsi didattici con periodi di fissaggio dei concetti più articolati ed individualizzati.
- Maggior controllo sull'uso dei genitori come partners degli insegnanti, specialmente se la matematica usata e la metodologia è molto diversa da quella in uso al tempo in cui il genitore era uno studente.
- Accurata classificazione del materiale in uso per l'apprendimento creando una gerarchia di controllo dell'apprendimento, tipo istruzione programmata, naturalmente più flessibile e meno vincolante.
- Creazione di tests adeguati per la verifica delle abilità possedute, di quelle conquistate e degli obiettivi via via raggiunti.
- Reperimento di giochi didattici per simulazioni di situazioni concrete, situazioni competitive e di coalizioni quali preparazione di elaborati per i quali sia indispensabile il lavoro di gruppo e quindi anche tendenti al recupero di studenti che tendano ad isolarsi.

Riteniamo che per ciascuno di questi punti si possa, in ulteriori lavori, dedicare ampio spazio e ricerca anche sperimentale in maniera da andare a costruire una banca dati operativa che sia di interesse per le applicazioni future. Quanto affermato è in chiaro contrasto con il punto di vista di Piaget. Il pensiero del Piaget ha subito profonde critiche negli ultimi anni. La critica si basa su considerazioni tipicamente pedagogiche: la suddivisione in periodi di apprendimento non sarebbe di alcuna utilità per comprendere i processi di apprendimento, anzi andrebbero maggiormente e più tecnicamente differenziati. In altre parole la teoria di Piaget si presenterebbe didatticamente irrilevante (cfr. Engelmann 1983 e Hughes 1986) in quanto essa non fornirebbe ad un docente alcuna indicazione su strategie da seguire. Ancora un aspetto sulle difficoltà della comprensione della Matematica è dato dal fatto che, oltre all'impadronirsi dei concetti, il bambino deve anche impadronirsi

del simbolismo scritto e parlato dell'aritmetica e passo successivo deve imparare a capire che questa disciplina ha un certo, ma non evidente, riscontro con fatti concreti.

2.- PERCORSI DIDATTICI IN PRESENZA DI DISABILITÀ

L'aritmetica costituisce con il suo formalismo e le sue regole un codice complesso per il discente. Il bambino che in età prescolare ha imparato qualche piccola nozione non le ritrova nel linguaggio scolastico, spesso lontano dal mondo reale. Questo è spesso a ragione perché: salti di qualità si fanno solo a pezzi di sforzi immani, ma a volte non è così ed esistono fenomeni di non disponibilità anche da parte di docenti e genitori. È vero che occorre portare il bambino non solo ad una abilità computazionale ma addirittura ad una abilità applicativa per la soluzione sia pure di semplici problemi (problem solving). Le difficoltà vengono anche da fattori di ordine linguistico e l'astrattezza della Matematica richiede a volte una vera e propria opera di traduzione da parte dei bambini stessi che da veri autodidatti devono cercare delle forme a loro più comprensibili, magari scambiando l'esempio con la regola e il particolare con il generale.

Una ulteriore foresta di difficoltà si presentano allora che si pensi alla Matematica come disciplina in cui non sono ammessi salti logici. Tutto è strettamente concatenato e coerente. L'incoerenza è errore. Inoltre per arrivare al momento magico del Problem solving occorre imparare serie di procedure precise, l'uso di algoritmi efficienti e la capacità di prendere le decisioni più plausibili nel caso di alternative.

Così non siamo autorizzati, nel caso di disabilità matematica, ad una politica di non intervento per le età pre-anni sette, alla luce del *tanto mancano le capacità logiche* di piagetiana memoria. Oggi sappiamo che così non è ed occorre dunque una politica di intervento e le strategie per operare in questa direzione. Questo è ciò che faremo nel paragrafo successivo. Insegnare la Matematica oggi nel periodo iniziale di formazione o costruire una mentalità giusta in allievi disabili, per impararne un po', è compito veramente ingrato, sia per la difficoltà della stessa disciplina sia per il rinnovamento che essa ha subito dagli anni '30 in poi.

Oggi, specialmente in età di scuola materna, si sono diffusi numerosi giochi noti come *blocchi logici*, *seriazioni*, *classificazioni* che hanno lo scopo di affinare quelle sensibilità e quelle percezioni o stati percettivi che condurranno poi il bambino a percorrere sentieri divenuti di fatto quasi familiari, allora che inizi ad acquisire le sue conoscenze logico-matematiche, perché parzialmente percorsi sia pure *per gioco*. I giochi naturalmente servono al docente esperto, diremo all'operatore scolastico per classificare in categorie le risposte degli allievi in categorie in funzione delle risposte.

- I bambini possono dare risposte simboliche per le quantità con simbolismo del tutto personale. Se un bambino costruisce un codice occorre adoperare del tempo per decodificarlo e quindi colloquiare con lui.

- I bambini possono dare risposte pittoriche, sia rappresentando la realtà che vedono, sia rappresentandone una più o meno vicina. Può non essere immediato il significato di quel disegno, ma sarebbe importante decodificare il messaggio subcomunicativo di cui esso è il canale.
- I bambini possono dare una risposta a *mezza via* cioè una risposta che ricorre solo parzialmente all'astratto. Esemplicando il bambino dice: "*Maestra ho 4 anni*" e mostra il 4 alzando 3 dita. La Maestra comprende che sta iniziando a capire un procedimento ancora non chiaro.
- I bambini infine possono dare tutta una gamma di risposte negative nelle quali è di fatto molto difficile scoprire collegamenti di regolarità con quanto si sta facendo, ma andrebbe approfondita questa irregolarità tentando di capire se vi è ugualmente qualche positività. Infatti in quelle età è la ricerca del positivo che deve essere fatta e non quello del negativo; a nostro avviso fino a tutto il secondo ciclo elementare, ed in qualche caso fino all'intero periodo delle Medie.

In realtà da bambini in età prescolare ci aspettiamo risposte totalmente irregolari; la realtà ci insegna che non è affatto così. L'utilizzo di giochi, ovvero di *materiale strutturato*, in genere hanno in realtà in sé due compiti fondamentali. Un primo compito, peraltro obiettivo secondario, è quello di rendere concrete e intelleggibili le risposte sui concetti della matematica. L'obiettivo principale, anche se più riposto, è quello di facilitare le conquiste dei concetti e dell'astratto specialmente in presenza di allievi che mostrino carenze di adattamento notevoli in queste direzioni.

Per l'allievo normale è auspicabile, sia pure in modo ludico, presentare motivazioni reali in relazione ai problemi da trattare in modo da creare una sorta di interesse affettivo o di curiosità che sia l'obiettivo apparente, l'obiettivo principale, magari nascosto, rimanendo quello cognitivo...

Per l'allievo portatore di handicap, specie se mentale, tali strategie si rivelano in generale piuttosto fallimentari. Infatti l'aspetto motivazionale stimola interesse allora che si fa riferimento ad un bambino che sia attento osservatore del mondo e che abbia iniziato ad interagire con le dinamiche varie che il mondo riversa su di lui. Ovviamente, tali metodiche sono del tutto perdenti allora che l'handicap manifesti carenze proprio nella direzione di queste interazioni. Le pur interessanti e notevoli ricerche didattiche di questi ultimi anni poco ci dicono su come agire in queste direzioni e l'unico strumento che sembra ancora valido è quello del docente che, per vari intuizioni personali e per sensibilità acquisite nell'esperienza, riesca a *fare breccia* al di là del muro del silenzio.

Per l'allievo disabile è certamente il calcolatore uno strumento utilissimo, lo si può usare sia per calcolare, sia per scrivere, sia per archiviare. Sarebbe un grande successo sia pure ottenere queste tre cose dopo il ciclo elementare.

Le ricerche in questo settore dovrebbero condurci ad avere risposte ai seguenti problemi, probabilmente tra i fondamentali del settore:

- 1) Precisione metodiche per l'insegnante ai fini dell'acquisizione di abilità matematiche da parte degli allievi, da classificare come irrinunciabili. Scelta ed adattamento delle stesse in presenza di Handicap.
- 2) Utilizzo sempre maggiore dei materiali ludici standard come *medicine* per interventi su particolari carenze individuate e classificate mediante

diagnosi precise ed analisi ripetibili e classificazioni sempre più accurate.

- 3) Ai fini della valutazione scolastica viviamo oggi una sorta di ottica binaria che consiste nel dichiarare a priori l'allievo abile o disabile. Dovrebbe allora ai fini della abilità e disabilità introdursi una serie di parametri che permettano una classificazione e quindi una valutazione ben più articolata.
- 4) L'intero istituto della valutazione andrebbe ristrutturato in maniera da poter tener conto non solamente dello stato astratto di preparazione dell'individuo, bensì del gradiente tra preparazione iniziale e finale. Tutto ciò, naturalmente, in relazione agli obiettivi posti e in funzione del suo *gradino di abilità-disabilità*.

BIBLIOGRAFIA

1. E.AMBRISI-B.RIZZI, *Interdisciplinarietà e nuovo fusionismo*, Archimede 1-2 (1978), 49-51.
2. M.A.BRANDIMARTE, *Lo sviluppo delle competenze matematiche*, Psicologia e scuola, 37 (1988), 15-29.
3. J.S.BRUNER, *Il significato dell'educazione*, Ed. Armando, Roma, 1992.
4. S.D'ANDREA, *Disabilità matematiche e strategie per l'apprendimento*, Atti del Convegno Nazionale Mathesis su *L'impatto della modellistica nella divulgazione e nella didattica*, Rovigo, 1994.
5. S.D'ANDREA, *I processi cognitivi in Russel e Piaget*, Ratio Math., -- (1994).
6. T.DI STEFANO, *Insegnare la Matematica ad allievi handicappati: quale didattica*.
7. S.ENGELMANN, *Piaget e la didattica: promessa o delusione?*, Psicologia e Scuola 16 (1983), 6-12.
8. F.EUGENI, *Le due rivoluzioni del secolo: da Bourbaki alla Matematica del discreto*, Per. di Mat., 1 (1992), 3-21.
9. M.HUGHES, *What is difficult about learning arithmetic?*, in Donaldson Editor: "Early Childhood Development and Education. Basil Blackwell, Oxford (1983).

CONSIDERAZIONI PROBABILISTICHE SU ALCUNE STRATEGIE NEI GIOCHI D'AZZARDO

Antonio Maturo e Giuseppe Di Biase *

PREMESSA

Aldo Bartolini è un nostro amico appassionato di scommesse. Fa il preside di una scuola secondaria, è laureato in Lettere, ma, spiritualmente, un matematico. Egli, sentendosi abbandonato dalla dea bendata, si diverte ad elaborare strategie di gioco con la speranza di trovarne qualcuna che risulti vincente. L'ultima che ci ha illustrato ci è sembrata molto interessante ed allora abbiamo provato a formalizzarla e ad analizzarla dal punto di vista probabilistico, confrontandola anche con altre strategie più note.

LA STRATEGIA DI BARTOLINI

Supponiamo che si desiderino vincere in un determinato gioco n somme $a_1, a_2, \dots, a_n$ e che il gioco sia formato da una successione di partite in

* Univ. "G. D'Annunzio" - Dip. Di Scienze - Viale Pindaro 42 - Pescara

ciascuna delle quali la probabilità p di vincere sia costante. Supponiamo inoltre che in ogni partita la somma che si può vincere sia uguale a quella che si può perdere. Ad esempio il gioco può consistere nel puntare rosso o nero alla roulette, nel giocare a mazzetti o a piatto con gli amici, nel giocare a testa o croce, etc. Per $p = 1/2$ il gioco è equo. Chiamiamo **gettone** ognuna delle somme a_i ed indichiamo con $S_0 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ la somma totale da vincere e con $n(0) = n$ il numero di gettoni da vincere prima di iniziare la serie delle partite.

Alla **prima partita** puntiamo i gettoni a_1 (il primo) ed a_n (l'ultimo) e quindi una somma pari a $a_{n+1} = a_1 + a_n$ con un unico gettone a_{n+1} . Ovviamente, se $n(0) = 1$ puntiamo il solo gettone a_1 .

In caso di vincita, per $n > 2$, la somma che ci resta da vincere è $S_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$, divisa in $n-2$ gettoni mentre, per $n \leq 2$, il gioco si conclude poichè abbiamo vinto la somma voluta.

In caso di perdita dobbiamo ancora vincere la somma S_0 più la somma a_{n+1} che abbiamo perso. Ci resta, allora, da vincere ancora la somma $S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}$ divisa in $n+1$ gettoni.

Continuiamo a giocare, considerando come somma da vincere la S_1 .

Alla **($r+1$)-esima partita**, supponendo che nelle prime r non si è vinta ancora la somma voluta, S_0 , ci troviamo a dover vincere ancora una certa somma $S_r = b_1 + b_2 + \dots + b_{n(r)}$, divisa in $n(r)$ gettoni.

Puntiamo i gettoni b_1 e $b_{n(r)}$ e quindi la somma $b_{n(r)+1} = b_1 + b_{n(r)}$.

Se vinciamo, la somma che resta da vincere è $S_{r+1} = b_2 + b_3 + \dots + b_{n(r)-1}$, divisa in $n(r)-2$ gettoni.

Se perdiamo dobbiamo ancora vincere la somma S_r più la somma $b_{n(r)+1}$ che abbiamo appena perso. Resta, dunque, da vincere ancora la somma $S_{r+1} = b_1 + b_2 + \dots + b_{n(r)} + b_{n(r)+1}$ divisa in $n(r)+1$ gettoni.

In altre parole, se $S_r = b_1 + b_2 + \dots + b_{n(r)}$ è la somma da vincere ancora dopo r partite, la strategia di Bartolini consiste nel puntare alla partita $(r+1)$ -esima un gettone equivalente alla somma:

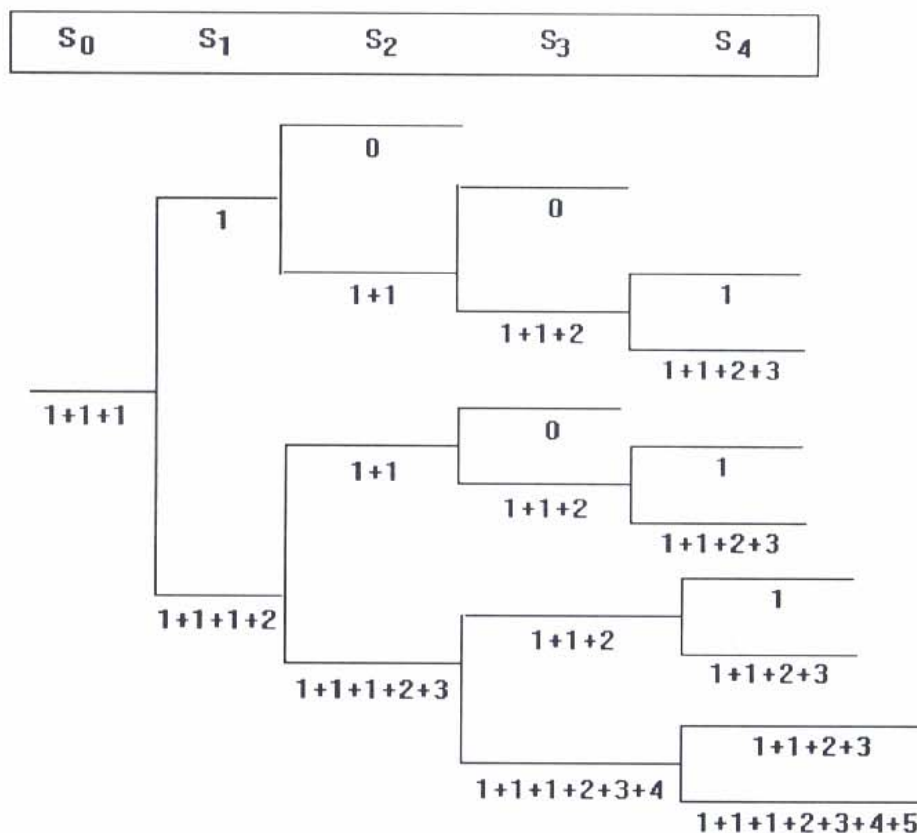
$$b_{n(r)+1} = b_1 + b_{n(r)}$$

e nel porre

$$S_{r+1} = \begin{cases} b_1 + b_2 + \dots + b_{n(r)+1} & \text{se si perde} \\ b_2 + b_3 + \dots + b_{n(r)-1} & \text{se si vince} \end{cases}$$

Osserviamo che ad ogni partita, in caso di vincita, si guadagnano due gettoni e che, in caso di perdita, si perde solo un gettone. Quando $S_r = 0$ abbiamo raggiunto lo scopo prefissatoci poichè si è vinta la somma S_0 più le varie somme perse durante lo svolgimento della partita e, quindi, concludiamo il gioco.

Ad esempio supponiamo di voler vincere la somma $S_0 = 1 + 1 + 1$ divisa in tre gettoni. Al primo colpo è $S_1 = 1$ se si è vinto, oppure $S_1 = 1 + 1 + 1 + 2$ se si è perso. Per i quattro colpi successivi la situazione è descritta nel seguente diagramma ad albero in cui il numero scritto su ogni ramo rappresenta la somma che resta da vincere dopo ogni colpo.



CONFRONTO CON LA STRATEGIA DEL RADDOPPIO

La strategia del raddoppio consiste, in caso di perdita, nel puntare al colpo successivo il doppio di quanto si sia puntato precedentemente ed, in caso di vincita, nel concludere il gioco; precisamente se $S_0 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ è la somma totale da vincere alla **prima partita**, puntiamo tutti i gettoni e quindi la somma $a_{n+1} = S_0$. Se $n(0) = 1$ puntiamo un solo gettone.

In caso di vincita il gioco si conclude poichè abbiamo vinto la somma voluta.

In caso di perdita dobbiamo ancora vincere la somma iniziale S_0 più la somma a_{n+1} che abbiamo perso, ossia la somma $S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = 2S_0$. E così via.

Formalizzando quanto detto, se $S_r = b_1 + b_2 + \dots + b_{n(r)}$ è la somma da vincere ancora dopo r partite, la strategia del raddoppio consiste nel puntare alla partita $(r+1)$ -esima la somma

$$b_{n(r)+1} = b_1 + b_2 + \dots + b_{n(r)}$$

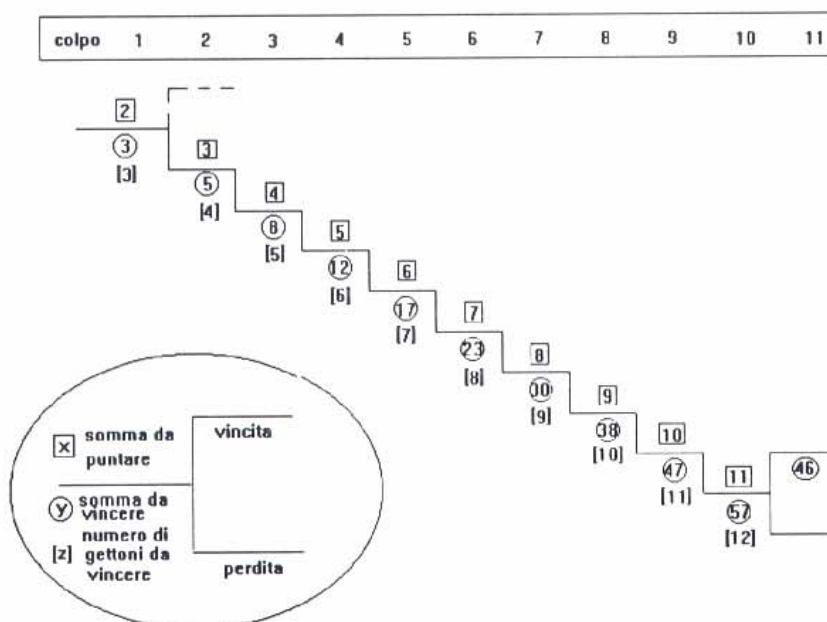
ottenendo

$$S_{n(r)+1} = \begin{cases} 0 & \text{se si vince} \\ b_1 + b_2 + \dots + b_{n(r)+1} & \text{se si perde} \end{cases}$$

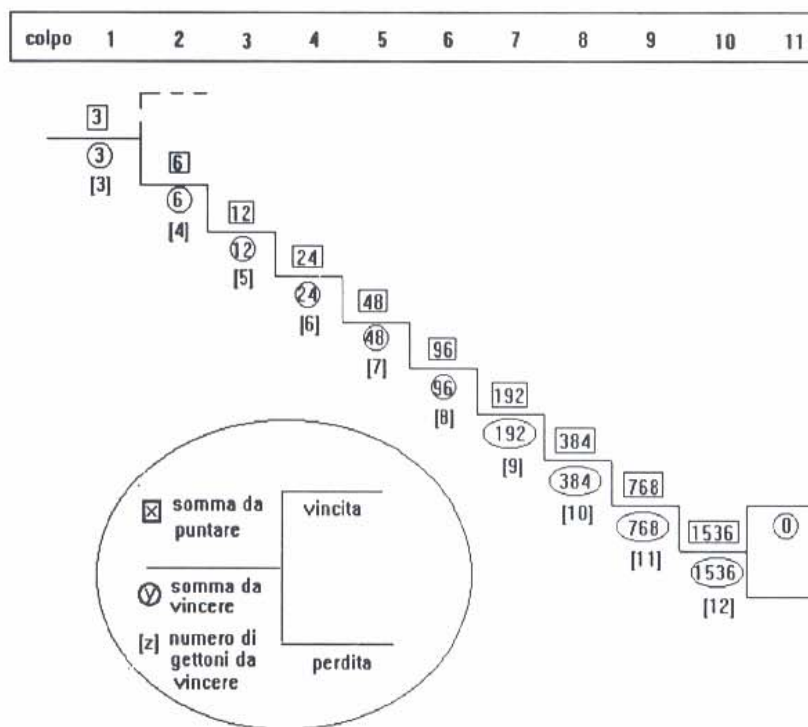
Osserviamo che, in caso di vincita, si guadagnano $n(r)$ gettoni e che, in caso di perdita, si perde solo un gettone.

Per valutare il rischio delle due strategie descritte consideriamo il caso di una serie di dieci esiti consecutivi sfavorevoli al giocatore.

Ponendo $S_0 = 1 + 1 + 1$ si ottengono i seguenti diagrammi.



STRATEGIA DI BARTOLINI



somma dei primi $(n-1)$ termini, che rappresenta la somma che si è persa dopo $(n-1)$ colpi negativi, è data dalla seguente formula:

$$S = \frac{b_1 + b_{n-1}}{2} (n-1)$$

(nell'esempio $S = 54$).

Con la strategia del raddoppio si ha, invece, una progressione geometrica di primo termine $b_1 = 3$, ragione $q = 2$, n -esimo termine $b_n = b_1 q^{n-1}$ e somma dei primi n termini:

$$S = \frac{q^n - 1}{q - 1} b_1.$$

Nell'esempio effettuato si ha che $b_{10} = 1536$ e che $S = 1533$.

ANALISI PROBABILISTICA

Analizziamo alcune variabili aleatorie collegate ai giochi effettuati facendo l'ipotesi che, se rimane un solo gettone, si possa vincere il gettone rimanente più un gettone simbolico di valore nullo e che, dopo il termine della partita, si vincono o si perdono solo gettoni di valore nullo.

Indichiamo, per ogni numero r naturale, con X_r il numero dei gettoni vinti alla r -esima partita. Col metodo del raddoppio risulta:

$$X_r = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } q = 1-p \\ n(r-1) & \text{con probabilità } p \end{cases}$$

Il valor medio e la varianza di X_r sono allora:

$$M(X_r) = (-1)(1-p) + n(r-1)p = [n(r-1)+1]p - 1$$

$$\begin{aligned} V(X_r) &= (1-p) + [n(r-1)]^2 p - \{[n(r-1)+1]p - 1\}^2 \\ &= [n(r-1)+1]^2 p q. \end{aligned}$$

Col metodo di Bartolini la variabile "numero dei gettoni vinti" assume i valori:

$$X_r = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } q = 1-p \\ +2 & \text{con probabilità } p \end{cases}$$

Per l'ipotesi effettuata, per ogni r naturale, si ha:

$$M(X_r) = 3p - 1; \quad V(X_r) = 9pq.$$

Indichiamo con N_r la variabile aleatoria che descrive il numero di gettoni vinti in r colpi. Risulta:

$$N_r = X_1 + X_2 + \dots + X_r$$

Torniamo ora specificatamente alla strategia di gioco suggeritaci dal Preside Bartolini. Poichè le X_i , $i = 1, 2, \dots, r$, sono indipendenti, il valor medio e la varianza di N_r sono:

$$M(N_r) = \sum_{i=1}^r M(X_i) = r(3p-1)$$

$$V(N_r) = \sum_{i=1}^r V(X_i) = 9rpq.$$

La prima relazione esprime il fatto che, per vincere gli n gettoni iniziali, occorrono in media un numero r di partite tale che $M(N_r) = n$, ossia $r(3p-1) = n$, cioè $r \geq n/(3p-1)$.

Interessa ora valutare la probabilità che "prima o poi" si riesca a vincere il numero di gettoni prefissati. Consideriamo in proposito l'evento $E_r =$ "il numero dei gettoni vinti in r partite è almeno uguale a quello che ci prefiggevamo inizialmente" che si può esprimere nella seguente maniera:

$$E_r = "N_r \geq n"$$

e l'evento $F_r =$ "gli n gettoni sono vinti in non più di r partite".

Essendo $F_r = \bigcup_{i=1}^r E_i$ si ha che $E_r \subseteq F_r$, per cui

$$\text{prob}(E_r) \leq \text{prob}(F_r).$$

Pertanto una minorazione della probabilità dell'evento che ci interessa calcolare si ottiene determinando la probabilità dell'evento E_r .

Per fare questo utilizziamo il Teorema del limite centrale. Esso ci assicura che, posto $m_r = M(N_r)$ e $\sigma_r = \sqrt{V(N_r)}$, per n "abbastanza

grande", la variabile casuale centrata ridotta $Z_r = \frac{N_r - m_r}{\sigma_r}$ ha

distribuzione normale standard, ossia che, detta $\Phi(x)$ la funzione di ripartizione della legge normale standard, per ogni numero reale y risulta:

$$\text{prob}(N_r < y) = \text{prob}\left(Z_r < \frac{y - m_r}{\sigma_r}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx = \Phi(y).$$

Pertanto:

$$\text{prob}(N_r \geq n) = 1 - \text{prob}(Z_r < \frac{n - m_r}{\sigma_r}) = 1 - \Phi(\frac{n - m_r}{\sigma_r}) = \Phi(\frac{m_r - n}{\sigma_r})$$

Per r uguale al numero medio di partite per vincere gli n gettoni iniziali, ossia $r = n / (3p - 1)$, si ha $m_r = n$ e quindi $\text{prob}(E_r) = \Phi(0) = 1/2$.

Posto:

$$m_r - n = k \sigma_r, \quad k \geq 0 \quad (1)$$

dalle tavole della funzione di ripartizione della normale standard si ottiene la seguente tabella, per i vari valori di k , delle probabilità che il numero di gettoni vinti in r partite sia almeno uguale a quello prefissato:

k	0	1	1.29	2	2.33	3
$\text{prob}(E_r)$	0.5	0.8413	0.9	0.9772	0.99	0.9987

Dalla (1) elevando al quadrato e sostituendo i valori di m_r e σ_r si ricava una equazione di secondo grado in r :

$$(3p - 1)^2 r^2 - [2n(3p - 1) + 9p(1 - p)k^2]r + n^2 = 0. \quad (2)$$

Risolvendo la (2) si ottiene:

$$r = \frac{2n(3p - 1) + 9p(1 - p)k^2 \pm \sqrt{a}}{2(3p - 1)^2} \quad (3)$$

dove $a = (2n(3p - 1) + 9p(1 - p)k^2)^2 - 4(3p - 1)^2 n^2$.

Dalla seguente relazione, valida per $x \geq y \geq 0$:

$$\sqrt{x - y} \geq \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

si deduce che, per $k > 0$, nella (3) non può valere il segno negativo. Altrimenti sarebbe:

$$r \leq \frac{2n(3p - 1) + 9p(1 - p)k^2 - b + 2(3p - 1)n}{2(3p - 1)^2},$$

con $b = 2n(3p - 1) + 9p(1 - p)k^2$, ossia $r \leq \frac{n}{3p - 1}$, il che è

assurdo poichè ciò avviene per $k \leq 0$. Allora si ha:

$$r = \frac{2n(3p-1) + 9p(1-p)k^2 + \sqrt{c}}{2(3p-1)^2} \quad (4)$$

dove $c = 36nk^2(3p-1)p(1-p) + 81p^2(1-p)^2k^4$.

Consideriamo il caso particolare $p = 1/2$, che è il più interessante poichè si riferisce ad un gioco equo.

Dalla (4) segue:

$$r = 2n + 4.5k^2 + 2\sqrt{4.5nk^2 + 5.0625k^4}.$$

In corrispondenza di alcuni valori di k e di n abbiamo la seguente tabella di valori di r :

r	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=1$	2	12.68	39.9	84.95
$n=5$	10	25	54.15	100
$n=10$	20	38.65	70.31	117.6

Possiamo leggere la tabella nella seguente maniera. Bastano rispettivamente 2, 10 e 20 partite affinché sia $1/2$ la probabilità che il numero dei gettoni vinti sia maggiore o uguale rispettivamente a 1, 5 e 10.

Si ha una confidenza maggiore o uguale all'84% di vincere rispettivamente almeno 1, 5, 10 gettoni in 13, 25, 39 partite. Per avere una sicurezza maggiore o uguale al 99.87% di vincere bastano rispettivamente almeno 85, 100, 118 partite.

Consideriamo casi più realistici con $p < 1/2$, ad esempio per $p = 15/37 \cong 0.4$ la (4) diventa:

$$r = 5n + 27k^2 + 12.5\sqrt{1.728nk^2 + 4.6656k^4}.$$

Per $k=0$ e $k=1$ abbiamo la seguente tabella di valori di r :

r	$n=1$	$n=5$	$n=10$
$k=0$	5	25	50
$k=1$	63.6	97.6	135.56

La sicurezza di vincere all'84% si ottiene per $n=1$, con 64 partite e, per $n=10$, con 136 partite.

I risultati ottenuti sembrano, in media, dar ragione al Preside Bartolini sebbene l'ultima volta, recatosi al Casinò con il Prof. Franco Eugeni, egli abbia perduto non solo i suoi denari, ma anche quelli dell'amico. Comunque i calcoli effettuati invoglieranno i nostri amici a riprovarci, difatti si è visto che, con un opportuno numero di partite, la probabilità di vincere in media è alta, anche se il gioco non è equo. Ciò, però, è in contraddizione con i noti teoremi sulla rovina del giocatore. Il paradosso consiste nel fatto che si è identificato il gettone da puntare con il valore delle somme da puntare nei vari colpi.

CONCLUSIONI

Il paradosso si spiega col fatto che l'analisi effettuata è in contraddizione con il significato di valor medio di una variabile casuale.

Infatti, se A_r è la somma giocata nella r -esima partita e V_r è la vincita alla r -esima partita, risulta:

$$V_r = \begin{cases} -A_r & \text{con probabilità } q = 1 - p \\ +A_r & \text{con probabilità } p \end{cases}$$

per cui $M(V_r) = A_r(2p - 1)$.

Se N è il numero di partite giocate e V è la vincita totale, risulta:

$$M(V) = \sum_{r=1}^N M(V_r) = \sum_{r=1}^N A_r(2p - 1),$$

da cui segue che la vincita totale media è nulla se e solo se $p = 1/2$, negativa se e solo se $p < 1/2$.

La contraddizione si supera osservando che bisogna porre due vincoli al gioco:

- (a) la somma totale T a disposizione del giocatore;
- (b) il numero massimo N di partite.

Esistono allora i seguenti eventi alternativi:

E_1 = "Bartolini vince gli n gettoni";

E_2 = "Bartolini perde la somma T ";

E_3 = "le partite terminano senza che si verifichi nessuno dei due eventi

E_1 ed E_2 ".

Siano p_1 e p_2 le probabilità degli eventi E_1 ed E_2 .

Supponiamo, per fissare le idee, che il numero di partite sia illimitato e che sia $p = 1/2$.

La variabile casuale vincita totale V allora può assumere il valore $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ con probabilità p_1 ed il valore $-T$ con probabilità p_2 .

Il suo valor medio è:

$$M(V) = p_1 S - p_2 T.$$

Avendo fatto l'ipotesi di gioco equo si ha che $M(V) = 0$, per cui:

$$p_2 / p_1 = S / T \quad (5)$$

Per $T \rightarrow +\infty$ si ha che $p_2 \rightarrow 0$ e, quindi, l'evento E_1 si verifica con certezza. In caso contrario la (5), essendo in genere $T \gg S$, mostra che contro un'elevata probabilità di vincere la somma S esiste una bassa probabilità da parte del giocatore di perdere tutti i suoi averi.